

Einschalige Hyperboloide an Hand eines beweglichen Schnurmodells

Juri Jousen, Markus J. Stroppel

Zusammenfassung

Wir beschreiben ein altes (früher im Gymnasium verwendetes) Modell zur Veranschaulichung einschaliger Hyperboloide als Regelflächen, und bestimmen die zugehörige Quadrik-Gleichung.

In früheren Jahren wurde im Mathematik-Unterricht in Gymnasien noch intensiv Elementargeometrie und auch höhere Geometrie unterrichtet. Dabei konnte das hier beschriebene Modell der Firma Phywe zum Einsatz kommen: Es erlaubt die interaktive Erfahrung mit dem Phänomen, dass eine gekrümmte Fläche durchaus als Vereinigung gerader Linien entstehen kann. Solche Flächen heißen *Regelflächen* (siehe [1, § 2, § 3]), sie können sehr kompliziert sein. Die hier in Frage stehende Fläche ist nicht nur vergleichsweise einfach (beschrieben durch eine quadratische Gleichung in drei Variablen), sondern sie lässt die Überdeckung durch Geraden auf zwei verschiedene Arten zu. Außerdem kommen solche Flächen durchaus in Ingenieur Anwendungen vor: etwa im Bauingenieurwesen (Kühl-, Funk-, Wassertürme, ...) oder versteckt in Getrieben mit Hyperboloidverzahnung (siehe [2]).

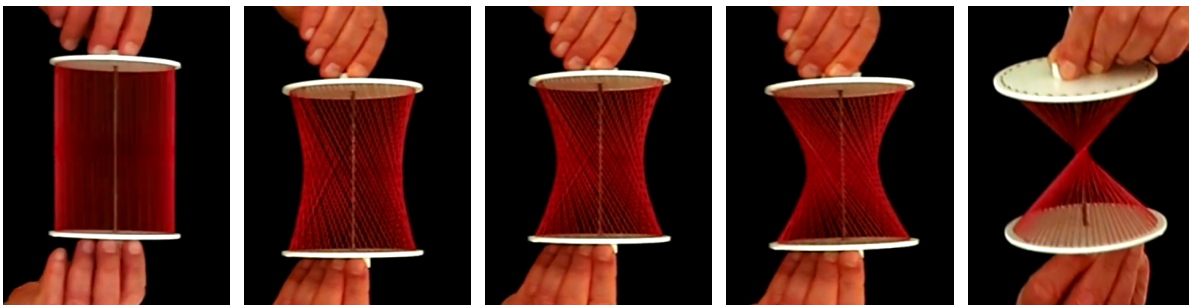


Abbildung 1: Standbilder aus dem Video „Einschalige Hyperboloide erzeugt als Schnurmodell“.

Das Modell besteht aus zwei auf einer Metallachse gegeneinander verdrehbaren parallelen Platten, zwischen denen Fäden gespannt sind. Durch eine Schraubenfeder entlang der Achse werden die Platten dabei so auf Abstand gehalten, dass die Fäden gespannt bleiben. Den experimentellen Umgang mit dem Modell zeigen die Bilder in Abbildung 1, das Modell spielt auch die Starrolle in dem Video „Einschalige Hyperboloide erzeugt als Schnurmodell“ [5]. Uns stand ein Exemplar aus der Sammlung des Albert-Einstein-Gymnasiums in Böblingen zur Verfügung.

1 Beschreibung des Experiments

Auf zwei parallelen Platten wird jeweils ein Kreis vom Radius r derart markiert, dass die Verbindungsgerade a der Mittelpunkte dieser Kreise orthogonal zu den Platten ist. Auf einem dieser Kreise werden in regelmäßigen Abständen Punkte markiert. Für jeden markierten Punkt P auf diesem ersten Kreis ist P' der Punkt auf dem zweiten Kreis, der auf der Parallelen zu a durch P liegt.

Jetzt wird jeweils P mit P' durch eine Strecke verbunden (im Experiment durch einen Faden, von dem angenommen wird, dass er sich unter Spannung nicht erkennbar verlängert). Die Länge dieser Strecke ist dann der Abstand zwischen den Platten. Jede dieser Strecken liegt auf dem senkrechten Kreiszyylinder mit Achse a und Radius r .

Die erste Platte wird festgehalten, die zweite wird um die Achse a gedreht und dabei entlang a so verschoben, dass der Abstand zwischen P und dem durch die Bewegung der zweiten Platte aus P' erhaltenen Punkt P'' gleich dem ursprünglichen Abstand zwischen P und P' bleibt. (Das heißt: Der Faden bleibt gespannt, und reißt auch nicht ab.) Die ursprünglichen Verbindungsstrecken (Fäden) sind alle zueinander parallel. Nach der Bewegung der zweiten Platte sind die neuen Verbindungsstrecken im Allgemeinen nicht mehr parallel, sondern windschief.

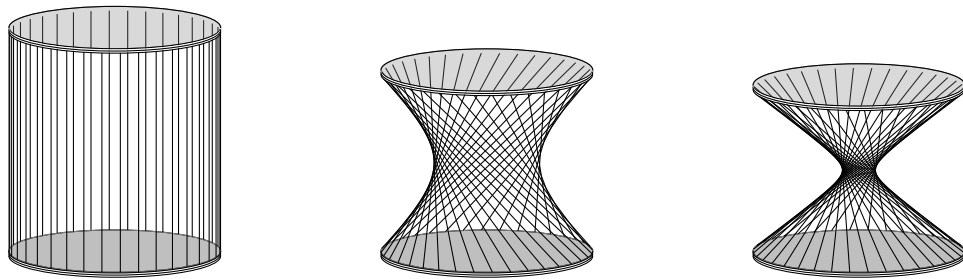


Abbildung 2: Verschiedene Stadien des Experiments: $\vartheta \in \{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{9}{10}\pi\}$ (im Bogenmaß).

Wenn der ursprüngliche Abstand der Platten in Bezug auf den Durchmesser der Kreise genügend groß ist, gibt es eine Extremlage, in der alle neuen Strecken durch einen gemeinsamen Punkt gehen. In diesem Fall liegen die neuen Strecken alle in der Oberfläche eines Doppelkegels. Wenn man nach dieser Extremlage den Winkel weiter vergrößert, bewegen sich die Platten wieder auseinander¹. Wenn der ursprüngliche Abstand der Platten in Bezug auf den Durchmesser der Kreise zu klein ist, endet man bei einer Situation, in der beide Platten aufeinander liegen.

Durchweg stellt sich heraus, dass bei fest gewählter Einstellung der zweiten Platte alle Fäden in einer Quadrik (siehe [4, Kap. 7]) liegen. In den generischen Fällen ist diese Quadrik ein einschaliges Hyperboloid, in Extremlagen kommen ein Zylinder, ein Doppelkegel und eine Doppelsebene² vor (siehe [4, 7.3.7, 7.3.8]). Für den Winkel $-\vartheta$ erhalten wir dieselbe Quadrik wie für ϑ ; im generischen Fall liefert das eine zweite Geradenschar, die dasselbe Hyperboloid überdeckt.

¹ Da sich die Fäden im Weg sind, geht das nur noch in Gedanken. Wir könnten aber auch zurückdrehen über $\vartheta = 0$ bis zu $\vartheta = -\pi$.

² Auch die zu Geraden verlängerten Fäden füllen nicht unbedingt die ganze Doppelsebene aus (siehe Abschnitt 3).

2 Mathematische Behandlung

Wir nehmen an, dass der Radius der Kreise $r = 1$ ist (d.h., wir skalieren entsprechend, das beeinflusst die Ergebnisse der Untersuchung nicht wesentlich). Der ursprüngliche Abstand der Platten sei ℓ .

Wir führen Koordinaten³ so ein, dass der erste Kreis K aus den Punkten besteht, die die Koordinaten $P_\varphi := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ haben. Die erste Platte wird dann durch die Ebene E mit der Gleichung $x_3 = 0$ beschrieben. Bis auf eine Spiegelung an E besteht dann der zweite Kreis K' aus den Punkten $P'_\varphi := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \ell)$; es gilt $P'_\varphi = P_\varphi + (0, 0, \ell)$.

Die beschriebene Bewegung ersetzt jeden Punkt P'_φ durch den Punkt

$$P''_\varphi := (\cos(\varphi + \vartheta), \sin(\varphi + \vartheta), h(\vartheta)),$$

dabei ist ϑ der Winkel, um den verdreht wurde, und $h(\vartheta)$ ist der Abstand zwischen der ersten (unveränderten) Ebene E und der durch die Bewegung erhaltenen neuen zweiten Ebene E'' .

Wir müssen $h(\vartheta)$ so bestimmen, dass die Strecke von P_φ nach P''_φ wieder die Länge ℓ hat. Das ist nicht schwer, weil diese Länge nicht von φ abhängt. Es genügt also, den Spezialfall $\varphi = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} P_0 &= (\cos(0), \sin(0), 0) &&= (1, 0, 0) && \text{und} \\ P''_0 &= (\cos(0 + \vartheta), \sin(0 + \vartheta), h(\vartheta)) &&= (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), h(\vartheta)). \end{aligned}$$

Der Abstand ℓ ist dann

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 - \cos(\vartheta))^2 + (0 - \sin(\vartheta))^2 + (0 - h(\vartheta))^2} &= \sqrt{1 - 2\cos(\vartheta) + \cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2 + h(\vartheta)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\vartheta) + h(\vartheta)^2}. \end{aligned}$$

Wir quadrieren die Bedingung $\ell = \sqrt{2 - 2\cos(\vartheta) + h(\vartheta)^2}$ und erhalten

$$h(\vartheta)^2 = \ell^2 - 2 + 2\cos(\vartheta).$$

Bestimmung der Quadrik-Gleichung

Um die Formeln übersichtlich zu halten, verwenden wir die Abkürzungen

$$\gamma := \cos(\vartheta), \quad \sigma := \sin \vartheta, \quad h := h(\vartheta).$$

Dann gilt $h^2 = \ell^2 - 2(1 - \gamma)$. Wir nehmen in diesem Abschnitt $h > 0$ an⁴.

³ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit schreiben wir die Koordinaten als Zeilen.

⁴ Das heißt: Wir nehmen an, dass ℓ und ϑ so gewählt sind, dass $h > 0$ gilt. Für $\ell > 2$ geht auf jeden Fall alles gut.

Wir könnten jetzt eine allgemeine Quadrik-Gleichung (siehe [4, 7.2]) ansetzen:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + k = 0.$$

Da unsere ganze Beschreibung aber drehsymmetrisch zur dritten Achse angelegt ist, können wir das auch schon direkt in die Gleichung einbauen und von vornherein die Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{11}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2b_3x_3 + k = 0$$

ansetzen⁵. Wir setzen die Koordinaten einiger Punkte ein, von denen wir verlangen, dass sie die Gleichung erfüllen.

(1) Der Punkt $P_0 = (1, 0, 0)$ liefert $a_{11} = -k$.

(Wegen unseres speziellen Ansatzes und $(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1$ haben wir damit schon gesichert, dass alle Punkte auf dem Kreis in der ersten Ebene die Gleichung erfüllen.)

(2) Der Punkt $P_0'' = (\gamma, \sigma, h)$ liefert dann $-k + a_{33}h^2 + 2b_3h + k = 0$ und damit $-a_{33}h = 2b_3$.

(3) Schließlich verwenden wir noch den Mittelpunkt $\frac{1}{2}(1 + \gamma, \sigma, h)$ der Strecke von P_0 nach P_0'' . Dieser liefert die Bedingung $-k(\frac{1+\gamma}{2})^2 - k(\frac{\sigma}{2})^2 + a_{33}(\frac{h}{2})^2 - a_{33}h(\frac{h}{2}) + k = 0$, und damit $a_{33}h^2 = k(4 - 1 - 2\gamma - \gamma^2 - \sigma^2) = 2k(1 - \gamma)$. Damit lautet unsere Gleichung

$$-kx_1^2 - kx_2^2 + 2k\frac{1-\gamma}{h^2}x_3^2 - 2k\frac{1-\gamma}{h}x_3 + k = 0.$$

Wir teilen diese Gleichung ohne Schaden noch durch k und erhalten

$$-x_1^2 - x_2^2 + 2\frac{1-\gamma}{h^2}x_3^2 - 2\frac{1-\gamma}{h}x_3 + 1 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung finden wir

$$2\frac{1-\gamma}{h^2}x_3^2 - 2\frac{1-\gamma}{h}x_3 = 2\frac{1-\gamma}{h^2}\left(x_3^2 - hx_3\right) = 2\frac{1-\gamma}{h^2}\left(x_3 - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-\gamma).$$

Mit den durch $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ und $y_3 = x_3 - \frac{1}{2}h$ festgelegten neuen Koordinaten und $h^2 = \ell^2 - 2(1-\gamma)$ ergibt sich

$$-y_1^2 - y_2^2 + 2\frac{1-\gamma}{\ell^2 - 2(1-\gamma)}y_3^2 + \frac{1}{2}(1+\gamma) = 0.$$

Wegen $h > 0$ und $\gamma = \cos(\vartheta) \leq 1$ ist der Koeffizient bei y_3^2 nicht negativ. Wegen $-1 \leq \gamma$ ist auch die Konstante $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ nicht negativ. Die letzte Quadrik-Gleichung beschreibt also ein einschaliges Hyperboloid, außer wenn $1-\gamma = 0$ oder $\frac{1}{2}(1+\gamma) = 0$ ist (siehe [4, 7.3.7]).

⁵ Das ist kein Tippfehler: Wegen der Symmetrie ist $a_{22} = a_{11}$. Die vereinfachte Form der Gleichung ergibt sich daraus, dass die Gleichung $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$ für den Schnitt mit einer zur dritten Achse orthogonalen Ebene einen Kreis um den Ursprung in dieser Ebene beschreiben muss: Das führt auf $a_{22} = a_{11}$ und $a_{12} = 0 = b_1 = b_2$.

Der Fall $1 - \gamma = 0$ tritt ein, wenn $\gamma = 1$, also $\vartheta = 0$ ist. In diesem Fall lautet die Gleichung

$$-y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$$

– das ist die Gleichung des Zylinders zu Beginn unseres Experiments.

Der Fall $1 + \gamma = 0$ tritt ein für $\gamma = -1$, also $\vartheta = \pi$ (im Bogenmaß). In diesem Fall wird die Gleichung zu

$$-y_1^2 - y_2^2 + \frac{4}{\ell^2 - 4} y_3^2 = 0$$

– das ist die Gleichung eines Doppelkegels, die Spitze ist der Punkt mit den neuen Koordinaten $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$. In den alten Koordinaten ist die Spitze gegeben durch $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{h}{2})$ mit $h = \sqrt{\ell^2 - 2(1 - \gamma)} = \sqrt{\ell^2 - 4}$ wegen $\gamma = -1$.

Wir bemerken noch, dass der Doppelkegel nur auftreten kann, wenn $\ell^2 - 2(1 - \gamma)$ auch für $\gamma = -1$ positiv ist – das bedeutet, dass $\ell^2 > 4$ und also $\ell > 2$ sein muss. Wenn der Abstand der Ebenen (und damit die Fadenlänge) zu klein ist, kann man nicht bis zum Doppelkegel einschnüren, weil die Ebenen sich vorher begegnen!

3 Zu kurze Fäden

Wenn die Fäden kürzer als der Durchmesser der Kreise sind, können wir nicht bis zum Doppelkegel einschnüren. In der Grenzlage fallen die Ebenen zusammen, und alle Fäden liegen in einer Ebene.

Dieser Fall tritt ein, wenn $\ell \leq 2$. Der Abstand $h = \sqrt{\ell^2 - 2(1 - \gamma)}$ der Ebenen wird genau dann zu Null, wenn $\gamma = \frac{2 - \ell^2}{2}$. Für diesen Fall bricht ein großer Teil der oben vorgenommenen Bestimmung unserer Quadrik-Gleichung zusammen: wir können nicht mehr durch h^2 teilen.

Wir kommen aber bis zur Form $-kx_1^2 - kx_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2b_3x_3 + k = 0$. Der Mittelpunkt der Strecke von P_0 nach P_0'' hat jetzt (in der Grenzlage mit $\gamma = \frac{2 - \ell^2}{2}$) die Koordinaten $\frac{1}{2}(1 + \gamma, \sigma, 0)$. Dies liefert $0 = \frac{k}{4}(4 - 1 - 2\gamma - \gamma^2 - \sigma^2) = \frac{k}{2}(1 - \gamma)$. Wegen $\ell \neq 0$ gilt $\gamma \neq 1$. Also muss $k = 0$ gelten. Die Gleichung wird zu $(a_{33}x_3 + 2b_3)x_3 = 0$, dabei kann man a_{33} und b_3 beliebig wählen. Die zugehörigen Quadriken sind genau die Quadriken, die die Ebene E enthalten.

Selbst wenn wir die Strecken (die die Fäden darstellen) zu vollen Geraden erweitern, füllen sie übrigens in dieser Grenzlage nicht⁶ die ganze Ebene (siehe Abbildung 3). Die fraglichen Geraden sind die Tangenten an einen Kreis mit Radius $\cos(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}}$, siehe Abbildung 4.

(Der Wert für $\cos(\frac{\vartheta}{2})$ ergibt sich aus dem Additionstheorem: $\gamma = \cos(2\frac{\vartheta}{2}) = 2\cos(\frac{\vartheta}{2})^2 - 1$.)

⁶ Naja, ausgenommen im Fall $\ell = 2$ mit $\gamma = -1$. Dieses Problem führt uns wiederholt an die Grenzen ...

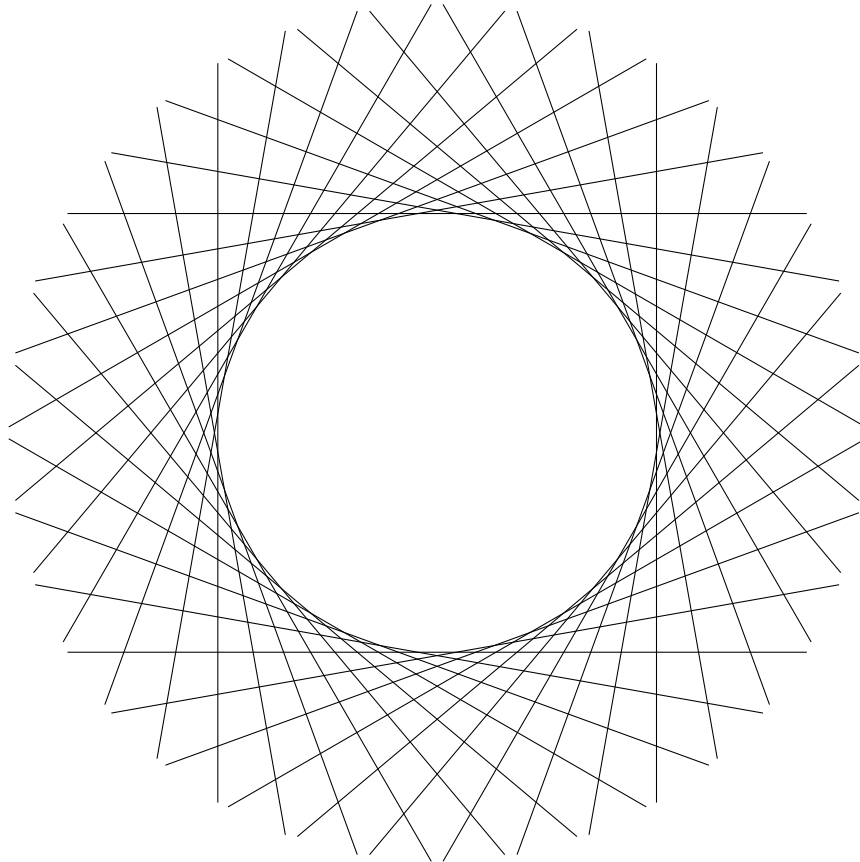


Abbildung 3: Strecken (Fäden) die eine Lücke lassen: hier für $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ und $\ell = \sqrt{3}$.

4 Noch Fragen?

Man kann eine Reihe weiterer Fragen über das (abhängig vom Winkel ϑ) von den Fäden eingehüllte Stück H_ϑ des Hyperboloids stellen.

- Welches Volumen V_ϑ schließt H_ϑ mit den beiden Platten ein?
- Welchen Flächeninhalt A_ϑ hat H_ϑ ?
- Hängen das Volumen V_ϑ und der Flächeninhalt A_ϑ monoton vom Winkel ϑ ab?

Die Antworten auf diese Fragen erfordern Methoden, die weit über die hier verwendeten hinausgehen. Deswegen behandeln wir diese Fragen separat, in [3].

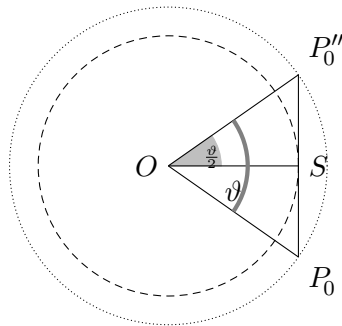


Abbildung 4: Der Radius der Lücke: Der Kreis um O durch P_0 hat Radius $r = 1$, der Winkel $\angle(P_0'', O, P_0)$ beträgt ϑ , die Verbindungsgerade von P_0 und P_0'' berührt den Kreis mit Radius $\cos(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\vartheta)}{2}}$.

Literatur

- [1] Hilbert, D. und S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl., 1996, ISBN 3-540-59069-2. MR 0430930. Zbl 0005.11202. JfM 58.0597.01.
- [2] Jousen, J. und M. J. Stroppel: *Einschalige Hyperboloide an Hand eines beweglichen Schnurmodells*, 2024. <https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Eingeschnuert/>.
- [3] Jousen, J. und M. J. Stroppel: *Einschalige Hyperboloide an Hand eines beweglichen Schnurmodells. Teil 2: Oberflächenbestimmung*, 2024. <https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Eingeschnuert/>.
- [4] Stroppel, M. J.: *Höhere Mathematik 1. Lineare Algebra und Konvergenz*. Edition Delkhofen, Deilingen, 1. Aufl., 2023, ISBN 978-3-936413-32-8.
- [5] Stroppel, M. J.: *Einschalige Hyperboloide erzeugt als Schnurmodell*. Video, 2024. <https://www.youtube.com/watch?v=ilVPizihM5Y>.
- [6] Tantau, T.: *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.10*, 2024. <https://pgf-tikz.github.io/pgf/pgfmanual.pdf>.

Die Grafiken wurden erzeugt mit TikZ [6].

Die Autoren danken dem Albert-Einstein-Gymnasium in Böblingen, das ein Exemplar dieses Modells in den Schätzen seiner Sammlung bewahrt und für Experimente zur Verfügung gestellt hat.

Juri Jousen, IADM, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Stuttgart

Markus J. Stroppel, LExMath, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Stuttgart