



Vortragsübung 9

Aufgabe 1 Regeln von de l'Hôpital

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hôpital:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Warum liefert die Regel von de l'Hôpital hier ein falsches Ergebnis:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 4}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{2} = 3?$$

Wie lautet der Grenzwert tatsächlich?

Aufgabe 2 Taylorentwicklung

Gegeben sei die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, 1)$.

b) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\sup_{x \in [1, 1.1]} |f(x) - T_3(f, x, 1)| \leq \frac{25}{12} \cdot 10^{-4}.$$

Aufgabe 3 Satz von Rolle

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 7x - 10,$$

genau eine Nullstelle besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Rolle und die Aufgabe 1a)i) der Gruppenübung 03.

Aufgabe 4 Mittelwertsatz

Sei $r > 1$ und $x > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$(1+x)^r > 1+rx.$$