Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 6

Aufgabe 1 *Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung*

a) Bestimmen Sie für die folgende Matrix M Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Matrix S_1 an, so dass $S_1^{-1} M S_1$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S_2 an, so dass $S_2^\top M S_2$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Berechnen Sie M^{-1} unter Verwendung der Teilaufgabe c).

Aufgabe 2 *Eigenwerte und Eigenvektoren II*

a) Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Geben Sie für die folgenden Matrizen jeweils einen Eigenwert an:

$$A^2, \quad A^m, \quad A^{-1} \text{ (falls } \det(A) \neq 0\text{)},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$.

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix C_α gegeben durch

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha & 2(1+\alpha) \\ 0 & 2(1+\alpha) & 1-4\alpha \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von C_0.

ii) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von C_0 für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auch ein Eigenvektor von C_α ist. Verwenden Sie dies, um alle Eigenwerte von C_α zu bestimmen.

Aufgabe 3 *Spezielle Matrizen*

a) Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = -1$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Eigenwert der Matrix A ist $\nu_3 = 0$. Berechnen Sie folgendes Produkt:

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Entscheiden Sie, ob die quadratische Form $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(x) = x^\top \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$ positiv definit ist.

c) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matritzen? Zeigen Sie Ihre Aussage.