Gruppenübung 13

Aufgabe 1 (Wegintegrale zweiter Art)

a) Gegeben sei das Gradientenfeld $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy}\sin(z) + x + y \\ xe^{xy}\sin(z) + x + y - z \\ e^{xy}\cos(z) - y + z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential von w, sowie den Wert von $\int_\gamma \langle w(X), \mathrm{d}X\rangle$, wobei γ eine stückweise C^1-Kurve mit Anfangspunkt $(1,1,\pi)$ und Endpunkt $(2,1,0)$ ist.

b) Gegeben sei das Gradientenfeld $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$w(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(x+y^2) \\ 4xy + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential von w, sowie auf möglichst einfache Weise $\int_{c_n} \langle w(X), dX\rangle$, wobei $c_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c_n(t) = (e^{\sin(n\pi t)}, 1 - t^n)^\top$ und $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen, welche sind abgeschlossen und welche sind kompakt? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

i) $[0,1]$ ii) $\mathbb{R}$ iii) $[0,\infty)$ iv) $\mathbb{Q}$ v) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche sind abgeschlossen und welche sind kompakt? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

i) $\{(x,0) : x \in (0,1)\}$ ii) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ iii) $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$.

Aufgabe 3 (Wahr oder falsch?)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $U_1, U_2, U_3, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Schnittmenge $U_1 \cap U_2$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

b) Die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

c) Die Schnittmenge $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_j$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

d) Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 (Wahr oder falsch?)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nimmt ein Minimum und ein Maximum auf der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 6\},$$

an.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $U \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist auch

$$f(U) := \{f(x) : x \in U\},$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, so ist auch

$$f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in U\},$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die Menge der Nullstellen

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\},$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.