

Einschalige Hyperboloide an Hand eines beweglichen Schnurmodells

Teil 2: Oberflächenbestimmung

Juri Jousen, Markus J. Stoppel

Zusammenfassung

Wir studieren ein bewegliches Modell zur Veranschaulichung einschaliger Hyperboloide, bei dem zwei durch gespannte Fäden verbundene Scheiben gegeneinander verdreht werden. Wir bestimmen für die entstehenden Rotationskörper das Volumen und die Oberfläche, jeweils in Abhängigkeit vom Drehwinkel. Die Abhängigkeit der Oberfläche vom Drehwinkel birgt Überraschungen.

Wir gehen aus von dem in [3] beschriebenen beweglichen Modell, bei dem Fäden zwischen zwei auf einer Achse gegeneinander verschieb- und verdrehbaren, zu dieser Achse orthogonalen Platten gespannt sind. Durch eine Schraubenfeder entlang der Achse werden die Platten dabei so auf Abstand gehalten, dass die Fäden gespannt bleiben.

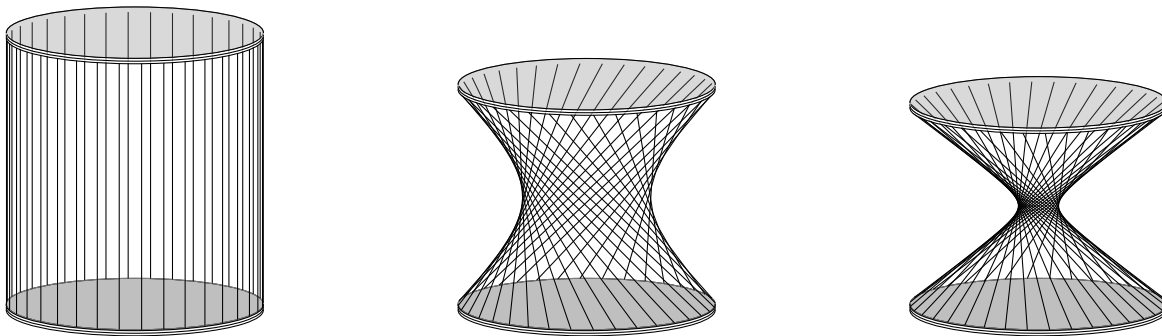


Abbildung 1: Verschiedene Stadien des Experiments: $\vartheta \in \{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{9}{10}\pi\}$ (im Bogenmaß).

Wir bezeichnen mit ϑ den Winkel (gemessen im Bogenmaß), um den die Platten gegeneinander verdreht sind. In der Ruhelage ($\vartheta = 0$) sollen alle Fäden parallel zur Achse liegen, und von Punkten auf einem Kreis K um den Durchstoßpunkt der Achse in der ersten Platte ausgehen. Der Radius dieses Kreises sei mit r bezeichnet. Der jeweils mit einem solchen Punkt durch einen Faden verbundene

Punkt in der zweiten Platte liegt dann auf dem Kreis mit Radius r um den Durchstoßpunkt der Achse durch die zweite Platte. Damit liegen die Fäden alle auf einer Zylinderfläche. Der Flächeninhalt A_0 des Abschnitts des Zylinders, der zwischen den Platten liegt, lässt sich leicht berechnen als Produkt des Umfangs von K mit dem Abstand ℓ der Platten im Ruhezustand.

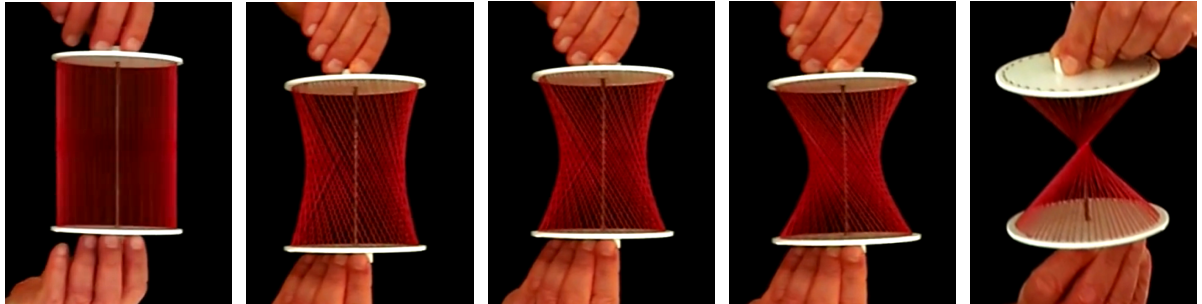


Abbildung 2: Standbilder aus dem Video „Einschalige Hyperboloide erzeugt als Schnurmodell“ [5].

Für positive, aber nicht zu große Werte von ϑ liegen die Fäden in einer Fläche, die als einschaliges Hyperboloid bekannt ist. Den Flächeninhalt A_ϑ des Teils des Hyperboloids, der zwischen den beiden Platten liegt, werden wir im Abschnitt 3 bestimmen (in Abhängigkeit von ϑ). Es wird sich zeigen, dass die entsprechende Formel kompliziert ist, was sich auch in einem interessanten Verlauf der Kurve zeigt, die A_ϑ in Abhängigkeit von ϑ darstellt (siehe Abschnitt 5).

Wenn der ursprüngliche Abstand ℓ groß genug (nämlich größer als der Durchmesser von K) ist, erhalten wir für $\vartheta = \pi$ eine spezielle Lage der Fäden: Alle diese Fäden gehen dann durch einen Punkt, und liegen auf einem Doppelkegel. Auch für diesen Doppelkegel ist (wie für den Zylinder bei $\vartheta = 0$) die Bestimmung der Oberfläche mit einer Standard-Formel möglich.

Vergrößert man (in Gedanken, weil das nur noch mit idealisierten Fäden geht) den Winkel weiter, entfernen sich die Platten wieder von einander, bei $\vartheta = 2\pi$ ist wieder der ursprüngliche Zustand des Zylinders erreicht. Im realen Experiment wird man eher den Winkel von $-\pi$ bis π variieren.

Wenn der ursprüngliche Abstand der Platten *nicht* größer als der Durchmesser von K ist, gibt es einen Winkel ϑ , bei dem die Platten aufeinander zu liegen kommen. Physikalisch ist eine weitere Vergrößerung des Winkels dann sinnlos. Wir werden im Folgenden diese Fälle durch geeignete Annahmen an ℓ ausschließen (in Abschnitt 3 von [3] werden diese Fälle näher betrachtet).

Ein Trugschluss

Wir haben mehrfach als spontane Reaktion auf die Begegnung mit dem Modell erlebt, dass die Vermutung geäußert wurde: „Der Inhalt der Fläche A_ϑ ist immer gleich, weil diese ja von den Fäden ausgefüllt wird.“ Diese Vermutung ist *falsch!* (Man erkennt das schon im Extremfall $\vartheta = \pi$.)

Wir zeigen in Abschnitt 3, dass die Abhängigkeit vom Winkel ϑ ziemlich kompliziert ist.

1 Mathematische Modellierung

In [3] wird zuerst der Abstand h_ϑ der Platten nach Drehung um den Winkel ϑ bestimmt, und dann eine Quadrik-Gleichung aufgestellt, der die Punkte auf den Fäden bei gegebenem ϑ genügen. Dabei wird zur Vereinfachung der Radius der Kreise angenommen als $r = 1$. Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit (notfalls regeln wir das durch geeignete Wahl der Längeneinheit).

Wir nehmen an, dass der ursprüngliche Abstand ℓ der beiden Platten größer als der Durchmesser der Kreise ist, also $\ell > 2$. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir $\gamma := \gamma_\vartheta := \cos(\vartheta)$, dann ergibt sich der Abstand zwischen den Platten nach Drehung um den Winkel ϑ als $h = h_\vartheta = \sqrt{\ell^2 - 2(1 - \gamma)}$.

In Koordinaten bezüglich eines geeigneten kartesischen Systems wird das Hyperboloid beschrieben durch die Gleichung (siehe [3])

$$-y_1^2 - y_2^2 + 2 \frac{1 - \gamma}{\ell^2 - 2(1 - \gamma)} y_3^2 + \frac{1}{2}(1 + \gamma) = 0.$$

Mit

$$\alpha := \sqrt{2 \frac{1 - \gamma}{\ell^2 - 2(1 - \gamma)}} = \frac{\sqrt{2(1 - \gamma)}}{h} \quad \text{und} \quad \beta := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \gamma)}$$

wird das zu

$$-y_1^2 - y_2^2 + \alpha^2 y_3^2 + \beta^2 = 0.$$

Die Punkte im Schnitt mit der durch $y_2 = 0$ definierten vertikalen Ebene erfüllen dann die Gleichung

$$-y_1^2 + \alpha^2 y_3^2 + \beta^2 = 0.$$

Dieser Schnitt ist eine Hyperbel. Die Punkte mit $y_1 > 0$ (und $y_2 = 0$) bilden einen Ast dieser Hyperbel, den wir erhalten als

$$\{(f(t), 0, t)^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$$

mit $f(t) := \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2}$.

Die Fäden des Modells liegen alle in dem Teil M des Hyperboloids, das durch Rotation der Kurve

$$K := K_\vartheta := \{(f(t), 0, t)^\top \mid -h/2 \leq t \leq h/2\}$$

entsteht.

2 Volumen

Das Volumen $V = V_\vartheta$, das zwischen den beiden Platten bei Rotation der Kurve K_ϑ eingeschlossen wird, ergibt sich durch Anwendung der bekannten Formel (siehe [2, 3.1.7.8, S. 315 f]):

$$\begin{aligned} V_\vartheta &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} (f(t))^2 dt = \pi \int_{-h/2}^{h/2} \alpha^2 t^2 + \beta^2 dt = \pi \left[\frac{\alpha^2}{3} t^3 + \beta^2 t \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= 2\pi \left(\frac{\alpha^2 h^3}{3 \cdot 8} + \beta^2 \frac{h}{2} \right) = \pi h \left(\frac{\alpha^2}{12} h^2 + \beta^2 \right) = \pi h \left(\frac{2(1-\gamma)}{12} + \frac{1+\gamma}{2} \right) \\ &= \pi \frac{2+\gamma}{3} \sqrt{\ell^2 - 2(1-\gamma)} \\ &= \pi \frac{2+\cos(\vartheta)}{3} \sqrt{\ell^2 - 2(1-\cos(\vartheta))}. \end{aligned}$$

Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ ergeben sich $V_0 = \pi \frac{2+1}{3} \sqrt{\ell^2 - 2(1-1)} = \pi \ell = \pi h_0$ sowie $V_\pi = \pi \frac{2-1}{3} \sqrt{\ell^2 - 2(1+1)} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\ell^2 - 4} = 2 \left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{h_\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} h_\pi$. Das sind die bekannten Werte für das Volumen des Zylinders mit Radius 1 und Höhe h_0 bzw. des doppelt genommenen Kreiskegels mit Radius 1 und Höhe $\frac{1}{2} h_\pi = \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - 4}$.

3 Flächeninhalt

Zur Berechnung des Flächeninhalts $A = A_\vartheta$ von M verwenden wir die bekannte Formel (siehe [2, 3.1.7.8, S. 315 f]): Es gilt

$$A = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Mit $f'(t) = \alpha^2 t (\alpha^2 t^2 + \beta^2)^{-1/2}$, den Grenzen $a = -h/2$ und $b = h/2$ sowie der Symmetrie der Funktion f ergibt sich

$$A_\vartheta = 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{(\alpha^4 + \alpha^2)t^2 + \beta^2} dt = 4\pi\beta \int_0^{h/2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\alpha^2 + 1)t^2 + 1} dt.$$

Mit $\mu := \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\alpha^2 + 1}$ substituieren wir (siehe [4, 3.3]) $u = \mu t$, wegen $\frac{du}{dt} = \mu$ erhalten wir das unbestimmte Integral (also die Menge aller Stammfunktionen) als

$$\begin{aligned} 4\pi\beta \int \sqrt{(\mu t)^2 + 1} dt &= 4\pi\beta \frac{1}{\mu} \int \sqrt{(\mu t)^2 + 1} \mu dt \\ &= \frac{4\pi\beta}{\mu} \int \sqrt{u^2 + 1} du = \frac{2\pi\beta}{\mu} \left[u \sqrt{1 + u^2} + \ln \left(\sqrt{1 + u^2} + u \right) \right]. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} A_{\vartheta} &= \frac{2\pi\beta}{\mu} \left[\mu t \sqrt{1 + (\mu t)^2} + \ln \left(\sqrt{1 + (\mu t)^2} + \mu t \right) \right]_0^{h/2} \\ &= 2\pi\beta \left(\frac{h}{2} \sqrt{1 + \left(\mu \frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{\mu} \ln \left(\sqrt{1 + \left(\mu \frac{h}{2}\right)^2} + \mu \frac{h}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Dabei hängen die Hilfsgrößen $h = \sqrt{\ell^2 - 2(1 - \gamma)}$, $\alpha = \frac{\sqrt{2(1-\gamma)}}{h}$, $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \gamma)}$ und $\mu = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2\ell}{h^2} \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ wegen $\gamma = \cos(\vartheta)$ alle vom Winkel ϑ ab. Deswegen wird die Abhängigkeit des Flächeninhalts A_{ϑ} vom Winkel ϑ schließlich durch eine recht komplizierte Formel gegeben.

Wir setzen die Definitionen für die Hilfsgrößen ein, verwenden dabei

$$\mu \frac{h}{2} = \frac{\ell}{h} \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \quad \text{sowie} \quad \sqrt{1 + \left(\mu \frac{h}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2\frac{\ell^2 + \gamma^2 - 1}{1+\gamma}}}{h}$$

und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} A_{\vartheta} &= 2\pi\beta \left(\frac{h}{2} \sqrt{1 + \left(\mu \frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{\mu} \ln \left(\sqrt{1 + \left(\mu \frac{h}{2}\right)^2} + \mu \frac{h}{2} \right) \right) \\ &= \pi \sqrt{2(1 + \gamma)} \left(\frac{h}{2} \frac{\sqrt{2\frac{\ell^2 + \gamma^2 - 1}{1+\gamma}}}{h} + \frac{h^2}{2\ell} \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}} \ln \left(\frac{\sqrt{2\frac{\ell^2 + \gamma^2 - 1}{1+\gamma}}}{h} + \frac{\ell}{h} \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}} \right) \right) \\ &= \pi \sqrt{2(1 + \gamma)} \left(\frac{\sqrt{\ell^2 + \gamma^2 - 1}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \gamma}} + \frac{h^2}{2\ell} \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}} \ln \left(\frac{\sqrt{2(\ell^2 + \gamma^2 - 1)} + \ell \sqrt{1 - \gamma}}{h \sqrt{1 + \gamma}} \right) \right) \\ &= \pi \left(\sqrt{\ell^2 + \gamma^2 - 1} + \frac{h^2(1 + \gamma)}{\ell \sqrt{2(1 - \gamma)}} \ln \left(\frac{\sqrt{2(\ell^2 + \gamma^2 - 1)} + \ell \sqrt{1 - \gamma}}{h \sqrt{1 + \gamma}} \right) \right) \\ &= \pi \left(\sqrt{\ell^2 + \gamma^2 - 1} + \frac{\ell^2(1 + \gamma) + 2(\gamma^2 - 1)}{\ell \sqrt{2(1 - \gamma)}} \ln \left(\frac{\sqrt{2(\ell^2 + \gamma^2 - 1)} + \ell \sqrt{1 - \gamma}}{\sqrt{\ell^2 - 2(1 - \gamma)} \sqrt{1 + \gamma}} \right) \right). \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch γ als $\cos(\vartheta)$ lesen ... aber das schreiben wir lieber nicht explizit aus.

4 Grenzwerte

Für die Grenzlagen des Winkels ϑ , nämlich $\vartheta \in \{0, \pi\}$, kennen wir den Flächeninhalt:

Es gilt $A_0 = 2\pi\ell$ und $A_\pi = \pi\ell$.

Wir können $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ nicht unmittelbar in unserer Formel für A_ϑ auswerten, es ist dann ja $\gamma_0 = 1$ bzw. $\gamma_\pi = -1$, und gewisse Nenner in der Formel werden zu Null. Wir müssen stattdessen den Grenzübergang für $\vartheta \rightarrow 0$ bzw. $\vartheta \rightarrow \pi$ betrachten. Da $\gamma = \cos(\vartheta)$ stetig von ϑ abhängt, genügt es, den Grenzübergang für $\gamma \rightarrow 1$ bzw. $\gamma \rightarrow -1$ untersuchen.

Wir führen weitere Abkürzungen im Interesse der Übersichtlichkeit ein: $P := \sqrt{1+\gamma}$, $Q := \sqrt{1-\gamma}$, $R := \sqrt{\ell^2 + \gamma^2 - 1}$ und

$$\begin{aligned} L &:= \ln\left(\frac{\sqrt{2(\ell^2 + \gamma^2 - 1)} + \ell\sqrt{1-\gamma}}{h\sqrt{1+\gamma}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}R + \ell Q}{hP}\right) \\ &= \ln(\sqrt{2}R + \ell Q) - \ln(h) - \ln(P). \end{aligned}$$

Damit ist

$$A = \pi \left(R + \frac{h^2 P^2}{\sqrt{2} \ell Q} L \right).$$

Grenzverhalten bei $\gamma = 1$

Für den Grenzübergang $\gamma \rightarrow 1$ bemerken wir $P \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \sqrt{2}$, $Q \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} 0$, $R \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \ell$ und $h \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \ell$. Außerdem gilt $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2}R + \ell Q}{hP} \right) = \frac{\sqrt{2}\ell}{\ell\sqrt{2}} = 1$ und damit $L \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} 0$. Das Grenzverhalten von $\frac{L}{Q}$ ist nicht so schnell zu sehen. Wir verwenden die Regel von l'Hospital ([4, 2.5]): Die Ableitungen nach γ sind $\frac{d}{d\gamma}P = \frac{1}{2P}$, $\frac{d}{d\gamma}Q = \frac{-1}{2Q}$, $\frac{d}{d\gamma}R = \frac{\gamma}{R}$, $\frac{d}{d\gamma}h = \frac{1}{h}$ und

$$\frac{d}{d\gamma}L = \frac{d}{d\gamma} \left(\ln(\sqrt{2}R + \ell Q) - \ln(h) - \ln(P) \right) = \frac{\sqrt{2} \frac{\gamma}{R} - \frac{\ell}{2Q}}{\sqrt{2}R + \ell Q} - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2P^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\gamma}L}{\frac{d}{d\gamma}Q} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left(-2Q \frac{d}{d\gamma}L \right) = -2 \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left(\frac{Q\sqrt{2} \frac{\gamma}{R} - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{2}R + \ell Q} - \frac{Q}{h^2} - \frac{Q}{2P^2} \right) = \frac{\ell}{\sqrt{2}\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 1} A &= \lim_{\gamma \rightarrow 1} \pi \left(R + \frac{h^2 P^2}{\sqrt{2} \ell Q} L \right) \\ &= \pi \left(\lim_{\gamma \rightarrow 1} R + \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{h^2 P^2}{\sqrt{2} \ell} \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{L}{Q} \right) = \pi \left(\ell + \frac{\ell^2 \sqrt{2}^2}{\sqrt{2} \ell} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\pi\ell. \end{aligned}$$

Grenzverhalten bei $\gamma = -1$

Es gilt $P \xrightarrow{\gamma \rightarrow -1} 0$, $Q \xrightarrow{\gamma \rightarrow -1} \sqrt{2}$, $R \xrightarrow{\gamma \rightarrow -1} \ell$ und $h \xrightarrow{\gamma \rightarrow -1} \sqrt{\ell^2 - 4}$.

Mit der Regel von l'Hospital ([4, 2.5]) ergibt sich aus $\frac{d}{d\gamma} P = \frac{1}{2P}$ der Grenzwert

$$\lim_{\gamma \rightarrow -1} P \ln(P) = \lim_{\gamma \rightarrow -1} \frac{\ln(P)}{P^{-1}} = \lim_{\gamma \rightarrow -1} \frac{P^{-1} \frac{1}{2P}}{-P^{-2} \frac{1}{2P}} = \lim_{\gamma \rightarrow -1} -P = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow -1} PL &= \lim_{\gamma \rightarrow -1} P \left(\ln(\sqrt{2} R + \ell Q) - \ln(h) - \ln(P) \right) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow -1} P \ln(\sqrt{2} R + \ell Q) - \lim_{\gamma \rightarrow -1} P \ln(h) - \lim_{\gamma \rightarrow -1} P \ln(P) = 0. \end{aligned}$$

Deswegen erhalten wir

$$\lim_{\gamma \rightarrow -1} A = \pi \lim_{\gamma \rightarrow -1} \left(R + \frac{h^2 P}{\sqrt{2} \ell Q} PL \right) = \pi \lim_{\gamma \rightarrow -1} R + \lim_{\gamma \rightarrow -1} \frac{h^2 P}{\sqrt{2} \ell Q} \lim_{\gamma \rightarrow -1} PL = \pi \ell.$$

Ableitungen

Symmetrie-Überlegungen (es gilt $A_{\vartheta} = A_{-\vartheta}$ und $A_{\pi-\vartheta} = A_{\pi+\vartheta}$) ergeben, dass die Ableitungen der Funktion $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \vartheta \mapsto A_{\vartheta}$ bei $\vartheta \in \{0, \pi\}$ beide Null sind. Allerdings sollte man erst klären, ob die Funktion A an diesen Stellen *überhaupt differenzierbar ist*. Da A an diesen Stellen stetig ist (wie unsere Grenzwert-Überlegungen gezeigt haben), genügt es dazu einzusehen, dass die Grenzwerte der Ableitung $\frac{d}{d\vartheta} A|_{\vartheta=t}$ für $t \rightarrow 0$ bzw. $t \rightarrow \pi$ *existieren*: Diese Grenzwerte der Ableitung sind dann die Ableitungen an den fraglichen Stellen (siehe [4, 2.5.11]).

Wir haben die nötigen Grenzwert-Überlegungen im Stillen durchgeführt, diese sind im Prinzip analog zu (wenn auch noch etwas aufwändiger als) die Überlegungen die wir oben zur Stetigkeit angestellt haben.

Vorsicht: Man kann (im Unterschied zur Diskussion der Grenzwerte) nicht einfach die Grenzwerte der Ableitung $\frac{d}{d\gamma} A|_{\gamma=\gamma_t}$ für $\gamma \rightarrow 1$ oder $\gamma \rightarrow -1$ nehmen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{d\vartheta} A|_{\vartheta=t} = \frac{d}{d\gamma} A|_{\gamma=\gamma_t} \frac{d}{d\vartheta} \gamma|_{\vartheta=t} = \frac{d}{d\gamma} A|_{\gamma=\gamma_t} (-\sin(t)).$$

Für $\vartheta \rightarrow 0$ ergibt sich $\gamma \rightarrow -1$ und $\frac{d}{d\gamma} A \xrightarrow{\gamma \rightarrow -1} +\infty$, aber dann doch

$$\frac{d}{d\vartheta} A|_{\vartheta=t} = \frac{d}{d\gamma} A|_{\gamma=\gamma_t} (-\sin(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

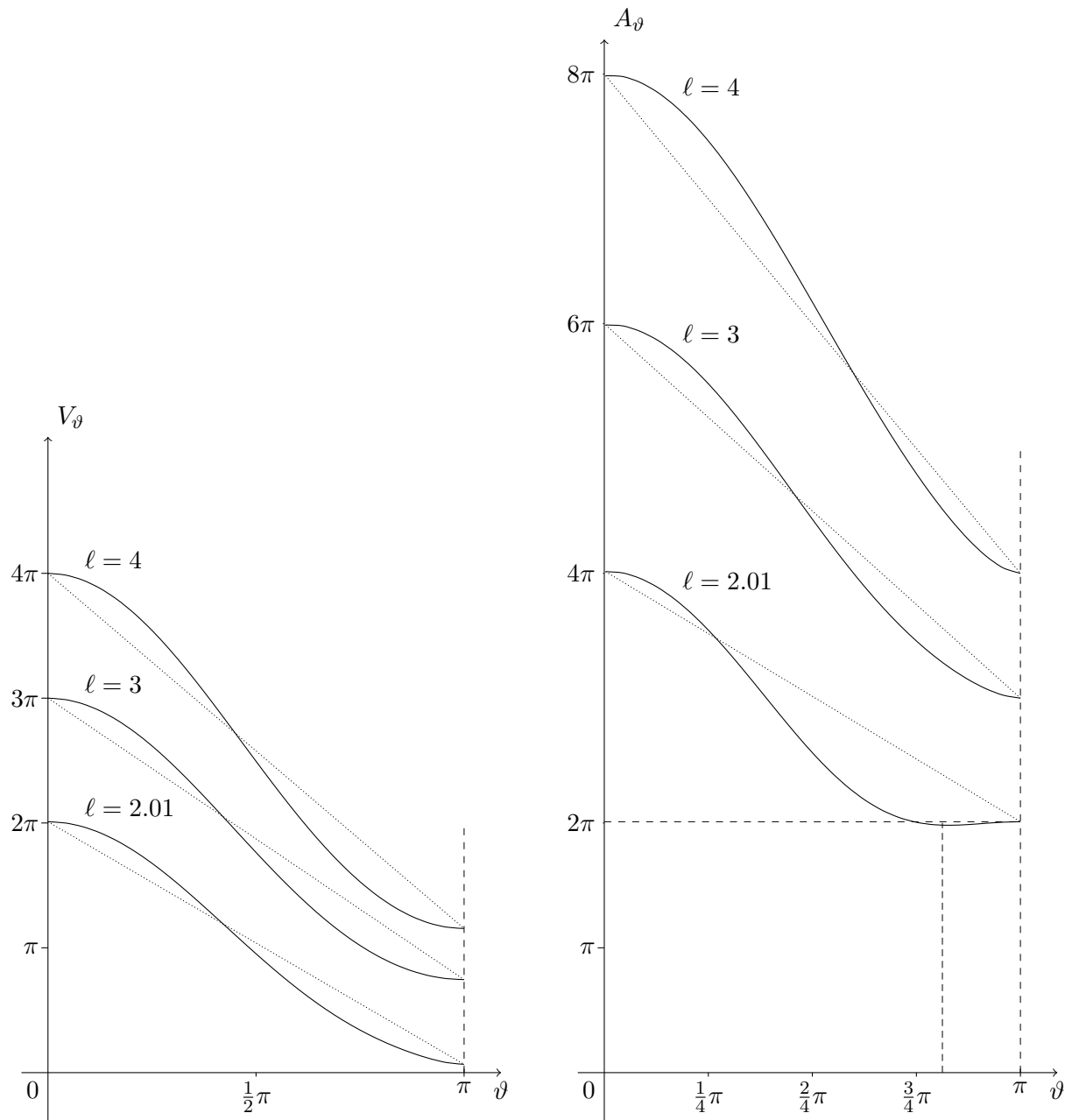


Abbildung 3: Verlauf der Funktionen V und A für einige Werte von ℓ .

5 Ein überraschender Schlenker

Wenn man sehr genau hinsieht (also ein geeignetes Programm einen passenden Ausschnitt aus dem Funktionsgraphen in geeigneter Skalierung produzieren lässt), dann erkennt man bei niedrigen Werten des Anfangsabstands ℓ in der Nähe von $\vartheta = \pi$ einen Schlenker in der Kurve: Es scheint einen absoluten Tiefpunkt zu geben, aber danach noch ein relatives Maximum; die Kurve nähert sich dann an den Wert A_π von oben an. Siehe Abbildung 4 links.

Dieser Eindruck könnte durch Ungenauigkeiten der Darstellung oder Rundungsfehler in der (numerisch auf der Maschine durchgeführten) Rechnung hervorgerufen sein. Allerdings zeigt eine Darstellung der Ableitung $\frac{d}{d\vartheta} A$ (siehe Abbildung 4 rechts) tatsächlich an den fraglichen Stellen auch Nullstellen der Ableitung.

Die eben angesprochenen Zweifel sind damit nicht völlig ausgeräumt: auch diese Nullstellen der Ableitung könnten numerische Artefakte sein.

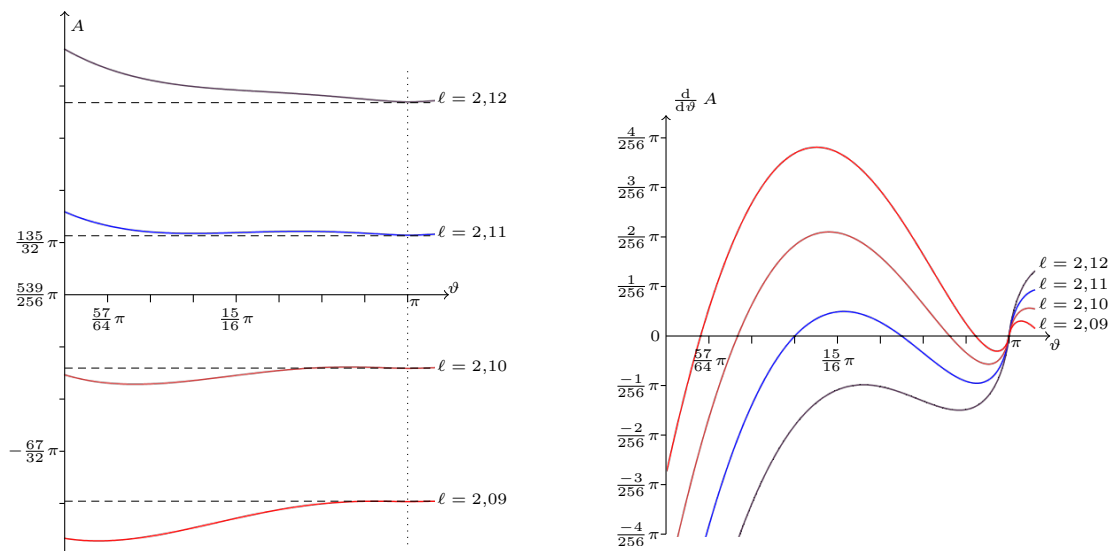


Abbildung 4: Verlauf der Ableitungen von A für einige Werte von ℓ .

Die Graphen in Abbildung 4 wurden erzeugt mit Maple™ [1], die Beschriftungen dazu sowie die Abbildungen 1 und 3 mit TikZ [6].

Die Autoren danken dem Albert-Einstein-Gymnasium in Böblingen, das ein Exemplar dieses Modells in den Schätzen seiner Sammlung bewahrt und für Experimente zur Verfügung gestellt hat.

Literatur

- [1] Bernardin, L. *et al.*: *Maple Programming Guide*. Maplesoft, Waterloo ON, Canada, 1996-2023.
- [2] Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. 19., völl. überarb. Aufl., hrsg. v. G. Grosche u. V. Ziegler. Gemeinschaftsausg.: Moskau: Verlag Nauka. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1979. Zbl 0415.00027.
- [3] Jousen, J. und M. J. Stroppel: *Einschalige Hyperboloide an Hand eines beweglichen Schnurmodells*, 2024. <https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Eingeschnuert/>.
- [4] Stroppel, M. J.: *Höhere Mathematik 2. Differential- und Integralrechnung, Vektorfelder, Potentialtheorie*. Edition Delkhofen, Deilingen, 1. Aufl., 2023, ISBN 978-3-936413-40-3.
- [5] Stroppel, M. J.: *Einschalige Hyperboloide erzeugt als Schnurmodell*. Video, 2024. <https://www.youtube.com/watch?v=ilVPizihM5Y>.
- [6] Tantau, T.: *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.10*, 2024. <https://pgf-tikz.github.io/pgf/pgfmanual.pdf>.

Juri Jousen, IADM, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
Markus J. Stroppel, LExMath, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Stuttgart