Gruppenübung 10

Aufgabe 1 (Rekursive Folgen I)
Sei $a > 0$. Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Argumentieren Sie dazu, dass dieser gegeben ist durch eine Lösung der Gleichung

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Aufgabe 2 (Rekursive Folgen II)
Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{n^2 + 4n + 1}{n^3 + 8} x_n \qquad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Hinweis: Benützen Sie die Grenzwertsätze.

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit)
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen und geben Sie ggf. an, wo sie nicht existiert. Sie dürfen dabei die Differenzierbarkeit von Polynomen, sowie Wurzelfunktionen als gegeben voraussetzen und die Formeln für die Ableitung dieser Funktionen ohne Beweis verwenden.

a) $f_1(x) = |x|$, b) $f_2(x) = x|x|$, c) $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$.

Aufgabe 4 (Differentiation)

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f_1(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{1+x^2} + 3\cosh^2(x) + \ln(1+x^2)}$

ii) $f_2 :\ (-2,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ f_2(x) = \frac{(2-x)\,e^x}{2+x} + \frac{(2-\cos(x))\,e^{\cos(x)}}{2+\cos(x)}$

iii) $f_3 :\ (1,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ f_3(x) = \ln\left(\ln(x) + \ln(2\sqrt[8]{x})\right)$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen die Ableitung von $g(x) = \arccos(x)$.

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$x_1 = 7, \qquad x_{n+1} = \sqrt{7+2x_n} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen den Wert für $(f^{-1})'(f(1))$ für die Funktion $f(x) = x + x^3$.

c) Sei gegeben $f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, wobei I das größtmögliche Intervall mit $1 \in I$, auf dem f differenzierbar ist. Geben Sie I an und berechnen Sie die Ableitung von f.

d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g in $(\sqrt{3}, g(\sqrt{3}))$.