Gruppenübung 05

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + (\alpha - 1)x_2 + (\beta + 2)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von den Werten der Parameter α und β, ob das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt, und bestimmen Sie alle Lösungen (in Abhängigkeit von α und β).

Aufgabe 2 (Geometrie im dreidimensionalen Raum)

a) Bestimmen Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, der auf den Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

senkrecht steht.

b) Gegeben sei das Dreieck Δ in $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Innenwinkel von Δ bei A sowie den Flächeninhalt von Δ.

c) Gegeben seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ für alle } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j.$$

Zeigen Sie, für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0,$$

gilt $c_1, c_2, c_3 = 0$.

Aufgabe 3 (Geometrie im dreidimensionalen Raum)
Gegeben seien Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit $||a|| = ||b|| = 1$ und $\angle(a, b) = 60°$.

a) Welchen Winkel schließen die Vektoren $a + b$ und $2b - a$ ein?

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren $a + b$ und $2b + \lambda a$ senkrecht aufeinander?

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von a, b aufgespannten Parallelogramms P.

Aufgabe 4 [**Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)**]

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 7x - 2y + 6z + w &=& 0 \\ x - y + z &=& 0 \\ y - 2z + w &=& 0 \\ x + z + w &=& 1 \end{array}$$

unter Verwendung des Gaussalgorithmus.

b) Gegeben sei das Dreieck Δ mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Innenwinkel von Δ bei A, die Länge der Seiten von Δ, sowie den Flächeninhalt von Δ.

c) Zeigen Sie, für alle Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt die Parallelogrammidentität

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$