Vortragsübung 1

Aufgabe 1 *Integration*
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos(3x)\,\mathrm{d}x, \qquad b)\quad \int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$c)\quad \int x\cos\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x, \qquad d)\quad \int_0^2 \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$e)\quad \int_a^b \sinh(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f)\quad \int \sin(2x)e^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
Sei $D = (-a, a)$ mit $a > 0$. Wir nennen eine beliebige Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt. Wir nennen f *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Im Folgenden sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Ist f ungerade, so ist f' gerade, und alle Stammfunktionen von f sind gerade.

b) Ist f gerade, so ist f' ungerade, und f besitzt genau eine ungerade Stammfunktion.

Aufgabe 3 *Mittelwertsatz*
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ (wobei $a < b$).

a) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.

b) Bleibt dieser Schluß richtig, wenn f zwar Riemann-integrierbar, aber unstetig ist?

Aufgabe 4 *Riemann-Integrierbarkeit*
Es sei $y > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, y] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ Riemann-integrierbar auf $[0, y]$ ist, und berechnen Sie mittels Riemannscher Summen

$$\int_0^y f(x)\mathrm{d}x.$$

Anmerkung: Sie dürfen die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ (die man zum Beispiel durch vollständige Induktion beweisen kann) verwenden, ohne sie zu beweisen.