C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} 5^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 68. *Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren. Verwenden Sie jeweils eine Majorante, eine Minorante oder das Grenzwertkriterium.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3-3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-x-1}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 69. *Modell: Sattelfläche als Funktionsgraph (hyperbolisches Paraboloid)*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto x_2^2 - x_1^2$. Das vorliegende Modell ist ein Ausschnitt des Graphen von f. Dargestellt ist der Bereich $(x_1,x_2) \in [-1,1]\times[-1,1]$.

(a) Bei welchen der farbigen Linien handelt es sich um achsenparallele Schnitte? Welche entsprechen Niveaulinien?

(b) Die dargestellten Niveaulinien sind Quadriken. Welche Gestalt haben diese jeweils? Kann es eine Niveaulinie von einer weiteren Gestalt geben?

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $N_t := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2) = t\}$ die Niveaumenge von f zum Niveau t. Für welche Werte t ist N_t im Modell dargestellt?

(d) Skizzieren Sie fünf verschiedene Niveaumengen N_t zu Niveaus $t \in [-2,2]$ in ein ebenes Koordinatensystem.

Aufgabe P 70. *Integration von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x)$.
Hinweis: Schreiben Sie $n = (n+1)-1$ und verwenden Sie Beispiel 3.8.8.

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 84. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t$ in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe H 85. *Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2-x-1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 86. *Integralkriterium*

Untersuchen Sie das Integral $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}\,x$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ für

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{2\pi x\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x)}{x^2}$

auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Werte.

Aufgabe H 87. *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*

Für $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $f_{r,s}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto rx_1^2 + sx_2^2$.
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $N_t(r,s)$ die Niveaumenge von $f_{r,s}$ zum Niveau t.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f_{-1,1}$ dar. Dargestellt ist der Bereich $(x_1,x_2) \in [-1,1] \times [-1,1]$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Zeichnen Sie für $(r,s) \in \{(1,0),(-4,1),(1,4)\}$ jeweils die Niveaumengen $N_t(r,s)$ für $t \in \{-4,0,4\}$.

(b) Bestimmen Sie die Gestalt des Graphen $\Gamma(f_{r,s})$ in Abhängigkeit von $(r,s) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f_{r,s}$ folgenden achsenparallelen Schnitt besitzt:
$\big\{(1,x_2,f_{r,s}(1,x_2)) \,\big|\, x_2 \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(1,u-1,u^2-2u+3) \,\big|\, u \in \mathbb{R}\big\}$.