Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 11

Aufgabe 1 *Konvergenzkriterien für Reihen*
Untersuchen die Reihen

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}, \quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

auf Konvergenz oder Divergenz.
Hinweis: Wir wissen bereits, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 2 *Absolute Konvergenz I*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie.

a) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert die Folge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$.

c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|$.

Aufgabe 3 *Absolute Konvergenz II*
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^{\alpha}$$

konvergent bzw. absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 *Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium*
Wir betrachten die Folge

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^k}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass man mit dem Quotienkriterium keine Entscheidung über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ treffen kann, mit dem Wurzelkriterium dagegen schon.