Gruppenübung 12

Aufgabe 1 (Häufungspunkte, Limes superior, Limes inferior)

a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und Limes inferior der folgenden reellen Folgen:

i) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}$ ii) $a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 2018, \\ n^{-1}, & n < 2018. \end{cases}$

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt, ihren Grenzwert, besitzt und beschränkt ist.

Bemerkung: In der Votragsübung wird die Umkehrung dieser Aussage bewiesen:

"Eine Folge ist konvergent, wenn sie beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt besitzt."

Aufgabe 2 (Cauchyfolgen)
Betrachten Sie die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|.$$

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+1} - x_n| = 2^{-n}.$$

c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und argumentieren Sie dann, dass die Folge konvergent ist. Können Sie ihren Grenzwert bestimmen?

Aufgabe 3 (Reihen I)

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k + 5}{4^k}.$$

b) Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

konvergent oder sogar absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Reihen II)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, 2^{-n}$$

konvergent ist.

b) Sei die reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{1}{k+1}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent oder sogar absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.