Gruppenübung 7

Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen M_i, $i = 1, 2, 3$, Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie, falls möglich, Matrizen S_1 und S_2 an, so dass $S_1^{-1} M_1 S_1$ und $S_2^{-1} M_2 S_2$ Diagonalmatrizen sind.

Hinweis: Ist v ein Eigenvektor einer reellen Matrix zu einem Eigenwert λ, dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

c) Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S_3 an, so dass $S_3^\top M_3 S_3$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung II)

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche α gibt es eine orthogonale Matrix S, so dass

$$S^\top A_\alpha S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

gilt? Geben Sie eine solche Matrix S an.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nennt man simultan diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben.

Beweisen Sie: Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

Aufgabe 3 (Spezielle Matrizen)

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$ unitär?

b) Entscheiden Sie, ob die quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $q(x) = x^\top \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} x$ positiv definit ist.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von P gleich 0 oder 1 sein.

Aufgabe 4 (Wahr oder falsch?)

a) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung.

i) A ist diagonalisierbar;

ii) A ist invertierbar;

iii) A ist orthogonal;

iv) A ist positiv definit.

b) Gegeben sei eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\nu_1 = -1$, $\nu_2 = 2$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Eigenwert der Matrix B ist $\nu_3 = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung.

i) B ist diagonalisierbar;

ii) B ist invertierbar;

iii) B ist symmetrisch;

iv) Es gilt $B \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen M_i, $i = 1, 2$, Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Matrix S_1 an, so dass $S_1^{-1} M_1 S_1$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S_2 an, so dass $S_2^\top M_2 S_2$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Berechnen Sie M_1^{2018} ohne Benutzung eines Rechners.