Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 11

Aufgabe 1 (Satz über implizite Funktionen I)
Gegeben ist die Kurve

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - xy + y^2 = 3\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1, 2) \in K$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K im Punkt $(1, 2)$.

c) Zeigen Sie, dass es ein Intervall $U \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in U$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\{(x, f(x)) : x \in U\} \subset K.$$

d) Zeigen Sie, dass es außerdem ein Intervall $V \subset \mathbb{R}$ mit $2 \in V$ und eine differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\{(g(y), y) : y \in V\} \subset K.$$

Aufgabe 2 (Satz über implizite Funktionen II)
Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} x^2y^2 + zu + yv^2 &= 3 \\ y + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ nach (u, v) aufgelöst werden kann und bestimmen Sie $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Aufgabe 3 (Extrema mit Nebenbedingungen I)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^y(y^2 - 2x^2).$$

a) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 6$.

b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f auf der Menge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le 6\right\}.$$

Aufgabe 4 (Extrema mit Nebenbedingungen II)
Gegeben sei die Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = x + y + z.$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion h unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 - y^2 = 1$ und $2x + z = 1$ Extremstellen besitzt.

Aufgabe 5 (Der Banachsche Fixpunktsatz und das Newton-Verfahren)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 3$.

a) Zeigen Sie, dass $T\colon (\frac{3}{2}, \infty) \to (\frac{3}{2}, \infty)$ gegeben durch

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine Kontraktion ist, d.h. dass eine Konstante $c \in (0, 1)$ existiert, so dass $|T(x) - T(y)| \leq c|x - y|$ gilt.

b) Zeigen Sie mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass T einen eindeutigen Fixpunkt hat.

c) Berechnen Sie $a = \sqrt{3}$ iterativ unter Benutzung des Newton Verfahrens. Führen Sie die ersten 4 Schritte der Berechnung von a durch.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Zeigen Sie, dass die Ellipse $x^2 + 2y^2 = 2$ und die Hyperbel $2x^2 - 2y^2 = 1$ sich senkrecht in $\mathbb{R}^2$ schneiden.

Hinweis: Verwenden Sie implizite Differentiation.

b) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse $2x^2 + xy + 2y^2 = 5$, die am nächsten zum und die, die am weitesten weg vom Ursprung im $\mathbb{R}^2$ sind.

Hinweis: Bestimmen Sie die Extrema von $x^2 + y^2$ unter geeigneten Nebenbedingungen.