FAQs #4

Hessesche Normalform

Sie wissen schon aus der Schule, dass Sie eine durch drei verschiedene Punkte A, B, C in $\mathbb{R}^3$ gegebene Ebene

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = \vec{OA} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

auch mithilfe eines beliebigen Normalenvektors n an E (zum Beispiel $n := \vec{AB} \times \vec{AC}$) beschreiben können:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x - a\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x\rangle - \langle n, a\rangle = 0\},$$

wobei $a := \vec{OA}$.

Für manche Zwecke ist es nun günstig n zu normieren, $n_0 := \frac{n}{|n|}$, und darüberhinaus dasjenige Vorzeichen zu wählen $n^* = \pm n_0$, für das $\langle n^*, a\rangle \geq 0$. Auf diese Weise erhält man die *hessesche Normalform (Standardform) von* E,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n^*, x - a\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n^*, x\rangle - p = 0\},$$

wobei $p := \langle n^*, a\rangle$. In der Schule haben Sie wahrscheinlich die Vorzeichenbedingung $\langle n^*, a\rangle \geq 0$ nicht gestellt (sondern nur die Normierungsbedingung), deshalb ein paar Anmerkungen dazu:

- Die Vorzeichenbedingung $\langle n^*, a\rangle > 0$ bedeutet: Sie wählen das Vorzeichen so, dass Sie die Ebene durchstoßen, wenn Sie vom Ursprung O aus in Richtung n^* gehen (und dass Sie die Ebene nicht durchstoßen, wenn Sie vom Ursprung O aus in Richtung $-n^*$ gehen), mit anderen Worten: der Vektor n^*, angeheftet in irgendeinem Punkt der Ebene, weist vom Ursprung weg

- Die angesprochene Vorzeichenbedingung ist unabhängig vom speziellen Punkt $a \in E$: wenn $\langle n, a\rangle$ nichtnegativ ist, dann ist $\langle n, x\rangle = \langle n, x - a\rangle + \langle n, a\rangle = \langle n, a\rangle$ nichtnegativ für *alle* $x \in E$

- Durch die Orthogonalitätsbedingung $\langle n^*, x - a\rangle = 0$, die Normierungsbedingung $|n^*| = 1$ und die Vorzeichenbedingung $\langle n^*, a\rangle \geq 0$ ist n^* eindeutig bestimmt – es sei denn O liegt in E (dann erfüllen *beide* normierte Normalenvektoren $\pm n_0$ an E die Vorzeichenbedingung: $\langle \pm n_0, a\rangle = 0 \geq 0$).

Der Vorteil an der hesseschen Standardform einer Ebene E ist, dass Sie beispielsweise mühelos den Abstand eines beliebigen Punktes P von der Ebene E ausrechnen können: $d(P, E) = |\langle n^*, \vec{OP} - a\rangle| = |\langle n^*, \vec{AP}\rangle|$ (Schule!) oder dass Sie am Vorzeichen von $\langle n^*, \vec{OP} - a\rangle$ ablesen können, ob der Punkt P und der Ursprung O auf derselben Seite von E liegen oder nicht: wenn $\langle n^*, \vec{OP} - a\rangle > 0$, dann liegen P und O nicht auf derselben Seite von E (weil dann – nach der Definition von Winkeln zwischen Vektoren – die Vektoren n^* und $\vec{OP} - a = \vec{AP}$ einen spitzen Winkel bilden und weil wegen der Vorzeichenwahl n^* vom Ursprung wegweist), und wenn $\langle n^*, \vec{OP} - a\rangle < 0$, dann liegen P und O auf derselben Seite von E.