Gruppenübung 9

Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Kettenregel)
Die Funktionen $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\psi(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z, \qquad \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x,y) = \psi(\phi(x^3 - 2y^2, 2x + y))$.

a) Bestimmen Sie $f(1,1)$.

b) Berechnen Sie $\nabla f(1,1)$.

c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = f(x,y)$ definierte Fläche im Punkt $(1,1,f(1,1))$.

Aufgabe 2 (Laplaceoperator)
Der Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten (r,θ) und kartesischen Koordinaten (x,y) ist gegeben durch

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $g\colon (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Ermitteln Sie die Darstellung des Laplaceoperators in Polarkoordinaten, d.h. zeigen Sie:

$$(\Delta f)(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

Aufgabe 3 (Gradient, Divergenz, Rotation)
Sei $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld und $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie die folgenden Operatoridentitäten:

a) $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$, b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(A)) = 0$, c) $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0$.

Aufgabe 4 (Partielle Differentialgleichungen)

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $\omega\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\omega(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},$$

ist.

b) Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen der Form $f(x, y) = e^{kx} g(y)$ der Laplacegleichung

$$\Delta f = 0,$$

wobei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Hinweis: Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für g.

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Drücken Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x, y) = f(x^2 y, x + 2y)$$

durch jene von f aus.

b) Sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y, z) = (xy^2, -yz^2, zx^2)$. Bestimmen Sie $\operatorname{div}(f)$ und $\operatorname{rot}(f)$.

c) Sei $k > 0$. Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen der Form $f(t, x) = e^{kt} g(x)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist.