6.5 Anwendung der Eigenwerttheorie: rekursiv definierte Folgen

6.5.1 Die Fibonacci-Folge: geschlossene Darstellung. Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch die Startwerte $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und dann $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir beschreiben diese Rekursion durch Multiplikation mit einer Matrix: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Jetzt setzen wir $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und bestimmen die Eigenwerte und Eigenräume dieser Matrix: Aus $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{E}_2) = \lambda^2 - \lambda - 1$ erhalten wir die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mit Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ mit Eigenraum $V(\lambda_2) = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir verwenden jetzt die Transformationsmatrix $T := \left(\begin{smallmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; es gilt $T^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ und $T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich $A^n\binom{1}{0} = T\left(T^{-1}A^nT\right)T^{-1}\binom{1}{0} = T\left(T^{-1}AT\right)^n T^{-1}\binom{1}{0}$. Wir werten aus:

$$\begin{aligned}
A^n\tbinom{1}{0} &= \quad T \quad \left(T^{-1}AT\right)^n \quad T^{-1} \quad \tbinom{1}{0} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und erhalten damit die *geschlossene Darstellung*: $$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

(*Ja*, dieser komplizierte Ausdruck liefert wirklich für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.)

6.5.2 Die Fibonacci-Folge: asymptotisches Verhalten.
Jetzt wollen wir begründen, dass sich die Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ an den Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ annähern; dass also $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gilt.

Mit der geschlossenen Darstellung sieht das zwar zunächst schwierig aus:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = ???$$

Mit geeigneten Abkürzungen sieht man aber doch, wie man weiter kommt: Wir setzen $a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dann gilt $|b| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}+1}{2} = a$ und deswegen $|\frac{b}{a}| < 1$. Nach 2.5.8 haben wir also $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(\frac{b}{a})^n = 0$, und unser Grenzwert wird zu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^{n+1}\left(1 - (\frac{b}{a})^{n+1}\right)}{a^n\left(1 - (\frac{b}{a})^{n}\right)} \\
&= a \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1 - (\frac{b}{a})^{n+1}}{1 - (\frac{b}{a})^{n}} = a\, \frac{1 - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(\frac{b}{a})^{n+1}}{1 - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(\frac{b}{a})^{n}} = a\,.
\end{aligned}$$

6.5.3 Asymptotik der Fibonacci-Folge.
Es gilt $\quad \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist bekannt als *goldener Schnitt*.
Sie spielt auch bei der Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (und damit auf unserem Titelbild) eine wichtige Rolle.

6.5.4 Beispiele. In 2.1.6 und 2.1.7 haben wir zwei rekursive Definitionen angegeben: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wurde definiert durch

$$b_1 := 0,\ b_2 := 1 \text{ und } \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\colon b_n := b_{n-1} + 2\, b_{n-2};$$

die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wurde definiert durch

$$c_1 := 0 \text{ und } \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\colon c_n := 2\, c_{n-1} + (-1)^n\,.$$

Wir haben dann in 2.1.7 auch nachgewiesen, dass die beiden Folgen übereinstimmen.

Jetzt wollen wir eine geschlossene Darstellung (ohne rekursiven Rückgriff) für die Folgen angeben.

Für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden wir die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; offensichtlich gilt

$$A\begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1} + 2b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind -1 und 2, als zugehörige Eigenvektoren können wir $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ nehmen. Mit der Transformationsmatrix $T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir $T^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $T^{-1}AT = B := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, also $A = (TT^{-1})A(TT^{-1}) = T(T^{-1}AT)T^{-1} = TBT^{-1}$. Es gilt $B^n = \left(\begin{smallmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{smallmatrix}\right)$, und mit

$$A^{n-1} = (TBT^{-1})^{n-1} = TB^{n-1}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n & (-1)^n 2 + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^{n+1}2 + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A\left(A\begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix}\right) = \cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n & (-1)^n 2 + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^{n+1}2 + 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^{n-1} \\ 2^{n-1} + (-1)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Es gilt also $b_n = \frac{1}{3}(2^{n-1} + (-1)^n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Hinter „$\cdots$“ steckt eine vollständige Induktion.)

Für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden wir $C := \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$D := S^{-1}CS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } C^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{3}(-2^n + (-1)^n) \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Wegen $C\left(\begin{smallmatrix} c_{n-1} \\ (-1)^{n-1} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2c_{n-1} - (-1)^{n-1} \\ (-1)^n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2c_{n-1} + (-1)^n \\ (-1)^n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c_n \\ (-1)^n \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_n \\ (-1)^n \end{pmatrix} = C^{n-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ -1 \end{pmatrix} = C^{n-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^{n-1} - (-1)^{n-1}) \\ -(-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^{n-1} + (-1)^n) \\ (-1)^n \end{pmatrix}$$

und daraus $c_n = \frac{1}{3}(2^{n-1} + (-1)^n) = b_n$.