

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 31. Modell: Kegelschnitte

Sei  $\mathcal{Q}$  der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ ; im Modell dargestellt ist der Bereich  $-\frac{7}{2} \leq x_1, x_2, x_3 \leq \frac{7}{2}$ . Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen  $x_1 + 2x_3 = 3$  (gelb),  $x_1 - x_3 = 1$  (blau) und  $x_1 = 1$  (grün).

- (a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?
- (b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?
- ein Punkt    • genau eine Gerade    • ein Paar schneidender Geraden
  - ein Kreis    • die leere Menge    • ein Paar paralleler Geraden

### Aufgabe P 32. Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)

Die Sattelfläche ist die Quadrik  $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$ ; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt  $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ .

- (a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?
- (b) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?
- (c) Die schwarz ( $x_3 = 0$ ) und gelb ( $|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$ ) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie anhand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.
- (d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?
- ein Punkt    • Parabel    • leere Menge    • schneidendes Geradenpaar
  - Ellipse    • Hyperbel    • genau eine Gerade    • paralleles Geradenpaar

### Aufgabe P 33. Ebene Quadriken

Im  $\mathbb{R}^2$  seien bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$  folgende Quadriken gegeben.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 10 = 0\} \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_2 + 2 = 0\} \end{aligned}$$

Führen Sie folgende Schritte für  $j = 1$  und  $j = 2$  durch.

Geben Sie von  $\mathcal{Q}_j$  die Matrixbeschreibung an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von  $\mathcal{Q}_j$ . Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem  $\mathbb{F}_j$  an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird. Geben Sie  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_j}$  und  ${}_{\mathbb{F}_j}\kappa_{\mathbb{E}}$  an. Skizzieren Sie  $\mathcal{Q}_j$  in das Standardkoordinatensystem.

**Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 31.** Ebene Quadriken

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + -\sqrt{3}x_1 - 2(1 - \sqrt{3}\sqrt{7})x_2 + \sqrt{7} + 7 = 0 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie die euklidische und die affine Normalform von  $\mathcal{Q}$ .
- (b) Geben Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{F}$  an, bezüglich dessen  $\mathcal{Q}$  diese euklidische Normalform hat.
- (c) Bestimmen Sie  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$  und  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ .
- (d) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskordinatensystem.

**Aufgabe H 32.** Quadriken im  $\mathbb{R}^3$ 

Gegeben sei die Quadrik  $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 4x_3 - 3 = 0\}$ .

- (a) Bestimmen Sie den Typ von  $\mathcal{Q}$  mittels der erweiterten Matrix.
- (b) Bestimmen Sie die euklidische und affine Normalform und die Gestalt von  $\mathcal{Q}$ .
- (c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem  $\mathbb{F}$ , bezüglich dessen  $\mathcal{Q}$  diese euklidische Normalform hat.
- (d) Bestimmen Sie  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$  und  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ .

**Aufgabe H 33.** Quadrik (Onlineübung 10)

Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfolgt online über die Website zu den Gruppenübungen:

<http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HMing-MINT/onlineuebungen/>

*Hinweis:*

Die Lösungen sind als **Dezimalzahlen mit** arabischen Ziffern und einem **Dezimalpunkt ohne** die Benutzung von **Sonderzeichen** (wie z. B. Klammern oder Operatoren wie \*, /) einzutragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums sind beliebig viele Abgaben möglich, wobei die letzte Abgabe gewertet wird.