



## Gruppenübung 03

### Aufgabe 1 (Polynome)

- a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- i) Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.
  - ii) Jedes Polynom  $n$ -ten Grades hat  $n$  verschiedene Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .
- b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Polynome

$$p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 61x + 28, \quad q(x) = x^3 - x^2 + 2,$$

in kartesischen Koordinaten, d.h. in der Form  $x = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Hinweis: Die Polynome  $p$  und  $q$  besitzen mindestens eine ganzzahlige Nullstelle.

### Aufgabe 2 (Gleichungen)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:
- i)  $z - 4 = (3 - 2z)i$ ,    ii)  $z^2 + (2 + 2i)z + 1 + 2i = 0$ ,    iii)  $\bar{z}^4 - (1 - i)\bar{z}^2 - i = 0$ .
- Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten an.

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in Polar-Koordinaten, d.h. in der Form  $z = re^{i\varphi}$ ,  $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , als auch in kartesischen Koordinaten an. Geben Sie außerdem alle komplexen Nullstellen des Polynoms  $p(z) = (z - 2)^4 + 2 - 2\sqrt{3}i$  in kartesischen Koordinaten an.

### Aufgabe 3 (Pythagoras)

- a) Zeigen Sie, dass für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Hinweis: Stellen Sie  $z$  und  $w$  in kartesischen Koordinaten dar.

- b) Seien  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

#### Aufgabe 4 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 8 = 0.$$

Geben Sie die Lösung sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$4z^3 = \bar{z},$$

in kartesischen Koordinaten.

- c) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$q(z) = z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 22z + 12,$$

in kartesischen Koordinaten.

Hinweis:  $1 + i$  ist eine Nullstelle des Polynoms  $q$ .