Lösungen quadratischer Gleichungen in komplexen Zahlen

Richard Schmähl, Markus J. Stroppel

Zusammenfassung

Die gängigen Lösungsformeln für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, p-q-Formel) benutzen eine Wurzelfunktion, deren Erweiterung ins Komplexe problematisch ist. Wir zeigen auf, wie diese Formeln im Komplexen weiter sinnvoll interpretiert werden können, und wie man quadratische Gleichungen explizit lösen kann: durch Polarkoordinaten, Koeffizientenvergleich oder geometrische Überlegungen.

1 Die Mitternachtsformel und ihr Problem

Gelegentlich steht man vor dem Problem, dass man die Nullstellen eines quadratischen Polynoms der Form

$$p(X) = aX^2 + bX + c, \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{K},\ a \neq 0$$

finden muss. Zum Beispiel tritt diese Fragestellung auf, wenn man die Eigenwerte[1] einer 2×2-Matrix bestimmen will.

Dazu gibt es verschiedene Lösungswege; je nach Land und Schultyp lernt man wenigstens einen davon kennen[2]. Wenn alle Koeffizienten reell sind und $b^2 - 4ac \geqq 0$ gilt, so sind die Nullstellen x_1 und x_2 durch die „Mitternachtsformel"

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben. Äquivalent dazu ist die „p-q-Formel": Man bringt die Gleichung $aX^2 + bX + c = 0$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{a}$ auf die Form $X^2 + pX + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$, dann sind die Lösungen gegeben durch

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

[1] Vgl. `https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Eigenvektoren/`

[2] innerhalb von Baden-Württemberg an allgemein bildenden Gymnasien allerdings einen anderen als an technischen Gymnasien …

Doch was ist, wenn $b^2 - 4ac < 0$ gilt? Oder wenn – noch schlimmer – ein solcher Größenvergleich gar nicht erst möglich ist, da (mindestens) ein Koeffizient komplex ist?

Auch in diesen Fällen lässt sich die Mitternachtsformel anwenden – zumindest bei passender formaler Interpretation: Wir fassen „ $w_{1|2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ “ auf als
„*man nehme für w_1 und w_2 nacheinander die beiden*[3] *Zahlen, deren Quadrat jeweils genau $b^2 - 4ac$ ergibt*“.

In diesem Sinn werden wir die Schreibweise „$\pm\sqrt{z}$“ ab jetzt verwenden für beliebige $z \in \mathbb{C}$ (und die Anführungszeichen weglassen).

Mit dieser Interpretation der Schreibweise liefert die Mitternachtsformel also

$$x_1 = \frac{-b + w_1}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + w_2}{2a}\,.$$

Der *Kombination* dieser zwei Formeln haben wir auch für $b^2 - 4ac < 0$ oder komplexe a, b, c einen Sinn gegeben – sie sollten uns zusammen die *beiden* Nullstellen des Polynoms $p(X) = aX^2 + bX + c$ liefern.

Und in der Tat zeigt eine kurze Kontrollrechnung, dass sich auch in diesen Fällen

$$p\left(\frac{-b + w_1}{2a}\right) = 0, \qquad p\left(\frac{-b + w_2}{2a}\right) = 0$$

ergibt, unabhängig vom Vorzeichen von $b^2 - 4ac$, und tatsächlich unabhängig vom verwendeten Rechenbereich[4]. Also sind $x_1 = \frac{-b+w_1}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b+w_2}{2a} = \frac{-b-w_1}{2a}$ die[5] Lösungen unserer quadratischen Gleichung $aX^2 + bX + c = 0$.

Damit haben wir nachgerechnet, dass die Mitternachtsformel allgemein für Polynome vom Grad 2 mit beliebigen komplexen Koeffizienten die korrekten Nullstellen liefert.

Da wir uns in den meisten Fällen sowieso für *alle* Nullstellen interessieren, stört uns hier nicht, dass wir im allgemeinen Fall keine Regel[6] haben, welche der beiden Lösungen von $w^2 = b^2 - 4ac$ jetzt als w_1 und welche als w_2 genommen werden soll (bei reellen a, b, c und $b^2 - 4ac > 0$ war die Regel: w_1 ist die positive Lösung).

[3] Es ist sicher $w_2 = -w_1$; wenn $b^2 - 4ac = 0$ ist, fallen w_1 und w_2 natürlich zusammen.

[4] Eine *sehr* allgemeine Fassung der Anforderungen an den Rechenbereich scheint zu sein: Ein Ring (siehe [1, 1.7.5]), in dem 2 multiplikativ invertierbar ist, in dem a, b, c und eine Lösung w_1 von $w^2 = b^2 - 4ac$ liegen, und $ab = ba$, $aw_1 = w_1 a$ und $bw_1 = w_1 b$ gelten.

[5] Es gibt auch in den komplexen Zahlen maximal zwei Lösungen; diese fallen genau dann zusammen, wenn $w_1 = w_2$ gilt.

[6] Das Problem ist noch delikater: Es gibt keine Regel, die uns eine der beiden Lösungen von $w^2 = z$ so auswählt, dass die ausgewählte Lösung *stetig* von $z \in \mathbb{C}$ abhängt.
Siehe `https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Wurzelziehen/`

2 Konkrete Berechnung

Es bleibt jedoch das Problem, eine Lösung w von $w^2 = b^2 - 4ac$ explizit zu finden.

Im Fall reeller Koeffizienten a, b, c mit $b^2 - 4ac < 0$ ist es nicht unüblich, willkürlich[7] aber suggestiv $\sqrt{-1}$ für die komplexe Zahl i zu schreiben und entsprechend dann $\sqrt{t} := \mathrm{i}\,\sqrt{-t}$ für beliebige negative reelle Zahlen t.

Beispiel: Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

In diesem Fall ist das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$, womit wir die Eigenwerte

$$\lambda_{1|2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

erhalten.

Bei diesem Beispiel war es leicht, die Lösungen zu finden, weil unter dem Wurzelzeichen immer noch eine reelle (wenn auch negative) Zahl stand (nämlich $t = -4$).

Ist hingegen $b^2 - 4ac = \xi + \eta\,\mathrm{i}$ eine allgemeine komplexe Zahl (dargestellt mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}$), so gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten, die Lösungen auszurechnen:

(a) Berechnung über die Polarkoordinaten:

Gilt $b^2 - 4ac = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, so sind die Lösungen von $w^2 = b^2 - 4ac$ gegeben durch (siehe [1, 1.8.4])

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r}\,\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ w_2 &= \sqrt{r}\,\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right). \end{aligned}$$

Dieser Weg bietet sich an, wenn die Polarkoordinaten schon bekannt sind oder aber das Argument φ „ablesbar" ist[8], zum Beispiel wenn $\xi = 0$ oder wenn $\frac{\eta}{\xi} \in \left\{-\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}\right\}$.

Man kann auch $\frac{\eta}{\xi} = \tan(\varphi)$ und eine geeignete Umkehrfunktion zum Tangens verwenden. Dabei muss man aber aufpassen, dass man die richtige wählt – passend zum Quadranten der Zahlenebene, in dem die Zahl $\xi + \eta\,\mathrm{i}$ liegt.

[7] Diese willkürliche Regel zur Auswahl einer der Lösungen ist nur suggestiv, so lange man sie nicht auf beliebige komplexe Zahlen r auszudehnen versucht.

[8] … womöglich als Winkel in einer Skizze in der komplexen Zahlenebene – siehe Abb. 1.

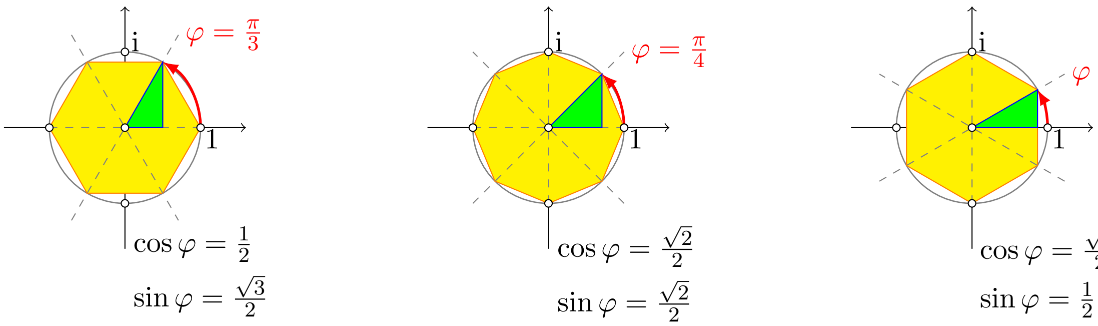

Abbildung 1: Die einfachsten Argumente komplexer Zahlen.

(b) Vergleich von Real- und Imaginärteil:

Wir wählen den Ansatz $w = x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $w^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$, was uns auf das folgende (nicht lineare) Gleichungssystem führt:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \xi \\ 2xy &= \eta\,. \end{aligned}$$

O. B. d. A.[9] sei $\eta \neq 0$ und somit weder x noch y gleich 0. Insbesondere dürfen wir durch x teilen. Lösen wir also die zweite Gleichung nach y auf und setzen dies in die erste ein, erhalten wir $y = \frac{\eta}{2x}$ und folglich

$$x^2 - \frac{\eta^2}{4x^2} = \xi$$

$$x^4 - \xi x^2 - \frac{\eta^2}{4} = 0$$

Durch Substitution $u := x^2$ erhalten wir zuerst $u = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}$. Das negative Vorzeichen vor der Wurzel ist aber ausgeschlossen, weil u (als Quadrat der *reellen* Zahl x) nicht negativ sein kann. Also ist

$$u = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}$$

[9] „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ (gelegentlich auch „Ohne Beachtung / Berücksichtigung der Aufgabenstellung / des Autors“ oder „Ohne Begeisterung der Adressaten“, seltener „Offensichtlich bedingt durch Alkohol“):
Eine Floskel, die besagt, dass eine – meist zur Vereinfachung der Beweisführung – getroffene Zusatzannahme die Allgemeingültigkeit nicht einschränkt, weil die durch die Zusatzannahme ignorierten Fälle bereits behandelt (oder einfach) sind.
Im vorliegenden Fall ist dies erfüllt: Der Fall $\eta = 0$ bedeutet, dass $b^2 - 4ac$ reell ist. Dieser Fall wurde bereits behandelt!

und somit

$$x_{1|2} = \pm\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}\,.$$

Hieraus erhält man

$$y^2 = x^2 - \xi = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2} - \xi = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}\,.$$

Wir müssen noch (passend zur Wahl von $x_{1|2}$) die richtige aus den zwei Möglichkeiten für $y_{1|2}$ auswählen. Das korrekte Vorzeichen von $y_{1|2}$ ergibt sich hierbei (wegen $2xy = \eta$) aus den Vorzeichen von η und $x_{1|2}$:

Ist $\eta > 0$, sind die Lösungen von $w^2 = \xi + \eta\,\mathrm{i}$ gegeben durch

$$w_{1|2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}\right),$$

im Fall $\eta < 0$ lauten die Lösungen

$$w_{1|2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}\right).$$

Dieser Weg über den Vergleich von Real- und Imaginärteil ist prinzipiell immer anwendbar (es gilt stets $\xi^2+\eta^2 \geqq 0$ und $\xi^2+\eta^2 \geqq |\xi|$, das heißt die benötigten Wurzeln existieren in $\mathbb{R}$), er führt aber nicht immer zu „schönen“ Ausdrücken.

Beispiel: Wir interessieren uns für die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1+\mathrm{i} \\ -2 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1+2\mathrm{i} \\ -4+4\mathrm{i} & -4 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Polynome lauten

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \lambda^2 - (2-3\mathrm{i})\lambda - 2 - 4\mathrm{i} \\ \chi_B(\mu) &= \mu^2 - 4 + 4\mathrm{i}\,; \end{aligned}$$

dabei wurden verschiedene Variablennamen verwendet, um später die Übersicht zu wahren.

Für die Matrix A erhalten wir die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_{1|2} &= \frac{2-3\mathrm{i} \pm \sqrt{(2-3\mathrm{i})^2 + 8 + 16\mathrm{i}}}{2} \\ &= \frac{2-3\mathrm{i} \pm \sqrt{3+4\mathrm{i}}}{2}. \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $w = x + y\,\mathrm{i}$ und $w^2 = \xi + \eta\,\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i}$ kommen wir auf die Lösungen

$$w_{1|2} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^3+4^2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^3+4^2}}{2}}\right) = \\ = \pm\,(2+\mathrm{i})$$

und somit auf die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2 - \mathrm{i},\ \lambda_2 = -2\mathrm{i}.$$

Man kann die Gleichung $w^2 = 3 + 4\mathrm{i}$ auch geometrisch in der Zahlenebene lösen:

Für $z = 3+4\mathrm{i}$ bestimmen wir $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Das Argument φ von $3+4\mathrm{i}$ aus der Ebene als Winkel abzulesen geht nicht so ohne Weiteres, aber eine Zahl mit dem Argument $\varphi/2$ können wir leicht konstruieren: Wir nehmen $v := z + |z| = 8 + 4\mathrm{i}$; siehe Abb. 2. Diese Zahl v hat schon das richtige Argument (für eine der gesuchten Lösungen von $w^2 = z$). Jetzt verwenden wir $|v| = 4\sqrt{5}$, um mit $v_1 := \frac{\sqrt{|z|}}{|v|}\,v = \frac{1}{4}\,v = 2 + \mathrm{i}$ eine Zahl mit dem richtigen Argument $\varphi/2$ und dem richtigen Betrag $\sqrt{|z|} = \sqrt{5}$ zu erhalten. Damit gilt $v_1^2 = z$; die zweite Lösung von $w^2 = z$ ist $v_2 := -v_2$.

Auch auf diesem Weg erhalten wir die Eigenwerte:

$\lambda_1 = \frac{2-3\mathrm{i}+v_1}{2} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$ und $\lambda_2 = \frac{2-3\mathrm{i}+v_2}{2} = \frac{2-3\mathrm{i}-v_1}{2} = \frac{-4\mathrm{i}}{2} = -2\mathrm{i}.$

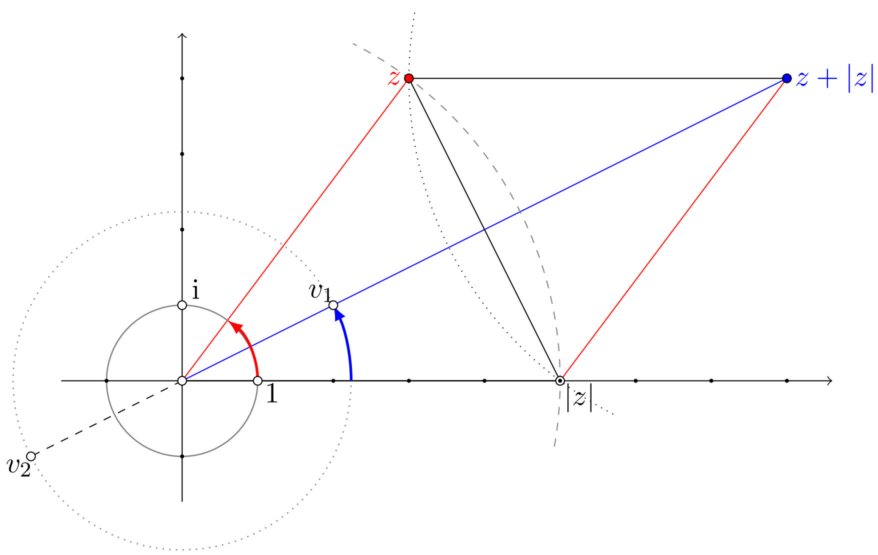

Abbildung 2: Geometrische Halbierung des Winkels

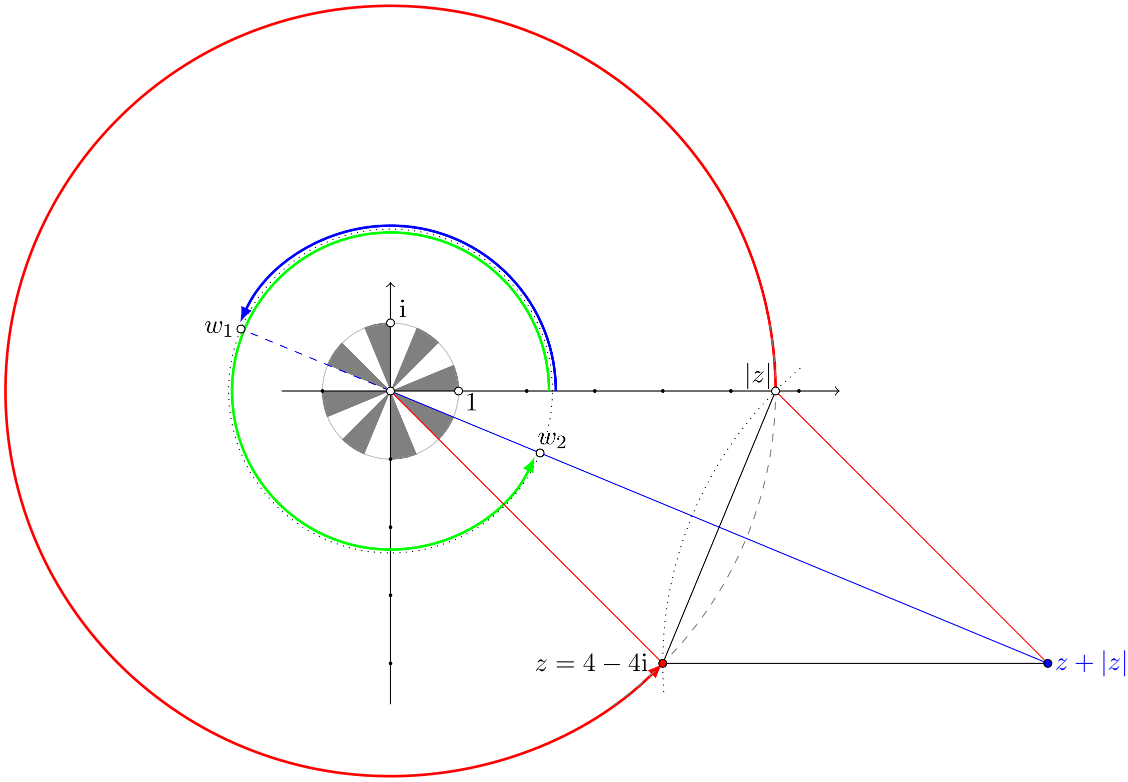

Abbildung 3: Das Argument von $4 - 4\mathrm{i}$ und die Lösungen von $w^2 = 4 - 4\mathrm{i}$.

Zur Bestimmung der Eigenwerte von B müssen wir nur $\mu^2 = 4 - 4\mathrm{i}$ lösen.

Aus $\frac{\mathrm{Im}(4-4\mathrm{i})}{\mathrm{Re}(4-4\mathrm{i})} = -1$ und etwas geometrischer Anschauung (siehe Abb. 3: Man erkennt erst das Argument von z durch eine gleichmäßige Unterteilung des Einheitskreises in 8 Teile und Abzählen, dann das Argument von w_1 bzw. w_2 durch weitere Halbierung) können wir $\arg(4 - 4\mathrm{i}) = \frac{7}{4}\pi$ ablesen und erhalten (in Polarkoordinaten, mit $\sqrt{|4 - 4\mathrm{i}|} = \sqrt{4\sqrt{1+1}} = 2\sqrt[4]{2}$) die Eigenwerte

$$\mu_1 = 2\sqrt[4]{2}\Big(\cos\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\tfrac{7}{8}\pi\right)\Big), \qquad \mu_2 = 2\sqrt[4]{2}\Big(\cos\left(\tfrac{15}{8}\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\tfrac{15}{8}\pi\right)\Big).$$

Auch hier können wir ähnlich wie vorhin die beiden Lösungen von $w^2 = 4 - 4\mathrm{i}$ leicht in der Zahlenebene skizzieren, siehe Abb. 3. Allerdings klappt es hier nicht mehr so nett, die exakten Werte von Real- und Imaginärteil der beiden Lösungen allein aus der Skizze zu erschließen.

Der zweite oben beschrieben Weg (über den Vergleich von Real- und Imaginärteil) führt uns auf die Darstellung

$$\tilde{\mu}_1 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}\,, \qquad \tilde{\mu}_2 = -\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}\,.$$

Überlegt man sich nun geometrisch die Lage der Lösungen $\mu_{1|2}$ und $\tilde{\mu}_{1|2}$ in der komplexen Zahlenebene, sieht man, dass $\mu_1 = \tilde{\mu}_2$ und $\mu_2 = \tilde{\mu}_1$ gelten. Auf diese Weise haben wir also – ganz nebenbei – auch die Sinus- und Kosinuswerte von $\frac{7}{8}\pi$ und $\frac{15}{8}\pi$ gefunden, nämlich:

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) \quad = \quad -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2\sqrt[4]{2}} \quad = \quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\
\sin\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
\cos\left(\tfrac{15}{8}\pi\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\
\sin\left(\tfrac{15}{8}\pi\right) &= -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Sie dürfen dies gerne mit Ihrem Taschenrechner oder geeigneter Software (z.B. GeoGebra, Maple, Matlab, MuPAD, Octave, WolframAlpha, …) überprüfen! Wenn Sie, um sicher zu gehen, viele Nachkommastellen erzwingen, werden Sie Unterschiede zwischen der Auswertung der Winkelfunktion und der Auswertung des Wurzelausdrucks finden – das liegt aber nicht daran, dass unsere Gleichungen nicht stimmen, sondern an Rundungs- oder Abbruchfehlern in der Software (Stichwort Maschinengenauigkeit), die durch die Angabe von weniger Nachkommstellen kaschiert werden.

Beim letzten Versuch mit Maple tauchten solche Fehler ab der 21. Nachkommastelle auf.

Ein *überzeugender* Test, ob unsere Rechnungen stimmen, geht so: Sie nehmen w_1 (oder w_2), dazu einen Stift und ein Stückchen Papier, und rechnen das Quadrat direkt aus.

Literatur

[1] Kimmerle, W. und M. J. Stroppel: *Lineare Algebra und Geometrie für Ingenieure, Mathematiker und Physiker.* Edition Delkhofen, Deilingen, 4. Aufl., 2013, ISBN 978-3-936413-25-0.