4.14 Näherungsweise Bestimmung von Inversen

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und nehmen an, dass $\operatorname{Rg} A = n$. Dann ist A invertierbar (siehe 4.10.7).

Die Bestimmung der inversen Matrix A^{-1} ist prinzipiell mit dem Gauß-Algorithmus möglich (vgl. 4.10.9), wird aber mühsam und langwierig, wenn die Zahl n der Zeilen und Spalten groß ist (in modernen Anwendungen kann durchaus $n > 10\,000$ vorkommen).

Bei der Bearbeitung solcher Probleme mit Computern treten auch beim Versuch, exakte Zeilen- und Spaltenoperation durchzuführen, Rundungs- bzw. Abbruchfehler auf (wenn etwa $\frac{1}{3}$ durch die Näherung $0{,}333\,333\,333\,333$ ersetzt wird — das sind zwar 12 Nachkommastellen, aber es bleibt ein Fehler, der sich im weiteren Verlauf der Rechnung verstärken kann).

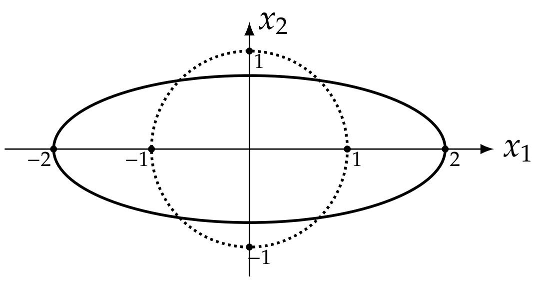
Wenn man unbedingt die Inverse braucht (zum numerischen Lösen von Gleichungssystemen gibt es bessere Methoden), kann man diese eventuell näherungsweise (und mit eventuell kleineren Fehlern als beim Versuch, exakt zu rechnen) bestimmen durch eine Anwendung der geometrischen Reihe (siehe 2.8.4).

Das in 4.14.2 beschriebene Verfahren von Carl Gottfried Neumann funktioniert für Matrizen, die „nahe bei der Einheitsmatrix" liegen. Einen passenden Abstandsbegriff bietet die *Matrixnorm*:

4.14.1 Definition. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Das Supremum $\|A\| := \sup\limits_{v \in \mathbb{R}^n,\, |v|=1} |Av|$ heißt die *Matrixnorm* von A.

Anschaulich misst die Matrixnorm die maximale Verzerrung bei der Anwendung der durch A beschriebenen linearen Abbildung, also die größte Halbachsenlänge des Ellipsoids, das durch Anwendung von A auf die Menge $\{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$ (also auf die *Einheitssphäre*) entsteht.

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$:



$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\| = 2.$

Für jede Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ setzen wir $X^0 := \mathrm{E}_n$. Ohne prinzipielle Probleme können wir für $k \in \mathbb{N}$ die Partialsumme $S_k := \sum\limits_{j=0}^{k} X^j = \mathrm{E}_n + X + X^2 + \cdots + X^k$ bilden; das wird wieder eine Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Jetzt kann man die Folge der Matrizen $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ betrachten: Also die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X^j$.

4.14.2 Satz. *Es sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\|X\| < 1$. Dann ist die Matrix $\mathrm{E}_n - X$ invertierbar, und die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X^j$ konvergiert gegen $(\mathrm{E}_n - X)^{-1}$.*

Wenn man „$\mathbb{1}$“ statt „E_n“ schreibt, sieht die Formel (fast) so aus wie unsere Formel 2.8.4 für die Summe der geometrischen Reihe für $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| < 1$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} X^j = (\mathbb{1} - X)^{-1}.$$

Eine Matrix A liegt „nahe bei der Einheitsmatrix“ E_n, wenn die Differenz $X := \mathrm{E}_n - A$ „nahe bei der Null“ liegt, wenn also $\|X\|$ klein genug ist.
Für unsere momentanen Zwecke ist „kleiner als 1“ klein genug.

4.14.3 Beispiele. **1.** Für $X = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$\|X\| = \sup\left\{ \frac{1}{3}\left\|\begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ -v_1 + v_2 \end{pmatrix}\right\| \;\middle|\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \right\} = \frac{1}{3}\sqrt{2} < 1.$$

Nach 4.14.2 gilt $$\lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{j=0}^{\infty} X^j = (\mathrm{E}_2 - X)^{-1} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Partialsumme S_6 stimmt auf zwei Nachkommastellen gerundet in allen Einträgen überein mit $(\mathrm{E}_2 - X)^{-1}$; bei S_{25} stimmen nach Rundung schon 8 Nachkommastellen.

2. Für $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 17 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$\|X\| = \sup\left\{ \left\|\begin{pmatrix} 17v_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \;\middle|\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \right\} \geqq 17.$$

Die Voraussetzung $\|X\| < 1$ in 4.14.2 ist also nicht erfüllt. Trotzdem konvergiert die Reihe: Wegen $X^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $S_k = \mathrm{E}_2 + X$ für alle $k \geqq 1$, und es ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{\infty} X^j = \lim_{k\to\infty} S_k = \mathrm{E}_2 + X\,.$$

Auch $\mathrm{E}_2 + X = (\mathrm{E}_2 - \mathrm{X})^{-1}$ ist erfüllt.

3. Jetzt sei $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wegen $X\binom{0}{1} = \binom{3}{1}$ gilt $\|X\| \geqq \sqrt{3^2+1} > 1$. Die Potenzen ergeben sich (für $j \in \mathbb{N}$) als $X^j = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. [Beweis durch Induktion.] Damit ergeben sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} X^j = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 3j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{k} 1 & \sum\limits_{j=0}^{k} 3j \\ 0 & \sum\limits_{j=0}^{k} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 3\frac{(k+1)k}{2} \\ 0 & k+1 \end{pmatrix};$$

offenbar konvergiert die Folge der Partialsummen *nicht*, und die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} X^j$ *divergiert*.

(Die Matrix $E_2 - X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist auch offensichtlich nicht invertierbar.)