Vortragsübung 9

Aufgabe 1 *Hurwitz-Kriterium für 2×2 Matrizen*

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f und $\det(H_f(x_0)) < 0$, dann ist x_0 ein Sattelpunkt der Funktion f.

b) Wenden Sie das Kriterium auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 5,$$

an.

Aufgabe 2 *Extrema I*
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y$.

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 3 *Mehrdimensionaler Satz von Taylor*
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{x-y}\cos(x)\sin(y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $(0, 0)$,

a) indem Sie Gradienten und Hesse-Matrix bestimmen.

b) mittels der Taylor-Reihen der verwendeten elementaren Funktionen in einer Dimension.

Aufgabe 4 *Extrema II*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^3 - 8y^2 + 8xy + 6x^2 - 16y - 8x.$$

a) Bestimmen Sie die einzige kritische Stelle $z = (x_0, y_0)$ von f.

b) Stellen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung von f um z fest, ob in z ein lokales Maximum/Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.