Gruppenübung 08

Aufgabe 1 (Mengen)

a) Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, \{a\}, \{3, 4, 5\}\}$. Welche der folgenden Objekte sind Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$?

$$1, \quad 3, \quad a, \quad \{a\}, \quad \{1\}, \quad \{\{3,4\}\}, \quad \{2,5\}, \quad \{\{a\},\{3,4,5\}\}, \quad \{\{a\},\{3,4,5\},3\}.$$

b) Die Mengen A, B, C seien Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Die Bedingungen einer Teilaufgabe an die Mengen gelten auch für alle späteren Teilaufgaben.

i) $A \cap B = \emptyset$ und für alle $n \in A \cup B$ gilt $n \leq 10$. Wieviele Elemente kann A maximal haben?

ii) Alle $n \in C$ erfüllen $n \geq 5$ und die Anzahl von $A \cap C$ sei gleich der Anzahl von $B \cap C$. Wieviele Elemente kann $A \cap C$ maximal haben?

iii) Seien $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ und $C = \{5, 6\}$. Bestimmen Sie die Menge $M_B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die alle noch möglichen Mengen B enthält.

iv) Wählen Sie ein $B \in M_B$. Bestimmen Sie für diese Wahl die Menge $B \times C$.

Aufgabe 2 (Ungleichungen)

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Ordnungsaxiome die folgenden Ungleichungen:

i) $$0 \leq a < b \implies a^2 < b^2,$$
ii) $$b \geq 0 \wedge a^2 < b^2 \implies a < b,$$
iii) $$a < b \wedge c < 0 \implies ac > bc,$$

Geben Sie jeweils die verwendeten Axiome an.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden, reellen Ungleichung:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{|x-4|}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}.$$

Aufgabe 3 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)
Sei $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}.$$

a) Weisen Sie nach, dass f injektiv ist.

b) Bestimmen Sie den genauen Wertebereich $I = f(\mathbb{R}_0^+)$ und, da f als Funktion $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow I$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

c) Weisen Sie nach, dass g weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 4 [**Schriftliche Aufgabe 8 Punkte**]

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden, reellen Ungleichung:

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

b) Weisen Sie nach, dass

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \text{ ist ein Vielfaches von } 7,$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. In wie viele Äquivalenzklassen zerlegt die Äquivalenzrelation $\sim$ die Menge $\mathbb{Z}$?

c) Seien L, M und N drei Mengen. Beweisen Sie, dass die De Morgansche Regel

$$L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$$

gilt.

d) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom n-ten Grades mit $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass p surjektiv ist. Ist p auch injektiv?

Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra.