Gruppenübung 10

Aufgabe 1 (Mehrdimensionaler Satz von Taylor)
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = (1-z)e^{x-y^2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $(0,0,0)$,

a) indem Sie Gradienten und Hesse-Matrix bestimmen.

b) indem Sie die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion benutzen.

Aufgabe 2 (Extrema I)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$.

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 3 (Extrema II)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix von f im stationären Punkt $(0,0)$ einen Eigenwert 0 besitzt.

b) Zeigen Sie, dass f längs jeder Ursprungsgeraden in $(0,0)$ ein lokales Minimum besitzt.

c) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Aufgabe 4 (Hurwitz-Kriterium für 2×2 Matrizen)

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f und $\det(f''(x_0)) > 0$, dann gilt

   i) $\partial_{x_1}^2 f(x_0) > 0$ impliziert ein lokales Minimum.

   ii) $\partial_{x_1}^2 f(x_0) < 0$ impliziert ein lokales Maximum.

b) Wenden Sie das Kriterium auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto 5x^2 + 5y^2 - 7xy + 1,$$

an.

Aufgabe 5 (Wahr oder falsch?)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist x_0 ein Sattelpunkt, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ ist weder negativ noch positiv definit.

b) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ weder negativ noch positiv definit, so ist x_0 ein Sattelpunkt.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^3 + 2xy^2 - 4x + 5$

   i) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

   ii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

   iii) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt).

b) Bestimmen Sie die mehrdimensionale Taylorreihe von g mit

$$g(x, y, z) = \frac{yz^3}{1 - x^2 z}$$

zum Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$ mit Hilfe einer bekannten eindimensionalen Reihe.