Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 02

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Wahr oder Falsch)

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an. Es ist möglich, dass in einer Teilaufgabe keine oder mehrere Aussagen richtig sind.

a) Der Realteil einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] ist imaginär
[ ] kann negativ sein [ ] ist nie gleich Null

b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl

[ ] ist imaginär [ ] kann negativ sein [ ] ist reell

c) Der Betrag einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null
[ ] ist größer oder gleich Null [ ] ist eindeutig bestimmt

d) Das Argument einer komplexen Zahl

[ ] ist reell [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null
[ ] ist größer oder gleich Null [ ] ist eindeutig bestimmt

e) Der Imaginärteil einer reellen Zahl

[ ] ist gleich Null [ ] existiert nicht

f) Der Betrag einer reellen Zahl

[ ] ist die reelle Zahl selber [ ] ist größer oder gleich Null

g) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl

[ ] ist die imaginäre Zahl selber [ ] ist die imaginäre Zahl geteilt durch i

h) Der Betrag einer imaginären Zahl

[ ] ist gleich Null [ ] existiert nicht

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

a) Stellen Sie die komplexe Zahl $\dfrac{2+i}{1-i}$ in der Form $a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ dar.

b) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$i) \qquad z_1 = \overline{(3+2i)}(2-i)^2(1-i)^2, \qquad ii) \qquad z_2 = \frac{2+i}{3-i} + \left(\frac{5+2i}{3i}\right)^{-1}.$$

c) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z+i) < 4 + 3\mathrm{Re}(z) \wedge |z+i-1| \geq 1\}.$$

Aufgabe 3 (Körper)

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $b,d \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome:

a) $(-a)\cdot(-b) = a \cdot b$.

b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

Aufgabe 4 (Gruppen)

Es sei $G := \{e,a,b,c\}$ eine Menge mit 4 paarweise verschiedenen Elementen. Füllen Sie die folgende Tabelle so aus, dass G zusammen mit der Abbildung $*\colon G \times G \to G$ eine Gruppe ist mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ die Gleichung $g^2 = e$ gilt, wobei e das neutrales Element ist. Begründen Sie kurz.

$*$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)**]

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von $(1-\sqrt{3}i)^{2017}$.

b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$M := \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \text{ und } \tfrac{2}{3}\pi < \arg\left(ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right) < \tfrac{3}{4}\pi\right\}.$$

c) Seien $x,y,z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$(-x)\cdot(y-z) = -x\cdot y + x \cdot z.$$

Verwenden Sie die Gesetze aus Aufgabe 3.