Vortragsübung 3

Aufgabe 1 *Separierbare Differentialgleichung*
Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(t)$ von

$$y'(t) = \sin(t)(y(t))^2 - \sin(t)$$

für die gilt $y(0) = 0$.

Aufgabe 2 *Lineare Unabhängigkeit, Basis*

a) Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Stellen Sie den Vektor $(1, 2, 3)^t$ für $\alpha = 0$ als Linearkombination bezüglich dieser Basis dar.

b) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 *Vektorräume*

a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind:

i) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$
ii) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$
iii) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$

b) Untersuchen Sie, ob durch die folgenden Einschränkungen Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums P_n der Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ vom Grad $\leq n$, mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, definiert werden:

i) Grad $p = n$
ii) $a_k \in \mathbb{Z}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$
iii) p ist gerade

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) $U \cup V$ ist genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.
ii) Die Menge

$$U + V := \{u + v | u \in U, v \in V\}$$

ist der kleinste Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der U und V enthält.