Vortragsübung 5

Aufgabe 1 *Projektionen*

a) Gegeben seien eine Gerade $U \subset \mathbb{R}^3$ und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ durch:

$$U := \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

ii) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von x auf U.

iii) Bestimmen Sie den Abstand von x zu U.

iv) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung P der Orthogonalprojektion auf U bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1 = (-3, 4, 0)^T$, $u_2 = (4, 3, 12)^T$ orthogonal im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind und ergänzen Sie die beiden Vektoren zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.
Stellen Sie den Vektor $v = (29, 103, 35)^T$ bezüglich dieser Orthonormalbasis dar.

Aufgabe 2 *Determinanten*
Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & 0 & 5 \\ -2 & t & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $\det(A_t)$.

b) Berechnen Sie $\det(2A_t^4 A_t^\top A_t^{-3})$.

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A_t x = 0$ nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 *Projektionen II*
Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $n \in \mathbb{N}$, eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$.

a) Zeigen Sie, dass $I - P$ auch eine Projektion ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt $\ker(P) = \operatorname{Bild}(I - P)$ und $\operatorname{Bild}(P) = \ker(I - P)$.