Vortragsübung 12

Aufgabe 1 *Parametrisierungen*

a) Finden Sie eine Parametrisierung der Kurve, die sich als Schnittmenge der Ebene $E: \, x + 2y + 4z = 4$ mit dem parabolischen Zylinder $x^2 + 4y = 4$ in $\mathbb{R}^3$ ergibt.

b) Parametrisieren Sie außerdem die Schnittkurve der Ebene E mit dem elliptischen Zylinder $x^2 + 4y^2 = 4$ in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 *Kurvenlänge*

a) Ein Drahtseil mit konstanter Massendichte wird an zwei Enden fixiert. Sein Durchhang in einem homogenen Gravitationsfeld wird durch eine Kettenlinie beschrieben:

$$f_a(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \text{wobei } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die Länge eines Drahtseilstückes, das in den Punkten $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ befestigt ist, in Abhängigkeit von a.

b) Ist die Kurve $c : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

rektifizierbar?

Aufgabe 3 *Kurvenintegrale*

a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x, y) = (y^2, 1)^T$ und eine Familie von Kurven

$$\gamma_\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^\sigma \end{pmatrix},$$

für $\sigma \geq 0$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_\sigma} \langle v(X), dX \rangle$$

in Abhängigkeit von σ.

b) Berechnen Sie nun

$$\int_{\gamma_\sigma} \langle w(X), dX \rangle$$

mit dem Vektorfeld $w(x, y) = (x^2, 1)^T$. Begründen Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 4 *Von Kurve umschlossene Fläche*

Bestimmen Sie den von der Astroide

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

umschlossenen Flächeninhalt.