Vortragsübung 8

Aufgabe 1 *Rekursive Folgen*
Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 2 *Differenzierbarkeit*
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion und geben Sie ggf. an, wo sie nicht existiert. Sie dürfen dabei die Differenzierbarkeit von Polynomen als gegeben voraussetzen und die Formeln für die Ableitung von Polynomen ohne Beweis verwenden.

$$f(x) = \left|x^3 - x^2\right|.$$

Aufgabe 3 *Differentiation*

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

   (i) $f_1 : (-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \to \mathbb{R}\,,\; f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$,

   (ii) $f_2 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\,,\; f_2(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2017}$,

   (iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; f_3(x) = \sqrt[7]{\cosh^5(-3x) + 2}$,

   (iv) $f_4 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,,\; f_4(x) = \ln\left(e^{3x}\sin(2x)\right)$,

   (v) $f_5 : (1,\infty) \to \mathbb{R}\,,\; f_5(x) = \ln\left(\ln(5\sqrt[3]{x}) + \ln(2\sqrt{x})\right)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen die Ableitung von $g(x) = \operatorname{arsinh}(x)$.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen den Wert für $(f^{-1})'(f(2))$ für die Funktion $f(x) = 3x + \frac{1}{4}x^5$.

b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{e^{-2x}}{(1+x^2)^{10}}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g in $(0, g(0))$.