Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
N. Gauß M.Sc., D. Maier M.Sc.

Vortragsübung 13

Aufgabe 1 *Potentiale*
In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ sei das folgende Vektorfeld gegeben:

$$v_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^T \mapsto (2x, 3z^2 + z, 1 + 6yz + by)^T.$$

a) Für welche Werte b besitzt v_b ein Potential? Wenn möglich, berechnen Sie ein solches.

b) Ferner sei durch

$$C : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2\sin(t), \cos(2t), \cos(t))^T$$

eine Kurve definiert. Berechnen Sie

$$\int_C \langle v_b(X), dX \rangle$$

für $b = 0$ und $b = 1$.

Aufgabe 2 *Offen, abgeschlossen, kompakt*

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen, welche abgeschlossen? Welche sind sogar kompakt?

i) $\{5\}$,
ii) $(0, 1]$,
iii) $\mathbb{N}$,
iv) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen? Welche sind sogar kompakt?

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 2\}$,
iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2, y \leq 3\}$.

Aufgabe 3 *Vereinigung abgeschlossener Mengen*
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $U_1, U_2, ... \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

b) Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 *Wahr oder falsch?*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jede stetige Funktion nimmt ein Minimum und ein Maximum auf der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\}$$

an.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $U \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, dann ist auch

$$f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \in U\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $U \subset \mathbb{R}$ kompakt, dann ist auch

$$f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \in U\}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.