



## Gruppenübung 04

### Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen)

a) Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

i)  $y''(x) + 3y(x) = 0$ ;

ii)  $y'''(x) - 2y''(x) + 5y'(x) = 0$ ;

iii)  $y'(x) + y(x) = xe^x$ ;

iv)  $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 2x^2 + 1$ .

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t), \quad (1)$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Parameter  $\alpha, \beta$  und die Funktion  $f$  in dem Fall, dass die Gleichung (1) die Lösungen

$$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^2 + e^{2t}, \quad y_3(t) = 1 + t^2 + e^{2t},$$

besitzt.

### Aufgabe 2 (Anfangswertprobleme)

Bestimmen Sie die reellen Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme

i)  $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0$  mit  $y(0) = y'(0) = 0$  und  $y''(0) = 2$ ;

ii)  $y''''(x) - y(x) = 0$  mit  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ ;

iii)  $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \cos(2x)$  mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = \frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme  $Ax = b_1$  und  $Ax = b_2$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2t & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie für jedes der beiden Gleichungssysteme, für welche Werte von  $t$  das jeweilige Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems  $Ax = b_2$  für  $t = 0$  an.

#### Aufgabe 4 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Bestimmen Sie die Lösung von

$$y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = e^{-2t}.$$

b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + tx_3 &= 1 \\-x_1 + x_2 &= 0 \\3x_1 - tx_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

mit Parameter  $t \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie, für welche Werte von  $t$  das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, für welche Werte von  $t$  das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt und für welche Werte von  $t$  das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Bestimmen Sie außerdem alle Lösungen (in Abhängigkeit von  $t$ ).