# Vortragsübung 5

**Aufgabe 1** *Logik*

a) Formulieren Sie die folgenden Sätze in formaler mathematischer Sprache, das heißt ausschließlich mit Hilfe von mathematischen Zeichen:

1.) Für alle Elemente $x$ der Menge $A$ gibt es ein $y$ aus der Menge $B$, so dass gilt: die Differenz von $x$ und $y$ ist fünf und das Produkt von $x$ und $y$ ist negativ.

2.) Die Menge $L$ setzt sich aus allen natürlichen Zahlen zusammen, für die das Doppelte ihres Wertes kleiner als zehn oder das Dreifache ihres Wertes größer als zweihundert ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitswertetafel, dass das Distributivgesetz:

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

immer wahr ist.

c) Bilden Sie die Negationen folgender Aussagen ohne Verwendung des Zeichens $\neg$:

1.) Wenn es regnet, dann sind alle Straßen nass.

2.) Es gibt einen Menschen, der kein Mathe mag.

3.) $\forall x_0 \in D \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

**Aufgabe 2** *Vollständige Induktion*

a) Beweisen Sie den *Binomischen Lehrsatz*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

durch vollständige Induktion.
*Hinweis*: Sie dürfen dabei ohne Nachweis die Pascalsche Regel

$$\forall m \in \mathbb{N} \, \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k < m : \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

verwenden. (vgl. Gruppenübung 07 Aufgabe 4a))

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$7^n - 1 \text{ ist durch 6 teilbar für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Was halten Sie von folgendem Beweis? Wo genau steckt der Fehler?

Aussage: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Induktionsanfang: $1 = 1$, 1 ist zu sich selber gleich: Richtig!
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte

$$1 = 2 = 3 = \ldots = n \qquad (*)$$

Induktionsbehauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 = 2 = 3 = \ldots = n = n + 1$
Induktionsschritt:
Durch Addition von 1 ergibt sich:

$$(*) \Longleftrightarrow 2 = 3 = 4 = \ldots = n = n + 1. \qquad (**)$$

Aus $(*)$ folgt außerdem:

$$1 = 2. \qquad (***)$$

Aus $(**)$ und $(***)$ folgt

$$1 = 2 = 3 = 4 = \ldots = n = n + 1.$$

$\square$