Warum man sich bei der Suche nach Extrema wünscht, dass die betrachteten Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind

Richard Schmähl, Markus J. Stroppel

Zusammenfassung

Die gängige Methode zur Bestimmung von Extrema von Funktionen in mehreren Variablen verlangen, dass die betrachtete zweimal stetig differenzierbar ist. Wir geben explizite Beispiele um zu belegen, dass die Missachtung dieser Voraussetzung in die Irre führen kann.

Wenn wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema untersuchen, haben wir eine Reihe von Werkzeugen zur Verfügung, die uns die Arbeit wesentlich erleichtern. Für Funktionen in der Klasse $\mathcal{C}^1(\Omega)$ aller stetig partiell differenzierbaren Funktionen (auf einem offenen Definitionsgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) pickt man sich üblicherweise zuallererst die *kritischen Stellen* heraus: also die Stellen $x = (x_1, \dots, x_n)^\intercal \in \Omega$, an denen der Gradient $\nabla f(x)$ verschwindet (siehe [2, 4.5.1]).

Um für eine so gefundene kritische Stelle zu entscheiden, ob dort ein lokales Extremum oder aber ein Sattelpunkt vorliegt, kann es anschließend hilfreich sein, die Hesse-Matrix an der Stelle anzuschauen. Allerdings verlangen die einschlägigen Sätze dann stärkere Voraussetzungen: Es müssen nicht nur die (als Einträge in der Hesse-Matrix verwendeten) zweiten partiellen Ableitungen existieren, sondern diese müssen alle (ebenso wie die Funktion f selbst und alle ihre ersten partiellen Ableitungen) stetig sein. Kurz gefasst ist dies die Bedingung, dass f zur Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega)$ aller auf Ω *zweimal stetig partiell differenzierbaren* Funktionen gehört (siehe [2, 4.3.8]).

Unter der Voraussetzung $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ist die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f\,(a)$ an jeder Stelle a eine reelle symmetrische Matrix, deren Definitheit (und damit gegebenenfalls der Typ einer kritischen Stelle a) sich in vielen Fällen durch ein Eigenwert-Kriterium klären lässt (siehe [2, 4.5.4, 4.5.5, 4.5.8]): Wenn an einer kritischen Stelle a alle Eigenwerte von $\mathrm{H}f\,(a)$ positiv sind, liegt ein lokales Minimum vor, bei lauter negativen Eigenwerten ein lokales Maximum, und Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen sichern einen Sattelpunkt – *wenn $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ gilt!*

Um zu erhellen, inwieweit die zusätzliche Voraussetzung wirklich relevant ist, geben wir im Folgenden einige Beispiele, bei denen die Hesse-Matrix zwar existiert, ihr unbedachter Gebrauch aber falsche Aussagen liefert.

1 Erstes Beispiel: eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit nicht symmetrischer Hesse-Matrix

Wir konstruieren zunächst eine Funktion, die einmal stetig partiell differenzierbar ist (also in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ liegt). Es wird sich herausstellen, dass diese Funktion zwar zweimal partiell differenzierbar ist, dass die zweiten partiellen Ableitungen aber wenigstens an einer Stelle nicht stetig sind (dass die Funktion also nicht in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ liegt).

Weitere Beispiele von Funktionen werden wir dann später (in den Abschnitten 2 und 3) erhalten, indem wir zu unserer ersten Funktion verschiedene Polynomfunktionen addieren.

1.1 Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } x \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } x = \binom{0}{0}\,. \end{cases}$$

Wegen der Fallunterscheidung in der Definition ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, ob die Funktion f an der Stelle $\binom{0}{0}$ tatsächlich stetig ist. Die partiellen Ableitungen an dieser Stelle sind leicht zu bestimmen, aber der Nachweis ihrer Stetigkeit wird ebenfalls etwas Mühe bereiten. Schließlich werden wir zwar ohne große Probleme die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen auch an der Stelle $\binom{0}{0}$ erkennen, diese sind aber nicht stetig (was wir auf indirektem Weg daraus erkennen, dass die Hesse Matrix an der Stelle $\binom{0}{0}$ nicht symmetrisch ist).

An allen von $\binom{0}{0}$ verschiedenen Stellen ist die Funktion f nach allgemeinen Sätzen stetig (als Quotient von Polynomen, siehe [2, 1.12.4]), und auch beliebig oft stetig partiell differenzierbar (siehe [2, 2.2.1]). Zum Nachweis der Stetigkeit der Funktion an der Stelle $\binom{0}{0}$ verwenden wir geeignete Abschätzungen.

Für $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \left| f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| &= \left| \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} \right| = |x_1 x_2| \frac{|x_1^2 - 4x_2^4|}{|x_1^2 + x_2^4|} \\ &\leqq |x_1 x_2| \frac{|x_1^2| + |4x_2^4|}{x_1^2 + x_2^4} \leqq |x_1 x_2| \frac{4|x_1^2| + 4|x_2^4|}{x_1^2 + x_2^4} \\ &= 4\,|x_1 x_2| \leqq 4 \max\{|x_1|^2\,, |x_2|^2\} \\ &\leqq 4(x_1^2 + x_2^2) = 4\,|x|^2 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $x \to \binom{0}{0}$, also $|x| \to 0$:

$$0 \leqq \lim_{x \to \binom{0}{0}} \left| f\,(x) - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \leqq \lim_{x \to \binom{0}{0}} 4\,|x| = 0,$$

also ist f stetig in $\binom{0}{0}$.

Um $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ einzusehen, bleibt noch nachzuweisen, dass f an der Stelle $\binom{0}{0}$ stetig partiell differenzierbar ist (an allen anderen Stellen folgt das ja aus allgemeinen Sätzen). Dazu müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_1} f$ und $\partial_{x_2} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_2} f$ berechnen.

Die partiellen Ableitungen an der Stelle $x = \binom{0}{0}$ ergeben sich sehr leicht, weil die Funktion f entlang der Koordinatenachsen konstant ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (0 - 0) = 0 \,, \\
\partial_{x_2} f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (0 - 0) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Für $x \neq \binom{0}{0}$ ergibt sich (mit Hilfe von Produkt- und Quotientenregel, siehe [2, 2.2.1]):

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} f\,(x) &= \frac{(3x_1^2 x_2 - 4x_2^5)\,(x_1^2 + x_2^4) - (x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5)\,2x_1}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\
&= \frac{3x_1^4 x_2 - x_1^2 x_2^5 - 4x_2^9 - 2x_1^4 x_2 + 8x_1^2 x_2^5}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\
&= \frac{x_1^4 x_2 + 7x_1^2 x_2^5 - 4x_2^9}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\
\partial_{x_2} f\,(x) &= \frac{(x_1^3 - 20x_1 x_2^4)\,(x_1^2 + x_2^4) - (x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5)\,4x_2^3}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\
&= \frac{x_1^5 - 19x_1^3 x_2^4 - 20x_1 x_2^8 - 4x_1^3 x_2^4 + 16x_1 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\
&= \frac{x_1^5 - 23x_1^3 x_2^4 - 4x_1 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^4)^2}
\end{aligned}$$

Analog wie oben beim Nachweis der Stetigkeit von f verwenden wir die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
|\partial_{x_1} f\,(x)| &\leqq \frac{x_1^4\,|x_2| + 7x_1^2 x_2^4\,|x_2| + 4x_2^8\,|x_2|}{x_1^4 + 2x_1^2 x_2^4 + x_2^8} \\
&\leqq \frac{x_1^4\,|x_2|}{x_1^4} + \frac{7x_1^2 x_2^4\,|x_2|}{2x_1^2 x_2^4} + \frac{4x_2^8\,|x_2|}{x_2^8} \\
&\leqq \frac{17}{2}\,|x_2| \xrightarrow{x \to \binom{0}{0}} 0 \,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\partial_{x_2} f(x)| &\leqq \frac{x_1^4 |x_1| + 23x_1^2x_2^4 |x_1| + 4x_2^8 |x_1|}{x_1^4 + 2x_1^2x_2^4 + x_2^8} \\
&\leqq \frac{x_1^4 |x_1|}{x_1^4} + \frac{23x_1^2x_2^4 |x_1|}{2x_1^2x_2^4} + \frac{4x_2^8 |x_1|}{x_2^8} \\
&\leqq \frac{33}{2} |x_1| \xrightarrow{x \to \binom{0}{0}} 0 \,.
\end{aligned}
$$

Damit sind $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ stetig an der Stelle $\binom{0}{0}$, und damit stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Auch die zweiten partiellen Ableitungen existieren alle. Dies bleibt wieder allein an der Stelle $\binom{0}{0}$ problematisch, wir müssen die zweiten[1] partiellen Ableitungen $\partial_{x_jx_k} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_j} f\right)$ dort (durch direkten Rückgriff auf die Definitionen [2, 2.1.1, 2.1.3, 4.3.1]) als Differentialquotienten bestimmen:

$$
\begin{array}{rclclcr}
\partial_{x_1x_1} f(x) & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_{x_1} f\binom{h}{0} - \partial_{x_1} f\binom{0}{0}}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} & = & 0\,, \\
\partial_{x_1x_2} f(x) & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_{x_1} f\binom{0}{h} - \partial_{x_1} f\binom{0}{0}}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{-4h^9}{h^8} - 0}{h} & = & -4\,, \\
\partial_{x_2x_1} f(x) & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_{x_2} f\binom{h}{0} - \partial_{x_2} f\binom{0}{0}}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} & = & 1\,, \\
\partial_{x_2x_2} f(x) & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{\partial_{x_2} f\binom{0}{h} - \partial_{x_2} f\binom{0}{0}}{h} & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} & = & 0\,.
\end{array}
$$

Wegen $\nabla f\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$ ist $\binom{0}{0}$ eine kritische Stelle.

Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f\binom{0}{0} := \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_1} f\binom{0}{0} & \partial_{x_1x_2} f\binom{0}{0} \\ \partial_{x_2x_1} f\binom{0}{0} & \partial_{x_2x_2} f\binom{0}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht symmetrisch!

Damit ist klar: Die Funktion f gehört nicht zu $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$; sie kann nicht zweimal stetig partiell differenzierbar sein (weil sonst nach dem Satz von Schwarz [2, 4.3.10] die Hesse-Matrix symmetrisch wäre).

Mit $\lambda_1\lambda_2 = \det \mathrm{H}f\binom{0}{0} = 4$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Sp}\,\mathrm{H}f\binom{0}{0} = 0$ ergeben sich die Eigenwerte als $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$. Das Definitheitskriterium [2, 4.5.5] geht hier ganz offensichtlich schief: die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind nicht reell, wir können also nicht davon reden, ob diese positiv oder negativ seien, und es hat gar keinen Sinn, nach positiver oder negativer Definitheit der Hesse-Matrix zu fragen.

Dass bei $\binom{0}{0}$ ein Sattelpunkt vorliegt, können wir erkennen, indem wir f auf eine geeignete Kurve einschränken, zum Beispiel die durch $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{t^2}{t}$ parametrisierte Parabel. Es gilt

$$
(f \circ C)(t) = f\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \frac{\left(t^2\right)^3 t - 4\left(t^2\right) t^5}{\left(t^2\right)^2 + t^4} = -\frac{3}{2} t^3.
$$

[1] Man beachte die Reihenfolge: Bei $\partial_{x_jx_k} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_j} f\right)$ wird zuerst nach x_j, dann nach x_k abgeleitet, siehe [2, 4.3.7].

Folglich gilt $f(x) > 0$ für alle x in der Hälfte $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 = x_2 < 0\right\}$ der von C parametrisierten Parabel, und es gilt $f(x) < 0$ für alle x in der anderen Hälfte $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 = x_2 > 0\right\}$, vgl. Abb. 1. Demnach gibt es beliebig nah an $\binom{0}{0}$ sowohl Stellen, an denen die Funktion f positive Werte annimmt, als auch Stellen, an denen sie negative Werte annimmt. Damit ist klar, dass an der kritischen Stelle $\binom{0}{0}$ kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vorliegt.

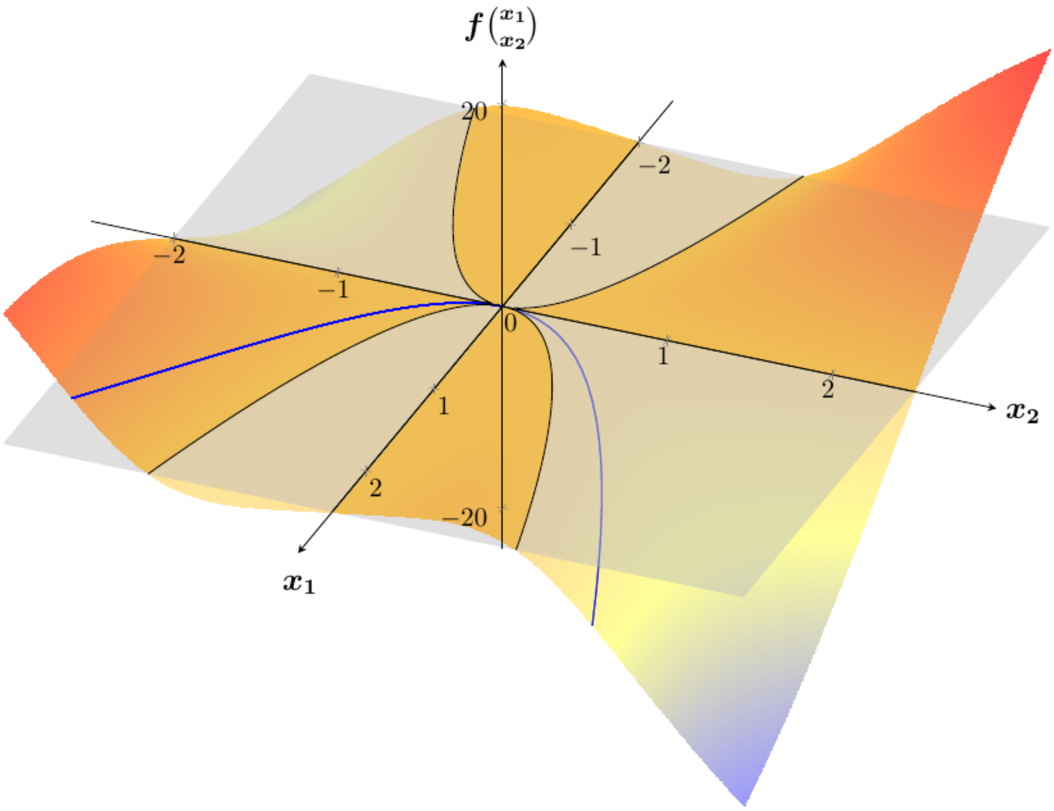

Abbildung 1: Graph von $f(x) = \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4}$ inklusive Niveaumenge zum Niveau 0, siehe 1.1.
Die blaue Kurve liegt im Graph von f, sie ist parametrisiert durch $t \mapsto \left(t^2, t, f\binom{t^2}{t}\right)^{\mathsf{T}}$.

1.2 Bemerkung. Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, das Verhalten von f in der Nähe der kritischen Stelle zu verstehen. Zum Beispiel könnten wir die Vorzeichenverteilung betrachten:

Nach Definition gilt $f\binom{0}{0} = 0$, und $f\binom{x_1}{x_2} = \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4}$ wird genau dann 0, wenn der Zähler

$$x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5 = x_1 x_2 (x_1^2 - 4x_2^4) = x_1 x_2 (x_1 + 2x_2^2)(x_1 - 2x_2^2)$$

gleich Null wird. Letzteres passiert genau dann, wenn einer der vier Faktoren Null wird. Folglich ist die Menge aller Nullstellen von f die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen ($x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$) und der beiden Parabeln $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = -2x_2^2\right\}$ und $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 2x_2^2\right\}$. Beim Übergang über eine dieser vier Linien ändert sich jeweils das Vorzeichen des Funktionswerts. Also stoßen im Ursprung $\binom{0}{0}$ Teilgebiete aneinander, auf denen die Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen haben. Es gibt also beliebig nah an $\binom{0}{0}$ Stellen, an denen der Funktionswert größer als $0 = f\binom{0}{0}$ ist, und auch Stellen, an denen der Funktionswert kleiner ist. Deswegen liegt bei der kritischen Stelle $\binom{0}{0}$ kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Die Vorzeichenverteilung kann man in Abb. 1 erkennen, es würde aber auch die viel einfachere Skizze in Abb. 2 genügen.

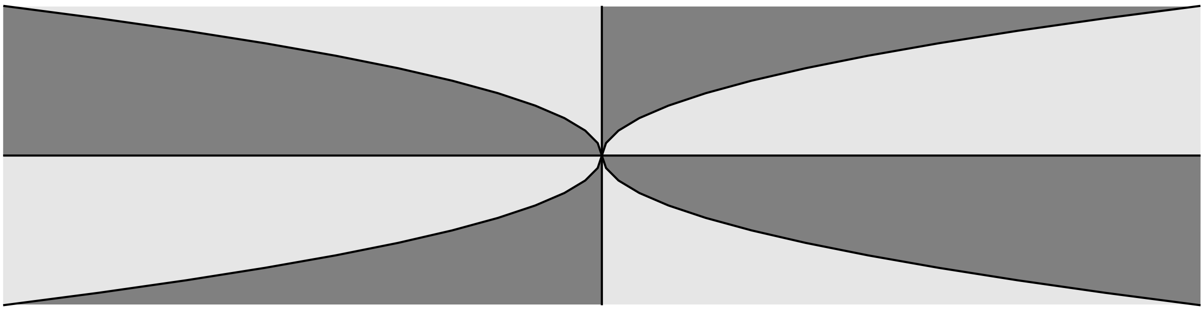

Abbildung 2: Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung der Funktion f.

1.3 Bemerkung. Der Nutzen der Hesse-Matrix (für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen) liegt darin, dass die Hesse-Matrix eine quadratische Form (also ein spezielles Polynom vom Grad 2, siehe [1, 6.1.1] und [2, 4.4.11]) beschreibt, das (bis auf Addition einer Konstanten) die gegebene Funktion in der Nähe der kritischen Stelle hinreichend genug approximiert (im Sinn des Satzes von Taylor [2, 4.4.12, 4.4.15]): Dann ist sichergestellt, dass das Verhalten der Funktion mit dem der quadratischen Form übereinstimmt, und wir können dieses an Definitheitseigenschaften der quadratischen Form ablesen. Diese Eigenschaften wiederum können wir an den Eigenwerten der symmetrischen Matrix ablesen, die diese Form beschreibt (siehe [2, 4.5.4, 4.5.5], auf der Grundlage von [1, 6.1.8]).

In unserem Fall beschreibt die (unsymmetrische) Hesse-Matrix $\mathrm{H}f\binom{0}{0} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die quadratische Form $q\binom{x_1}{x_2} = -4x_1x_2 + x_2x_1 = -3x_1x_2 = -\frac{3}{2}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2x_1$; dieselbe quadratische Form wird auch beschrieben durch die symmetrische Matrix $\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese symmetrische Matrix hat negative Determinante, und Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen. Die quadratische Form hat also einen Sattelpunkt bei $\binom{0}{0}$. Dass dies mit dem Verhalten der Funktion f übereinstimmt, ist aber ein reiner Zufall, wie unsere weiteren Beispiele (in Abschnitt 2) zeigen werden.

2 Weitere Beispiele: nicht symmetrische Hesse-Matrizen mit reellen Eigenwerten

Wir betrachten die Funktion

$$\tilde{f} := f + g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) + g(x),$$

wobei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion sei.

Als Polynomfunktion ist g beliebig oft stetig partiell differenzierbar, liegt also in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Da $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ einen Vektorraum bildet, der sowohl f als auch g enthält, liegt auch $\tilde{f} = f+g$ in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Wegen der Linearität der (in der Bildung des Differentialquotienten involvierten) Grenzwertbildung existieren auch die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_{x_1x_1}\tilde{f}(a)$, $\partial_{x_1x_2}\tilde{f}(a)$, $\partial_{x_2x_1}\tilde{f}(a)$ und $\partial_{x_2x_2}\tilde{f}(a)$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}^2$, einschließlich $a = \binom{0}{0}$. Wir erhalten

$$\nabla\tilde{f}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \nabla g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\tilde{f}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_{x_1x_1}\tilde{f}\binom{0}{0} & \partial_{x_1x_2}\tilde{f}\binom{0}{0}\\ \partial_{x_2x_1}\tilde{f}\binom{0}{0} & \partial_{x_2x_2}\tilde{f}\binom{0}{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_{x_1x_1}f\binom{0}{0} + \partial_{x_1x_1}g\binom{0}{0} & \partial_{x_1x_2}f\binom{0}{0} + \partial_{x_1x_2}g\binom{0}{0}\\ \partial_{x_2x_1}f\binom{0}{0} + \partial_{x_2x_1}g\binom{0}{0} & \partial_{x_2x_2}f\binom{0}{0} + \partial_{x_2x_2}g\binom{0}{0}\end{pmatrix}.$$

Je nach Wahl von g passieren hier – ganz nach Murphys[2] „Gesetz“– recht unterschiedliche Dinge.

2.1 Beispiel. Wir wählen als erstes Polynom $g\binom{x_1}{x_2} := \frac{3}{2}x_1^2 - x_2^2$.

Wegen $\nabla g\binom{x_1}{x_2} = \binom{3x_1}{-2x_2}$ und $\nabla f\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$ ist $\binom{0}{0}$ eine kritische Stelle von $\tilde{f} = f + g$. Ferner ist nach 1.1

$$\mathrm{H}\tilde{f}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathrm{H}f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{H}g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -4\\1 & -2\end{pmatrix},$$

die Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0}$ sind $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{2, -1\}$. Naive (aber *nicht gerechtfertigte*) Anwendung des Eigenwertkriteriums würde auf einen Sattelpunkt deuten.

Ein korrektes Argument nutzt die Einschränkungen $\tilde{f}\binom{x_1}{0} = \frac{3}{2}x_1^2$ und $\tilde{f}\binom{0}{x_2} = -x_2^2$ auf die Koordinatenachsen: Beliebig nah bei $\binom{0}{0}$ nimmt $\tilde{f}$ sowohl positive Werte (größer als $\tilde{f}\binom{0}{0} = 0$) als auch negative Werte an: Es liegt bei $\binom{0}{0}$ also tatsächlich ein Sattelpunkt von $\tilde{f}$ vor. Siehe Abb. 3.

2.2 Bemerkung. Man könnte das Verhalten von $\tilde{f}$ auch durch Betrachtung der Vorzeichenverteilung klären: Allerdings ist die Nullstellenmenge der in 2.1 betrachteten Funktion $\tilde{f}$ nicht ohne Weiteres zu bestimmen … siehe Abb. 3.

[2] *„Anything that can possibly go wrong* will *go wrong.“*

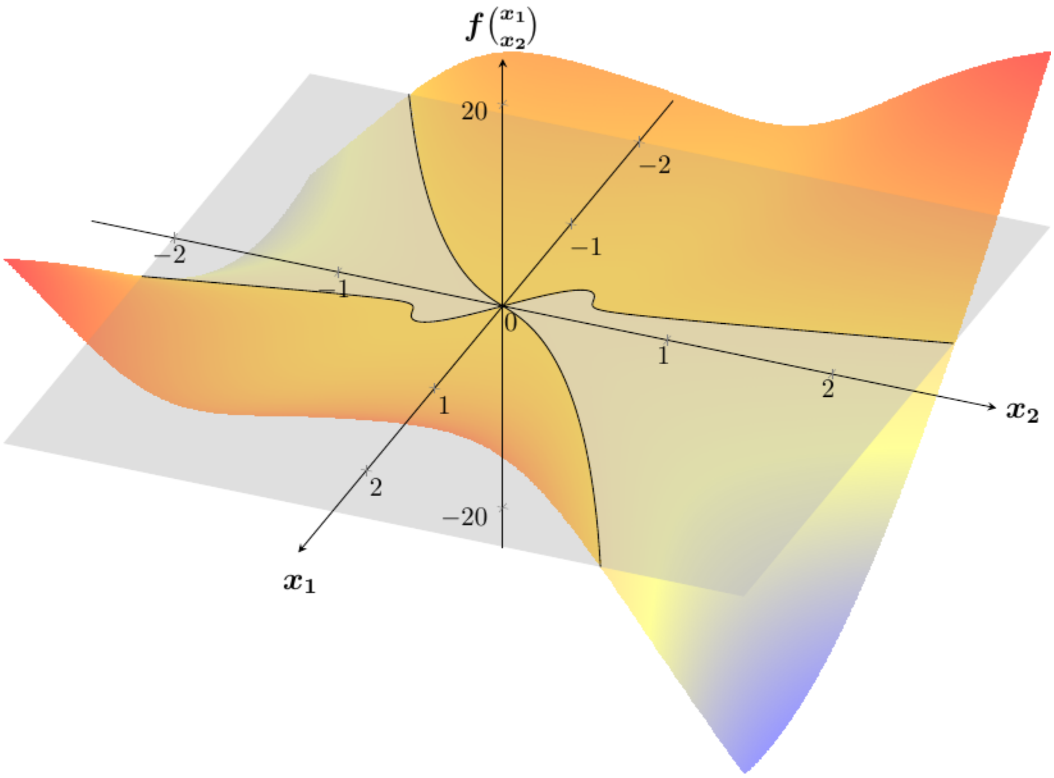

Abbildung 3: Graph von $\tilde{f}(x) = \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{3}{2}x_1^2 - x_2^2$ inklusive der Niveaumenge zum Niveau 0, siehe 2.1.

2.3 Bemerkung. Die durch $H := \mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ in 2.1 beschriebene quadratische Form

$$\begin{aligned} q_H \colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto (x_1\,x_2)\,H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (x_1\,x_2)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2x_1 - 2x_2^2 \quad = \quad 3x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

wird auch durch die symmetrische Matrix

$$\frac{1}{2}\left(H + H^{\mathsf{T}}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese symmetrische Matrix hat negative Determinante, und demnach Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen. Demnach stimmt in der Nähe von $\binom{0}{0}$ das Verhalten der in 2.1 betrachteten Funktion $\tilde{f}$ überein mit dem Verhalten der durch ihre Hesse-Matrix $\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0}$ beschriebenen quadratischen Form. Das ist aber auch hier (wie schon in 1.3) lediglich ein Zufall, wie wir spätestens in 2.6 und in 3.1 einsehen werden.

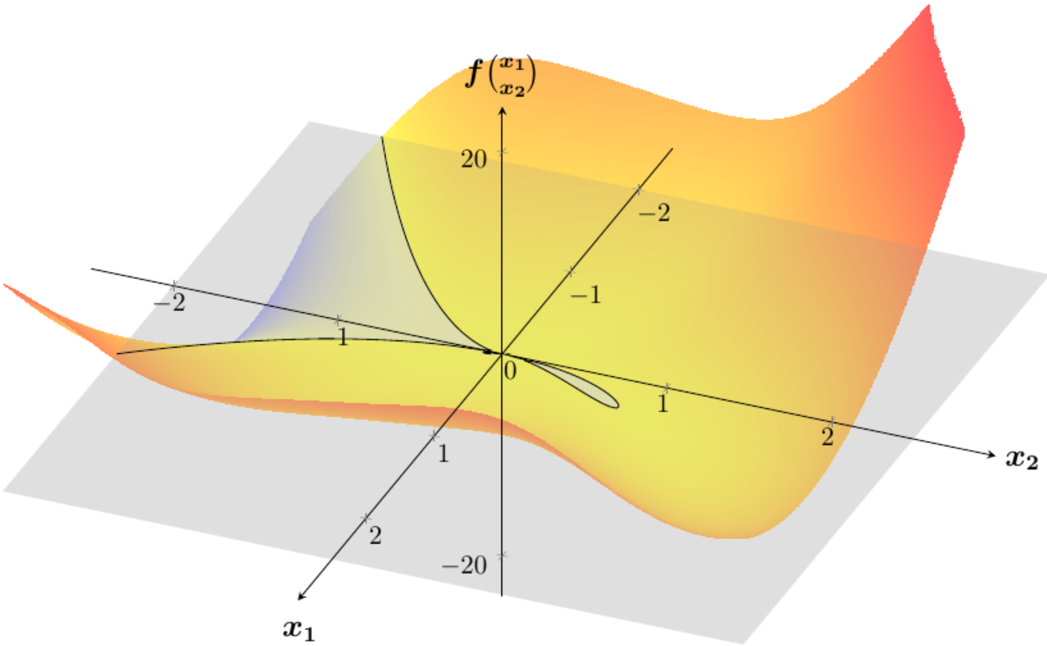

Abbildung 4: Graph von $\tilde{f}(x) = \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}x_1^2 + x_2^3$ inklusive der Niveaumenge zum Niveau 0, siehe 2.4.

2.4 Beispiel. Jetzt wählen wir das Polynom $g\binom{x_1}{x_2} := \frac{5}{2}x_1^2 + x_2^3$.

Wegen $\nabla g\binom{x_1}{x_2} = \binom{5x_1}{3x_2^2}$ ist $\binom{0}{0}$ erneut eine kritische Stelle. Es liegt hier auch wieder ein Sattelpunkt vor, wie wir dem Verhalten entlang der x_2-Achse (vgl. Abb. 4) entnehmen können: Es ist $\tilde{f}\binom{0}{x_2} = x_2^3$. Wegen $\mathrm{H}g\binom{x_1}{x_2} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich allerdings:

$$\mathrm{H}\tilde{f}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathrm{H}f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{H}g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -4\\1 & 0\end{pmatrix},$$

die Eigenwerte dieser Matrix sind $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{4, 1\}$. Wäre $\tilde{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, so würde daraus folgen, dass bei $\binom{0}{0}$ ein relatives Minimum vorliegt – wir schließen also umgekehrt, dass offenbar diese Funktion $\tilde{f}$ nicht zweimal stetig differenzierbar ist. (Da $\tilde{f} = f + g$ und die ersten partiellen Ableitungen stetig sind, können demnach nicht alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sein.)

2.5 Bemerkung. Auch in 2.4 ist die Nullstellenmenge der betrachteten Funktion $\tilde{f}$ nicht leicht zu bestimmen.

Die durch $\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0}$ beschriebene quadratische Form wird auch durch die symmetrische Matrix $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ beschrieben. Diese symmetrische Matrix hat negative Determinante, und demnach Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen.

2.6 Beispiel. Als drittes Beispiel in unserer Serie betrachten wir $g\binom{x_1}{x_2} := \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2$.

Hier gelten $\nabla g\binom{x_1}{x_2} = \binom{5(x_1-x_2)}{5(x_2-x_1)}$ und $\mathrm{H}g\binom{x_1}{x_2} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; es ergibt sich $\nabla\tilde{f}\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$ und

$$\mathrm{H}\tilde{f}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathrm{H}f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{H}g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & -5\\-5 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -9\\-4 & 5\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0}$ sind $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{11, -1\}$.

Naive (und nicht korrekte) Anwendung des Eigenwertkriteriums würde auf die Vermutung führen, dass an der kritischen Stelle $\binom{0}{0}$ ein Sattelpunkt von $\tilde{f}$ vorliegt. Nach den Erfahrungen in 2.1 und 2.4 sehen wir lieber genauer hin.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) = f(x) + g(x) &= \frac{x_1^3x_2 - 4x_1x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= x_1x_2\frac{x_1^2 - 4x_2^4}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

Im Fall $x_1x_2 = 0$ gilt $\tilde{f}(x) = \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 \geqq 0 = \tilde{f}\binom{0}{0}$. Es bleibt der Fall $x_1x_2 \neq 0$ zu betrachten.

Um festzustellen, wie sich die Funktion $\tilde{f}$ tatsächlich in der Nähe der kritischen Stelle $\binom{0}{0}$ verhält, betrachten wir die Einschränkung $\tilde{f}|_U$ auf die Umgebung $U := U_r\binom{0}{0} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < r\right\}$ mit $r = \frac{1}{8}$.

Wir nehmen zunächst $x_1^2 < 4x_2^4$ an, dann gilt insbesondere $0 \leqq |x_1| \leqq 2x_2^2$. Weil $\min\{x, -x\} \geqq -|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) = x_1x_2\frac{x_1^2 - 4x_2^4}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 &\geqq -|x_1x_2|\frac{|x_1^2 - 4x_2^4|}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &\geqq -|x_1x_2|\frac{|x_1^2|}{x_1^2 + x_2^4} - \frac{4\,|x_2^4|}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 \\ &\geqq -5\,|x_1x_2| + \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 5\,|x_1|\,|x_2| \\ &= \frac{5}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\,|x_1|\,|x_2|\right) \\ &\geqq \frac{5}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 - 8x_2^2\,|x_2|\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\,(1 - 8\,|x_2|)\right).\end{aligned}$$

Wegen unserer Einschränkung $|x_2| < \frac{1}{8}$ gilt also $\tilde{f}(x) > 0 = \tilde{f}\binom{0}{0}$, wenn $x_1^2 < 4x_2^4$.

Es bleiben noch die Stellen $\binom{x_1}{x_2} \in U$ mit $x_1^2 \geqq 4x_2^4$ (und damit $x_1^2 - 4x_2^4 \geqq 0$) zu untersuchen. Für $x_1x_2 > 0$ gilt dann $x_1x_2(x_1^2 - 4x_2^4) \geqq 0$, und aus der allgemeinen Feststellung (1) ergibt sich $\tilde{f}(x) \geqq 0 = \tilde{f}\binom{0}{0}$.

Jetzt müssen wir nur noch den Fall $x_1x_2 < 0$ betrachten. Es ist

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \frac{x_1^3x_2 - 4x_1x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} + \tfrac{5}{2}(x_1 - x_2)^2 \\
&= \frac{5x_1^3x_2 - 4x_1x_2(x_1^2 + x_2^4)}{x_1^2 + x_2^4} + \tfrac{5}{2}x_1^2 + \tfrac{5}{2}x_2^2 - 5x_1x_2 \\
&= \frac{5\overbrace{x_1^3x_2}^{<0}}{x_1^2 + x_2^4} + \tfrac{5}{2}x_1^2 + \tfrac{5}{2}x_2^2 - 9x_1x_2 \quad \geqq \quad \frac{5x_1^3x_2}{x_1^2} + \tfrac{5}{2}x_1^2 + \tfrac{5}{2}x_2^2 - 9x_1x_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \quad \tfrac{5}{2}x_1^2 + \tfrac{5}{2}x_2^2 \underbrace{- 4x_1x_2}_{>0} \quad > \quad 0\,.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\tilde{f}(x) \geqq 0 = \tilde{f}\binom{0}{0}$ für alle $x \in U_r\binom{0}{0}$. Das heißt, an der Stelle $\binom{0}{0}$ liegt ein lokales Minimum vor (vgl. Abb. 5)!

2.7 Bemerkung. Auch in 2.6 ist es nicht leicht, den alternativen Weg über die Betrachtung der Nullstellenmenge und der Vorzeichenverteilung zu gehen, weil die Bestimmung der Nullstellenmenge schwierig ist. Wir stellen fest, dass in diesem Fall die Stelle $\binom{0}{0}$ zwar zur Nullstellenmenge gehört, aber in dieser isoliert ist. Unsere Abschätzungen in 2.6 ergeben auch, dass der von der Nullstellenmenge um den Ursprung herum abgetrennte Bereich aus Stellen besteht, an denen der Funktionswert positiv ist.

2.8 Bemerkung. Die durch $\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ in 2.6 beschriebene quadratische Form wird auch durch die symmetrische Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -13 & 10 \end{pmatrix}$ beschrieben. Diese symmetrische Matrix hat negative Determinante, und ist demnach indefinit (siehe [2, 4.5.8], oder direkt mit [1, 6.1.8] und der Beobachtung, dass die Determinante als Produkt der beiden reellen Eigenwerte nur dann negativ wird, wenn diese Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben).

Wir haben aber eingesehen, dass die Funktion $\tilde{f}$ an der Stelle $\binom{0}{0}$ in diesem Fall ein lokales Minimum annimmt.

Selbst die mutwillig symmetrisierte Hesse-Matrix $\frac{1}{2}\left(\mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0} + \mathrm{H}\tilde{f}\binom{0}{0}^{\mathsf{T}}\right)$ – zu deren Betrachtung uns die Beispiele in 2.1 und 2.4 verleiten könnten – führt uns also definitiv in die Irre.

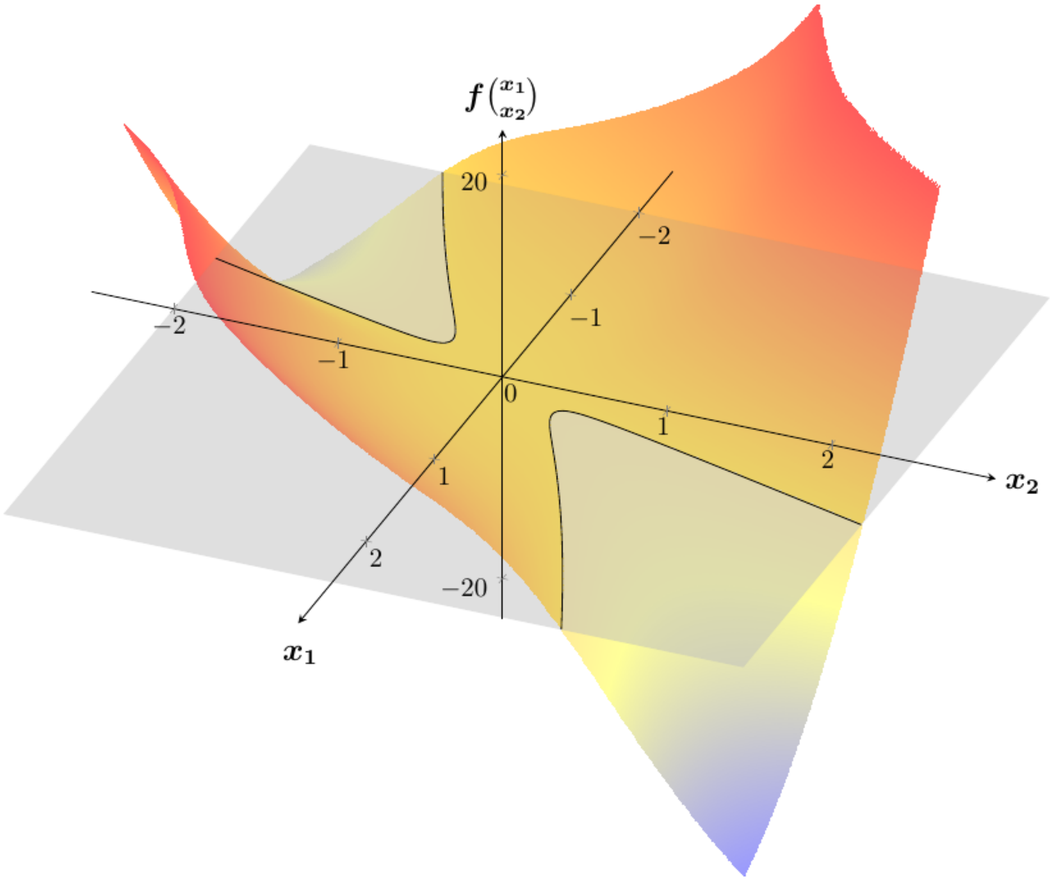

Abbildung 5: Graph von $\tilde{f}(x) = \frac{x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4} + \frac{5}{2}(x_1 - x_2)^2$ inklusive der Niveaumenge zum Niveau 0, siehe 2.6.
Im Gegensatz zu 1.1, 2.1 und 2.4 ist hier der Punkt $\binom{0}{0}$ in der Niveaumenge isoliert.

3 Ein weiteres Beispiel: symmetrische Hesse-Matrix

Bei allen bis jetzt betrachteten Beispielen (in 1.1, 2.1, 2.4 und 2.6) war die Hesse-Matrix an der Stelle $\binom{0}{0}$ *nicht* symmetrisch (und allein deswegen wurde klar, dass die fragliche Funktion nicht in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ liegt). Wir haben spätestens in 2.7 gesehen, dass uns auch die symmetrische Matrix, die die gleiche quadratische Form wie die Hesse-Matrix beschreibt, falsche Vermutungen nahe legen kann.

In diesem Abschnitt geben wir noch eine Funktion an, deren Hesse-Matrix zwar symmetrisch ist, aber trotzdem die falsche Information liefert (woraus dann wieder klar wird, dass auch die in 3.1 betrachtete Funktion nicht zu $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ gehört).

3.1 Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + \dfrac{x_1^3x_2 - 3x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^2} + \dfrac{-3x_1^3x_2 + x_1x_2^5}{x_1^2+x_2^4}, & \text{für } x \neq \binom{0}{0} \\ 0, & \text{für } x = \binom{0}{0}, \end{cases}$$

(siehe Abb. 6). Entlang der beiden Koordinatenachsen erhalten wir die Einschränkungen

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1^2 + \dfrac{0}{x_1^2} + \dfrac{0}{x_1^2}, & \text{für } x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{für } x_1 = 0\,, \end{cases}$$

beziehungsweise

$$h\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2x_2^2 + \dfrac{0}{x_2^2} + \dfrac{0}{x_2^4}, & \text{für } x_2 \neq 0 \\ 0, & \text{für } x_2 = 0\,. \end{cases}$$

Die beiden partiellen Ableitungen an der Stelle $\binom{0}{0}$ sind also

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} h\tbinom{0}{0} &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_1} h\tbinom{x_1}{0}\Big|_{x_1=0} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_1} x_1^2\Big|_{x_1=0} = 2x_1\,|_{x_1=0} = 0\,, \\ \partial_{x_2} h\tbinom{0}{0} &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_2} h\tbinom{0}{x_2}\Big|_{x_2=0} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_2} 2x_2^2\Big|_{x_2=0} = 4x_2\,|_{x_2=0} = 0\,; \end{aligned}$$

Es gilt also $\nabla h\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$.

An allen anderen Stellen berechnen wir die partiellen Ableitungen mit Hilfe der üblichen Ableitungsregeln als

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} h(x) &= 2x_1 + \tfrac{(3x_1^2x_2 - 3x_2^3)(x_1^2+x_2^2) - (x_1^3x_2 - 3x_1x_2^3)2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \tfrac{(-9x_1^2x_2 + x_2^5)(x_1^2+x_2^4) - (-3x_1^3x_2 + x_1x_2^5)2x_1}{(x_1^2+x_2^4)^2} \\ &= 2x_1 + \tfrac{3x_1^4x_2 - 3x_1^2x_2^3 + 3x_1^2x_2^3 - 3x_2^5 - 2x_1^4x_2 - 6x_1^2x_2^3}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \tfrac{-9x_1^4x_2 + x_1^2x_2^5 - 9x_1^2x_2^5 + x_2^9 + 6x_1^4x_2 - 2x_1^2x_2^5}{(x_1^2+x_2^4)^2} \\ &= 2x_1 + \frac{x_1^4x_2 - 6x_1^2x_2^3 - 3x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{-3x_1^4x_2 - 10x_1^2x_2^5 + x_2^9}{(x_1^2+x_2^4)^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_2} h(x) &= 4x_2 + \tfrac{(x_1^3 - 9x_1x_2^2)(x_1^2+x_2^2) - (x_1^3x_2 - 3x_1x_2^3)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \tfrac{(-3x_1^3 + 5x_1x_2^4)(x_1^2+x_2^4) - (-3x_1^3x_2 + x_1x_2^5)4x_2^3}{(x_1^2+x_2^4)^2} \\ &= 4x_2 + \tfrac{x_1^5 - 9x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2^2 - 9x_1x_2^4 - 2x_1^3x_2^2 + 6x_1x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \tfrac{-3x_1^5 - 3x_1^3x_2^4 + 5x_1^3x_2^4 + 5x_1x_2^8 + 12x_1^3x_2^4 - 4x_1x_2^8}{(x_1^2+x_2^4)^2} \\ &= 4x_2 + \frac{x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 - 3x_1x_2^4}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{-3x_1^5 + 14x_1^3x_2^4 + x_1x_2^8}{(x_1^2+x_2^4)^2}\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Differentialquotienten erhalten wir daraus

$$\mathrm{H}h\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

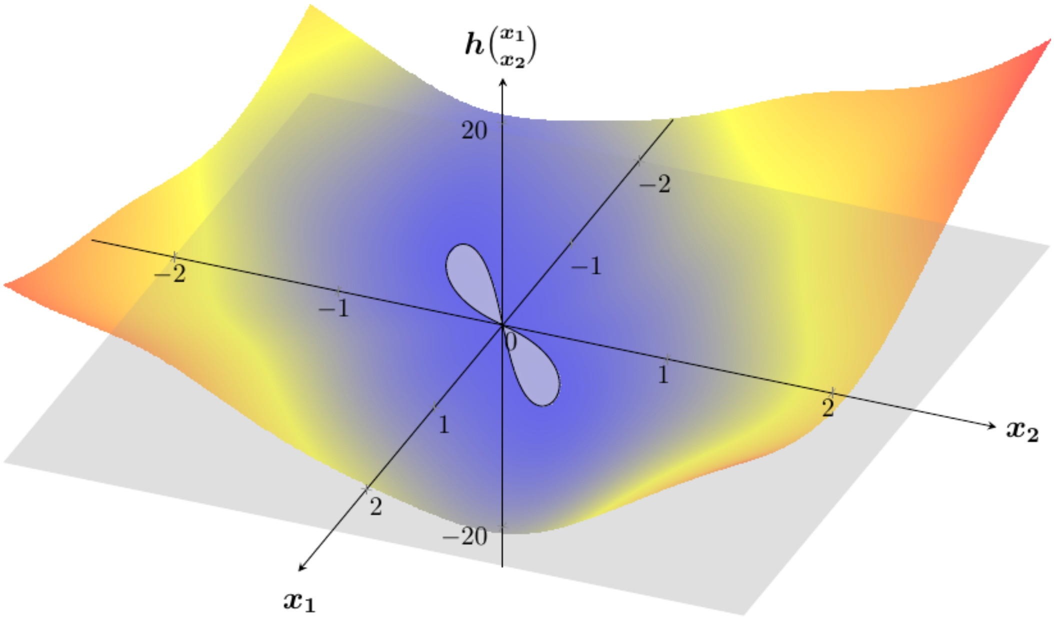

Abbildung 6: Graph von $h(x) = \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + \dfrac{x_1^3 x_2 - 3x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} + \dfrac{-3x_1^3 x_2 + x_1 x_2^5}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{für } x \neq \binom{0}{0} \\ 0, & \text{für } x = \binom{0}{0} \end{cases}$
inklusive Niveaumenge zum Niveau 0, siehe 3.1.

Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}h\binom{0}{0}$ ist symmetrisch, ihre Eigenwerte sind $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\}$. Beide Eigenwerte sind positiv (für $3-\sqrt{5}$ folgt das schnell daraus, dass $3^2 = 9$ größer ist als $\sqrt{5}^2 = 5$).

Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}h\binom{0}{0}$ ist also positiv definit.

Hieraus darauf zu schließen, dass bei $\binom{0}{0}$ ein lokales Minimum für h vorliegt, ist aber ein Trugschluss: Für $0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1^2 + \frac{x_1^4 - 3x_1^4}{x_1^2 + x_1^2} + \frac{-3x_1^4 + x_1^6}{x_1^2 + x_1^4} = \frac{x_1^2}{1+x_1^2}(3x_1^2 - 1) < 0\,,$$

aber andererseits ist $h\binom{x_1}{0} = x_1^2$ nie negativ. Beliebig nah an $\binom{0}{0}$ nimmt die Funktion h also sowohl negative Werte (kleiner als $h\binom{0}{0} = 0$) als auch positive Werte an: Hier liegt ein Sattelpunkt vor. (Man erkennt die Vorzeichenverteilung und den Sattelpunkt auch in Abb. 6.)

3.2 Folgerung. *Die in 3.1 betrachtete Funktion h ist nicht zweimal stetig partiell differenzierbar.*

4 Fazit

Wir sehen also: Die Einschränkung in [2, 4.5.5 ff]. auf Elemente von $\mathcal{C}^2(\Omega)$ (also auf zweimal *stetig* partiell differenzierbare Funktionen) ist nötig: Wenn wir zulassen, dass die zweiten partiellen Ableitungen unstetig sind, kann die Einordnung der kritischen Stellen nach diesen Kriterien schlichtweg ein falsches Ergebnis liefern oder sogar unmöglich sein.

Konkret haben wir Beispiele für die folgenden Situationen vorgestellt:

1.1 Die Hesse-Matrix H ist nicht symmetrisch, und hat keine reellen Eigenwerte.
Es liegt ein Sattelpunkt vor (den man an der Vorzeichenverteilung erkennen kann, siehe 1.2).
Die Symmetrisierung $\frac{1}{2}(H + H^\mathsf{T})$ hat Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen (siehe 1.3), und ist also indefinit.

2.1 Die Hesse-Matrix H ist nicht symmetrisch, hat reelle Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen, und es liegt ein Sattelpunkt vor.
Auch die Symmetrisierung hat Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen (siehe 2.3).

2.4 Die Hesse-Matrix H ist nicht symmetrisch, hat zwei positive reelle Eigenwerte, und es liegt ein Sattelpunkt vor.
Die Symmetrisierung hat Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen (siehe 2.5).

2.6 Die Hesse-Matrix ist nicht symmetrisch, hat reelle Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen, und es liegt ein lokales Extremum vor.
Die Symmetrisierung hat Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen (siehe 2.8).

3.1 Die Hesse-Matrix ist symmetrisch, aber ihre Definitheitseigenschaften geben nicht das Verhalten der Funktion in der Nähe der kritischen Stelle wieder.

In allen diesen Beispielen handelt es sich um Funktionen in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, bei denen die zweiten partiellen Ableitungen existieren, aber nicht alle stetig sind.

Literatur

[1] Kimmerle, W. und M. J. Stroppel: *Lineare Algebra und Geometrie für Ingenieure, Mathematiker und Physiker.* Edition Delkhofen, Deilingen, 5. Aufl., 1. Nachdruck 2021, ISBN 978-3-936413-30-4.

[2] Kimmerle, W. und M. J. Stroppel: *Analysis für Ingenieure, Mathematiker und Physiker.* Edition Delkhofen, Deilingen, 4. Aufl., 9. Nachdruck 2021, ISBN 978-3-936413-27-4.

Auf der Seite
`https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/WarumC2/`
findet man nicht nur die (gegebenenfalls aktualisierte) PDF-Version dieses Dokuments, sondern auch Darstellungen der Graphen zu einigen der hier betrachteten Funktionen (und ihrer Taylorpolynome), die sich interaktiv verändern lassen.

Fragen zum Selbsttest

Die folgenden Fragen können Sie benutzen, um Ihren (mittlerweile erweiterten) Kenntnisstand selbst zu testen.

Spoilerwarnung:
Klick auf das Feld *Beispiel*
lässt verräterische Hinweise erscheinen, die Ihnen den Spaß am Selbstdenken nehmen könnten.

Durch erneuten Klick oder (wenn nichts sonst hilft) erneutes Laden des Dokuments in Ihrem PDF-Viewer sollten Sie diese Hinweise wieder zum Verschwinden bringen können.

Versuchen Sie, zweimal partiell differenzierbare Funktionen $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu finden, für die eine Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ so existiert, dass an der Stelle a das Folgende eintritt:

(a) Ein lokales Extremum liegt vor, dessen Typ zu den Vorzeichen der Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\,(a)$ passt.
Beispiel

(b) Ein Sattelpunkt liegt vor, aber alle Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\,(a)$ sind negativ.
Beispiel

(c) Ein lokales Maximum liegt vor, aber $\mathrm{H}\tilde{f}\,(a)$ hat Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen.
Beispiel

(d) Ein lokales Minimum liegt vor, aber alle Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\,(a)$ sind negativ.
Beispiel

(e) Ein lokales Maximum liegt vor, aber alle Eigenwerte von $\mathrm{H}\tilde{f}\,(a)$ sind positiv.
Beispiel

Falls Sie in einem (oder mehreren) der obigen Fälle (a) – (e) kein Beispiel finden:
Können Sie *beweisen*, dass der entsprechende Fall gar nicht auftreten kann?
Lösung