Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 12

Aufgabe 1 (Kurvenparametrisierung und Kurvenlänge)

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Schnittmenge der folgenden zwei Fläche in $\mathbb{R}^3$:

$$yz + x = 1, \qquad xz - x = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass die Länge der logarithmischen Spirale $c\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix},$$

endlich ist und bestimmen Sie außerdem die Länge.

c) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix}\arcsin(x)\\ \sqrt{1-x^2}\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge *des Graphen* von f.

Aufgabe 2 (Von Kurve umschlossene Fläche)
Die sogenannte Strophoide ist durch die Kurve $c\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right)^\top$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass c eine geschlossene Kurve ist.

b) Berechnen Sie die von der Strophoide c umschlossene Fläche.

Hinweis: $\int \frac{1}{(t^2+1)^l}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-l)}\left((3-2l)\int \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}}\mathrm{d}t - \frac{t}{(t^2+1)^{l-1}}\right)$ für $l = 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 3 (Kurvenintegral)
Gegeben sei die Kurve $\gamma\colon [0, \ln 2] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))^\top$ sowie das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) = (y, -z, x)^\top$.

a) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \langle v(X), \mathrm{d}X\rangle.$$

b) Ist dieses Kurvenintegral bei dem gegebenen Vektorfeld v wegunabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Umfang und Flächeninhalt einer Ellipse)
Betrachten Sie für $a \geq b > 0$ die Kurve

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(\varphi) = (a\cos(\varphi), b\sin(\varphi))^\top,$$

hierbei handelt es sich um eine Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b.

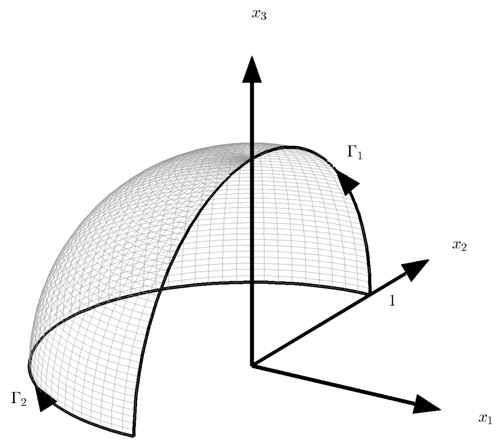
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse.

b) Zeigen Sie, dass der Umfang der Ellipse gegeben ist durch

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(\varphi) + b^2\cos^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Gegeben seien untenabgebildete Kurven Γ_1 und Γ_2 in $\mathbb{R}^3$.



Geben Sie jeweils eine Parametrisierung für Γ_1 und Γ_2.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von f über dem Interval $[0, 3]$.

c) Gegeben sei die Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_c f(X)\mathrm{d}s,$$

für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(X) = f(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2+y^2}$.