# Eigenvektoren bei linearen Abbildungen

Markus Stroppel

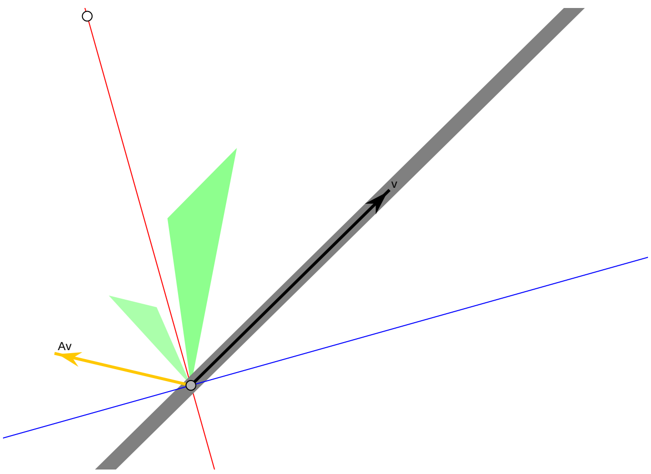
In den folgenden Darstellungen wird jedes Mal eine lineare Abbildung (beschrieben durch eine Matrix $A$, $B$, $C$ oder $D$) veranschaulicht. Einerseits zeigen wir einen (schwarzen) Vektor $v$ und seinen gelben Bild-Vektor, andererseits ist auch jeweils ein blassgrünes Dreieck samt seinem Bild zu sehen. Der von $v$ aufgespannte eindimensionale Unterraum ist durch eine *sehr* breite graue Gerade angedeutet.

In der interaktiven HTML-Version[1]können Sie mit der Maus den schwarzen Vektor $v$ bewegen (fassen Sie ihn dazu ganz an der Spitze an): Dabei bewegt sich der Bildvektor mit.

## 1 Spiegelung kombiniert mit Streckung

Der schwarze Vektor $v$ wird auf den gelben Vektor $Av$ abgebildet, indem er an der dünnen roten Linie gespiegelt und dann auch noch mit dem Faktor $1/2$ multipliziert wird.

Dies ist eine lineare Abbildung; in einem Koordinatensystem, dessen Achsen durch die rote und die blaue Gerade gebildet werden, wird diese Abbildung durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $1/2$ und $-1/2$ beschrieben.




Wenn man den schwarzen Vektor so dreht, dass er auf die rote Linie zu liegen kommt, fällt auch der Bildvektor $Av$ in diese Linie. Er zeigt dann in die gleiche Richtung wie der schwarze, ist aber nur halb so lang:

Wir haben damit einen Eigenvektor zum Eigenwert $1/2$ gefunden.

Auch durch Streckung des Vektors $v$ ändert sich nichts an dieser Beziehung (so lange Sie die Richtung beibehalten).

Bewegt man den Vektor $v$ auf die blaue Gerade, so fällt der Bildvektor $Av$ wieder in die von $v$ aufgespannte Gerade, zeigt aber in die umgekehrte Richtung: Jetzt ist $v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-1/2$.

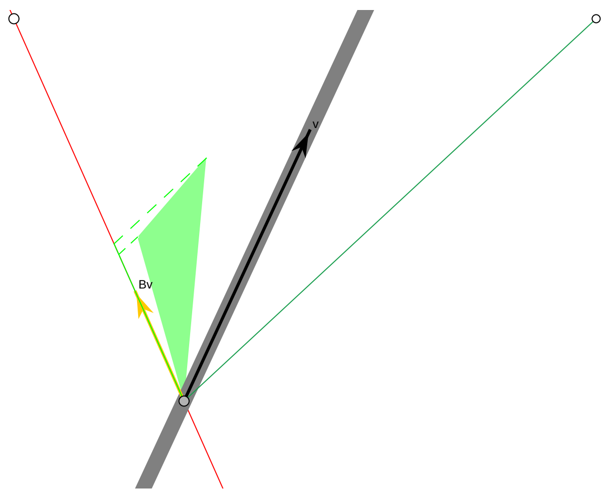
In der interaktiven Version können Sie die rote Gerade ebenfalls bewegen.

Dass hier jeder Eigenvektor zum Eigenwert $1/2$ auf jedem Eigenvektor zum Eigenwert $-1/2$ senkrecht steht, ist ein Zufall (in der Tat eine Folge der Tatsache, dass die Matrix $A$ *symmetrisch* ist).

[1] Diese finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Eigenvektoren/

## 2 Projektion (also eine nicht bijektive Abbildung)

Das folgende Beispiel zeigt eine Abbildung, die $v$ den Vektor $Bv$ zuordnet: Hier wird $v$ entlang der grünen Richtung auf die rote Gerade projiziert[2]. Finden Sie die Richtungen, in die Eigenvektoren zeigen?




Vektoren, die entlang der roten Geraden zeigen, werden bei der Projektion überhaupt nicht verändert:

Das sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Vektoren, die genau entlang der Projektionsrichtung zeigen, sind Eigenvektoren zum Eigenwert 0:

Solche Vektoren werden auf den Nullvektor abgebildet (das ist schwer zu sehen und etwas tüftelig einzustellen).

Wir geben einige Matrix-Beispiele für solche Projektionen:

- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  (Wenn die grüne und rote Gerade die erste bzw. zweite Achse eines kartesischen Koordinatensystems bilden).
- $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$
  (Wenn die rote Gerade aufgespannt wird durch den Vektor $u = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, und die grüne Gerade zur roten senkrecht steht).
- $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$
  (Hier wird die rote Gerade aufgespannt durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die grüne durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; diese Geraden stehen nicht senkrecht zueinander).

Es gibt viele weitere Beispiele für $2 \times 2$-Matrizen mit Eigenwerten 0 und 1. In der Tat sind das genau diejenigen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, bei denen $a + d = 1$ und $ad - bc = 0$ gilt.

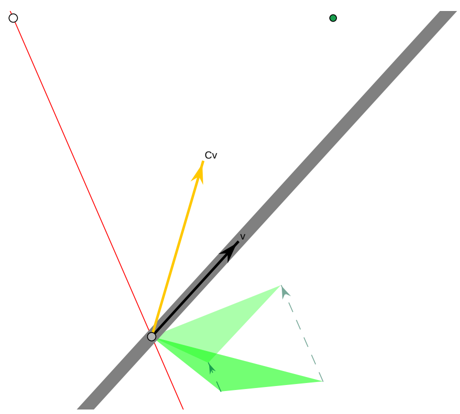
In anderen Worten: Die Spur und Determinante von $B$ müssen die Bedingungen $\mathrm{tr}(B) = 1$ und $\det(B) = 0$ erfüllen. Dies kann auch so formuliert werden:

*Das charakteristische Polynom* $\det(B - \lambda \mathrm{E}_2)$ *von* $B$ *ist gleich* $\lambda^2 - \lambda$.

[2] In der interaktiven HTML-Version können Sie diese Richtungen beide ändern.

# 3 Scherung
# (unterschiedliche algebraische und geometrische Vielfachheit)

Nicht bei jeder linearen Abbildung treten Eigenvektoren mit verschiedenen Richtungen auf:




Hier wird $v$ parallel zur roten Richtung geschert (Sie können die rote Richtung und das Ausmaß der Scherung ändern).

Finden Sie die Richtungen, in die Eigenvektoren zeigen?

Vektoren, die entlang der roten Geraden zeigen, werden bei der Scherung überhaupt nicht verändert:

Das sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Andere Eigenvektoren gibt es hier nicht!

Zu den Matrizen, die solche Scherungen beschreiben, gehören

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
  (die rote Gerade ist hier die zweite Koordinatenachse).
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
  (Die rote Gerade wird aufgespannt durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

Die charakteristische Eigenschaft der Matrizen, die Scherungen beschreiben, ist die Tatsache, dass sie den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 haben, während die geometrische Vielfachheit nur 1 ist.

Es gibt viele weitere Beispiele für 2×2-Matrizen mit dieser Eigenschaft. In der Tat sind das genau diejenigen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die nicht diagonal sind (d.h. mindestens einer der Einträge $b$, $c$ ist von Null verschieden) mit $a + d = 2$ und $ad - bc = 1$.

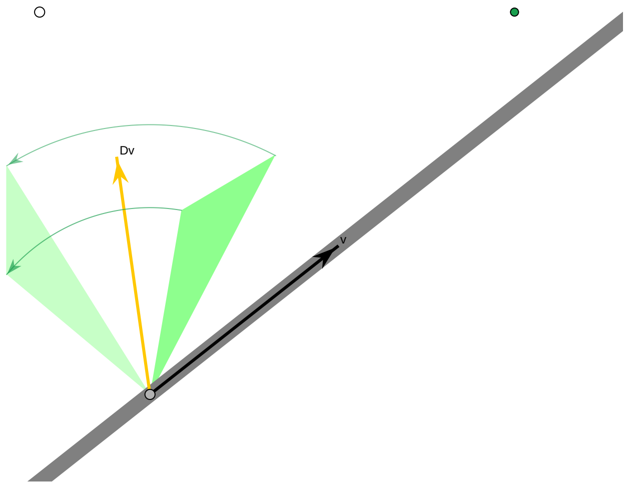
In anderen Worten: Die Spur und Determinante $C$ müssen die beiden Bedingungen $\mathrm{tr}(C) = 2$ und $\det(C) = 1$ erfüllen (und die Matrix ist nicht diagonalisierbar - das bedeutet jetzt einfach $C \neq \mathrm{E}_2$).

Dies kann auch wie folgt formuliert werden:

*Das charakteristische Polynom* $\det(C - \lambda \mathrm{E}_2)$ *von* $C$ *ist gleich* $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$*; aber* $C \neq \mathrm{E}_2$.

## 4 Drehung (keine reellen Eigenwerte)

Schließlich noch ein Beispiel einer linearen Abbildung, die gar keine (reellen) Eigenwerte hat:




Wir drehen $v$.

(In der interaktiven Version können Sie auch den Drehwinkel ändern.)

Finden Sie einen Drehwinkel, zu dem es dann doch Eigenvektoren gibt?

In ihrer Anfangskonfiguration zeigt die Zeichnung eine Drehung um 60° (im Bogenmaß also $\frac{\pi}{3}$) gegen den Uhrzeigersinn. Diese Drehung wird beschrieben durch die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(D - \lambda \mathrm{E}_2) = \lambda^2 - \lambda + 1$; als Eigenwerte finden wir $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Es gibt viele weitere Beispiele von $2 \times 2$-Matrizen ohne reelle Eigenwerte. In der Tat sind das genau diejenigen Matrizen $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, bei denen die charakteristische Gleichung

$$0 = \det(D - \lambda \mathrm{E}_2) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen hat.

Dies geschieht genau dann, wenn die Diskriminante $(a+d)^2 - 4(ad - bc)$ negativ ist; also dann, wenn

$$(a - d)^2 < -4bc\,.$$

(Für die Drehung der Anfangskonfiguration haben wir $a = d$ und $bc < 0$, damit ist die Bedingung erfüllt.)