

Präsenzübungen

Aufgabe P 31. Modell: Kegelschnitte

Sei \mathcal{Q} der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leq x_1, x_2, x_3 \leq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

- (a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?
- (b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?
- ein Punkt • genau eine Gerade • ein Paar schneidender Geraden
 - ein Kreis • die leere Menge • ein Paar paralleler Geraden

Aufgabe P 32. Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)

Die Sattelfläche ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

- (a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?
- (b) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?
- (c) Die schwarz ($x_3 = 0$) und gelb ($|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie anhand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.
- (d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?
- ein Punkt • Parabel • leere Menge • schneidendes Geradenpaar
 - Ellipse • Hyperbel • genau eine Gerade • paralleles Geradenpaar

Aufgabe P 33. Ebene Quadriken

Im \mathbb{R}^2 seien bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} folgende Quadriken gegeben.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 10 = 0\} \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_2 + 2 = 0\} \end{aligned}$$

Führen Sie folgende Schritte für $j = 1$ und $j = 2$ durch.

Geben Sie von \mathcal{Q}_j die Matrixbeschreibung an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von \mathcal{Q}_j . Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F}_j an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird. Geben Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_j}$ und ${}_{\mathbb{F}_j}\kappa_{\mathbb{E}}$ an. Skizzieren Sie \mathcal{Q}_j in das Standardkoordinatensystem.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 31.** Ebene Quadriken

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + -\sqrt{3}x_1 - 2(1 - \sqrt{3}\sqrt{7})x_2 + \sqrt{7} + 7 = 0 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie die euklidische und die affine Normalform von \mathcal{Q} .
- (b) Geben Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} an, bezüglich dessen \mathcal{Q} diese euklidische Normalform hat.
- (c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.
- (d) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskordinatensystem.

Aufgabe H 32. Quadriken im \mathbb{R}^3

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 4x_3 - 3 = 0\}$.

- (a) Bestimmen Sie den Typ von \mathcal{Q} mittels der erweiterten Matrix.
- (b) Bestimmen Sie die euklidische und affine Normalform und die Gestalt von \mathcal{Q} .
- (c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem \mathbb{F} , bezüglich dessen \mathcal{Q} diese euklidische Normalform hat.
- (d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe H 33. Quadrik (Onlineübung 10)

Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfolgt online über die Website zu den Gruppenübungen:

<http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HMing-MINT/onlineuebungen/>

Hinweis:

Die Lösungen sind als **Dezimalzahlen mit** arabischen Ziffern und einem **Dezimalpunkt ohne** die Benutzung von **Sonderzeichen** (wie z. B. Klammern oder Operatoren wie *, /) einzutragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums sind beliebig viele Abgaben möglich, wobei die letzte Abgabe gewertet wird.