Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 1.
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2^n \geqq n.$$

Aufgabe P 2.
Zeigen Sie, dass $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt.
Wir betrachten die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, die durch die Vorschrift $f(x) = x + \frac{1}{x}$ gegeben ist. Geben Sie den Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}$ so groß wie möglich an und skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe P 3.
Geben Sie für die folgenden rationalen Zahlen die Dezimalbruchentwicklung an:

$$\frac{56}{64}, \quad \frac{33}{27}, \quad \frac{15}{12}.$$

Verwenden Sie dazu den aus der Schule bekannten Algorithmus des schriftlichen Dividierens.

Aufgabe P 4.
Gegeben sind die beiden Polynome

$$\begin{aligned} p_1(X) &= X^3 + 2X^2 - X - 2 \quad \text{und} \\ p_2(X) &= X^3 - 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen für die beiden Gleichungen $p_1(X) = 0$ und $p_2(X) = 0$:
Erraten Sie dazu zunächst jeweils eine Lösung z_1 für $p_1(X) = 0$ und z_2 für $p_2(X) = 0$.
Bestimmen Sie dann die beiden Polynome

$$\begin{aligned} q_1(X) &= \frac{p_1(X)}{(X - z_1)} \quad \text{und} \\ q_2(X) &= \frac{p_2(X)}{(X - z_2)}. \end{aligned}$$

Nun können Sie mit Hilfe der Mitternachts-Formel weitere Lösungen (falls solche existieren) für die Gleichungen $q_1(X) = 0$ und $q_2(X) = 0$ bestimmen.
Warum sind solche Lösungen auch Lösungen für die Gleichungen $p_1(X) = 0$ und $p_2(X) = 0$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1.

Gegeben seien die Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

$$(a < b) \wedge (c < d) \Longrightarrow a + c < b + d \quad \text{und}$$
$$0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}\,.$$

Aufgabe H 2.

Es seien die komplexen Zahlen $x = 3 + 4\,i$ sowie $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ und $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\,i$ gegeben.

Berechnen Sie $x \cdot \overline{x}$, $\frac{1}{2}\,(y - \overline{y})$, $\frac{1}{2}\,(y + \overline{y})$. Was fällt Ihnen auf (denken Sie an Betrag, Real- und Imaginärteil)? Ist das auch allgemein gültig?

Bestimmen Sie weiter y^2, y^3, $x - z$, $x + \overline{y}$ und $\frac{y}{x}$ sowie $x \cdot \overline{z}$.

Aufgabe H 3.

Es sei $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \in \mathbb{C}$ gegeben. Berechnen Sie z^2, z^3, z^6.

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen für die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ (es gibt hier drei Lösungen) sowie für $x^4 - 1 = 0$ (es gibt hier vier Lösungen).

Aufgabe H 4. *Binomialsatz für komplexe Zahlen*

Es seien $x = a + b\,i$ und $y = c + d\,i$ zwei komplexe Zahlen (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) und $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\big((a + b\,i) + (c + d\,i)\big)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (a + b\,i)^{n-j} (c + d\,i)^j$$

Schreiben Sie diese Formel für $n = 4$ explizit aus. Verwenden Sie dabei für die Binomialkoeffizienten das Pascalsche Dreieck.

Hinweis: In der Vorlesung haben wir den Binomialsatz für reelle Zahlen schon bewiesen. Orientieren Sie sich an diesem Beweis.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Häufig begegnen uns komplexe Zahlen, die in Polarkoordinaten angegeben sind, auch in einer etwas eleganteren Form. Mit Hilfe der Eulerschen Zahl e gilt nämlich:

$$a\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = a\,e^{i\varphi}.$$

Diesen Sachverhalt werden wir später in der Vorlesung noch genauer studieren. Damit wird aber die in der Vorlesung behandelte Erkenntnis

$$a\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)\cdot b\left(\cos(\psi) + i\sin(\psi)\right) = ab\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$$

zu einem für reelle Zahlen bereits aus der Schule bekannten Exponentialgesetz

$$a\,e^{i\varphi}\cdot b\,e^{i\psi} = ab\,e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Aufgabe H 5.

Es seien die komplexen Zahlen $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $y = 1 + \sqrt{3}\,i$ und $z = 6\big(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)\big)$ gegeben.

Geben Sie x und y in Polarkoordinaten an. Verwenden Sie dabei keine Näherungen für die Argumente, sondern geben Sie diese exakt an.

Berechnen Sie x^2, x^3, y^2, y^3, $x\cdot z$, $\frac{y}{z}$, $x+z$ und $y-\overline{z}$. Verwenden Sie zur Berechnung die Darstellung in Polarkoordinaten, wenn es Ihnen sinnvoll erscheint. In diesen Fällen ist es legitim das Ergebnis in Polarkoordinaten anzugeben.

Geben Sie von den komplexen Zahlen $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $e^{i\frac{\pi}{3}}$ jeweils Real- und Imaginärteil an und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe H 6.

Gegeben seien die Mengen $M_1 = \left\{x\in\mathbb{C}\,\middle|\,|x|\leqq 1\right\}$ sowie $M_2 = \left\{x\in\mathbb{C}\,\middle|\,|x+i|\geqq 2\right\}$ und $M_3 = \left\{x\in\mathbb{C}\,\middle|\,\operatorname{Im}(x)\leqq 2\right\}$.

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2, M_3 sowie $M_2\cap M_3$ und $M_1\cup M_2$.

Aufgabe H 7.

Wir betrachten die Gerade $g = \{(3,3,2)+\lambda(2,2,1)\mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ und des weiteren die Ebene $E = \{(1,2,2)+\alpha(0,1,1)+\beta(1,3,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

Gibt es einen Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E? Geben Sie ihn gegebenenfalls an.

Aufgabe H 8.

Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten

$$\mathbb{R}[X] = \left\{\alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \,\middle|\, n\in\mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha_n,\ldots,\alpha_0\in\mathbb{R}\right\}$$

die Axiome für einen Vektorraum erfüllt.

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 5.
Es sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum V und die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ gegeben. Die Menge

$$\mathrm{L}\,(v_1, \dots, v_m) := \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j \in V \,\middle|\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \right\}$$

heißt *lineare Hülle* oder *Aufspann*.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{L}\,(v_1, \dots, v_m)$ ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe P 6. *Lissajous-Figur*
Entscheiden Sie, ob die Abbildung $f\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \big(\sin(t), \sin(2t)\big)$ injektiv ist.

Aufgabe P 7.
Entscheiden Sie, ob die Funktionen $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|$ und $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$ jeweils injektiv, surjektiv, bijektiv sind. Modifizieren Sie gegebenenfalls den Definitions- und Zielbereich so, dass Sie bijektive Abbildungen erhalten.

Aufgabe P 8.
Sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y, z) &\mapsto (2x + 4y + 7z, 5y + z, 3z) \\ g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y) &\mapsto (5x + 2y, 4y, 4x + 3y) \end{aligned}$$

jeweils injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe P 9.
Es seien die Vektoren $v = (-7, 16, -1)$, $u = (1, 2, 1)$ und $w = (3, -4, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Zeigen Sie $v \in \mathrm{L}\,(u, w)$, indem Sie Vektoren $u' \in \mathrm{L}\,(u)$ und $w' \in \mathrm{L}\,(w)$ so bestimmen, dass $v = u' + w'$ gilt.

Bestimmen Sie einen Vektor $w'' \in \mathrm{L}\,(u, w)$, der *orthogonal* zu u ist, d.h. $\langle u | w'' \rangle = 0$, und der *normiert* ist, d.h. $\langle w'' | w'' \rangle = 1$ erfüllt.

Aufgabe P 10.
Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome. Für $p, q \in \mathbb{R}[X]$ sei

$$\langle p | q \rangle := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

definiert. Zeigen Sie, dass dies für alle $p, q, r \in \mathbb{R}[X]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften

(a) $\langle p | q \rangle = \langle q | p \rangle$
(b) $\big(\langle p | p \rangle \geqq 0\big) \wedge \big(\langle p | p \rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0\big)$
(c) $\langle p | q + r \rangle = \langle p | q \rangle + \langle p | r \rangle$
(d) $\alpha \langle p | q \rangle = \langle \alpha\, p | q \rangle = \langle p | \alpha\, q \rangle$

eines Skalarproduktes besitzt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 9. *wurde bereits auf dem 2. Blatt gestellt*
Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten

$$\mathbb{R}[X] = \left\{\alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha_n, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}\right\}$$

die Axiome für einen reellen Vektorraum erfüllt.

Aufgabe H 10.
Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Für die Vektoren $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ und $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ sei

$$\langle v|w\rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für alle $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$

(b) $\langle u|u\rangle \in \mathbb{R}_0^+$ und $\langle u|u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(c) $\langle u|v + w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

(d) $\alpha\langle u|v\rangle = \langle \alpha\, u|v\rangle = \langle u|\overline{\alpha}\, v\rangle$

Aufgabe H 11.
Wir betrachten einen reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt:

(a) $|v + w|^2 = |v|^2 + 2\langle v|w\rangle + |w|^2$

(b) $|v - w|^2 = |v|^2 - 2\langle v|w\rangle + |w|^2$

(c) $|v|^2 - |w|^2 = \langle v + w|v - w\rangle$

Aufgabe H 12.
Ein spurgebundenes Fahrzeug (Eisenbahn, Transrapid, etc.) übt momentan eine Antriebskraft vom Betrag 4 aus und bewegt sich dabei auf Schienen, die in Richtung $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ verlegt sind. Zusätzlich wirkt auf das Fahrzeug die Windkraft $\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Wie groß ist die Gesamtkraft in Fahrtrichtung?

Wie groß ist die vom Wind erzeugte Querkraft auf die Schiene (die Kraft, die senkrecht zur Schiene in der horizontalen Ebene, die von $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ aufgespannt wird, wirkt)?

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 11.
Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren

- v_1, v_2, v_3
- $v_1, \ldots, v_5$
- v_1, v_5

jeweils linear unabhängig? Bilden sie jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Bilden sie jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Bilden Sie aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ mindestens zwei verschiedene Basen von $\mathbb{R}^3$ sowie mindestens zwei davon verschiedene Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 12.
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.
Geben Sie für den Vektor $v = (2,3,-4) \in \mathbb{R}^3$ das Koordinatentupel ${}_B v$ bezüglich B an.

Aufgabe P 13.
Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Die Kreislinie $\left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |v| = 1 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Menge $\left\{ \sum_{j=1}^{2} \alpha_j v_j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ mit $v_1 = (1,2,-1)$ und $v_2 = (0,1,-7)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Menge $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3\,x + 2\,y - z = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(d) Die Menge $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3\,x + 2\,y - z = 2 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 14.
Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $B = \{X^2, X-1, X+1\}$ und $C = \{1, X, X^2\}$.
Geben Sie für das Polynom $p(X) := X^2 + 2X + 1$ die Koordinatentupel ${}_B p$ bezüglich B und ${}_C p$ bezüglich C an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13.
Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1,0,2,1)$, $v_2 = (2,1,\pi,0)$, $v_3 = (1,-1,2,2)$ sowie $v_4 = (0,1,0,-1)$ und $v_5 = (4,1,4+\pi,2) \in \mathbb{R}^4$. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit der entsprechenden Rechnung.

(a) v_1, v_3

(b) v_1, v_2, v_3

(c) v_1, v_2, v_5

(d) v_1, v_2, v_3, v_4

(e) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Geben Sie jeweils eine Basis an.

Aufgabe H 14.

(a) Beschreiben Sie die durch die Punkte $P_1 = (2,3,2)$, $P_2 = (5,4,7)$ und $P_3 = (-1,3,-1)$ in $\mathbb{R}^3$ verlaufende Ebene E in Parameterdarstellung.
Hinweis: Sie können Richtungsvektoren direkt aus den gegebenen Punkten bestimmen.

(b) Geben Sie die Ebene E in der Hesseschen Normalform an.

Aufgabe H 15.

(a) Finden Sie den Durchstoßpunkt S der Geraden $g_1\colon (-2,2,-4)+\lambda(0, \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{14}}{5}, \frac{-\sqrt{6}+2\sqrt{14}}{5})$ in $\mathbb{R}^3$ durch die Ebene E aus der vorigen Aufgabe.

(b) Geben Sie eine Gerade g_2 an, die senkrecht zu der Ebene E durch den Durchstoßpunkt S verläuft.

(c) Welchen Winkel schließen g_1 und g_2 ein?

Aufgabe H 16. *Vom Nutzen verschiedener Basen*
Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} = \left\{ \sum_{j=0}^{2} c_j X^j \,\middle|\, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 bilden die folgenden Elemente eine Basis:

$$p_1(X) := \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X\,, \quad p_2(X) := -X^2 + 1\,, \quad p_3(X) := \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte $p_j(k)$ für alle $j \in \{1,2,3\}$ und $k \in \{-1,0,1\}$.

(b) Finden Sie $f, g \in \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ derart, dass gilt:

$$\begin{array}{lll} f(-1) = 13, & f(0) = 1234567, & f(1) = -22, \\ g(-1) = 0, & g(0) = -12, & g(1) = 1. \end{array}$$

Hinweis: Setzen Sie f und g als Linearkombinationen von p_1, p_2, p_3 an.

(c) Warum ist die Basis p_1, p_2, p_3 hier besser als die Basis X^0, X^1, X^2 ?

Zusatz: Können Sie auch nachweisen, dass p_1, p_2, p_3 eine Basis für $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ bildet?

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 15.

Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \\ 7x_2 + 0x_1 &= 2 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ x_1 + 0x_2 &= 4 \\ 3x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen?

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.

Lösen Sie die Gleichungssysteme.

Aufgabe P 16.

Gegeben ist ein Sechseck im $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$\begin{array}{lll} P_1 = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) & P_2 = \left(-2, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) & P_3 = (-3, 0, 0) \\ P_4 = \left(-2, -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) & P_5 = \left(2, -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) & P_6 = (5, 0, 0) \end{array}$$

wobei jeweils die aufeinanderfolgenden Punkte sowie die Punkte P_1 und P_6 miteinander verbunden sind.

Verifizieren Sie, dass die Punkte $P_1, \ldots, P_6$ in einer Ebene liegen.

Berechnen Sie die Fläche des Sechsecks.

Hinweis: Versuchen Sie die Fläche in Parallelogramme und Dreiecke, deren Fläche Sie leicht berechnen können, zu zerlegen. Versuchen Sie Symmetrien der Figur zu erkennen.

Aufgabe P 17.

Wir versehen $\mathbb{R}^3$ mit der aus der Vorlesung bekannten Standardbasis $\left\{e_j \;\middle|\; j = 1, \ldots, 3\right\}$. Gegeben sind die reellen Zahlen

$$\begin{array}{lll} \alpha_{1,1} = 1 & \alpha_{1,2} = 0 & \alpha_{1,3} = 0 \\ \alpha_{2,1} = 1 & \alpha_{2,2} = 1 & \alpha_{2,3} = 1 \\ \alpha_{3,1} = 0 & \alpha_{3,2} = 1 & \alpha_{3,3} = 0 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Menge $B = \left\{b_k = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j,k}\, e_j \;\middle|\; k = 1, \ldots, 3\right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Bestimmen Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = (-2, 0, -3)$ bezüglich der Basis B.

Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $C = \left\{c_j \;\middle|\; j = 1, \ldots, 3\right\}$ so, dass $\mathrm{L}\,(b_1) = \mathrm{L}\,(c_1)$, $\mathrm{L}\,(b_1, b_2) = \mathrm{L}\,(c_1, c_2)$ und $\mathrm{L}\,(b_1, b_2, b_3) = \mathrm{L}\,(c_1, c_2, c_3)$.

Bestimmen Sie das Koordinatentupel des Vektors v bezüglich dieser Basis C.

Aufgabe P 18. *ein unendlich-dimensionaler Vektorraum*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$. Verifizieren Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{X^n, X^{n-1}, \ldots, X^1, X^0\}$ linear unabhängig ist. Können solche Mengen Basen von $\mathbb{R}[X]$ sein? Warum nicht? Konstruieren Sie ausgehend von diesen Erkenntnissen eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17.
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Geben Sie auch die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

Handelt es sich um ein homogenes oder um ein inhomogenes Gleichungssystem?

Aufgabe H 18.
Gegeben seien die Punkte $P_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$, $P_2 = (-1, 2, 1)$ und $P_3 = (3, -1, -6)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1, die von diesen drei Punkten aufgespannt wird.

(b) Bestimmen Sie die Ebene E_2 parallel zu E_1, auf der der Punkt $P_4 = (-2, 4, 7)$ liegt. Geben Sie diese in der Hesseschen Normalform und in Parameterdarstellung an.

Aufgabe H 19. *ein Orthonormalisierungsverfahren*
Wir befinden uns im $\mathbb{R}^4$ und betrachten die Vektoren $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 2, 0, 1)$ sowie $v_3 = (-1, 3, 1, -1)$. Für $k = 1, 2, 3$ definieren wir die Vektoren

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{\left\langle v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \,\middle|\, v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \right\rangle}} \left(v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \right),$$

dabei wird $\sum_{j=1}^{0} w_j = 0$ gesetzt.

(a) Berechnen Sie die Vektoren b_1, b_2 und b_3.

(b) Zeigen Sie: $B = \{b_j \mid j = 1, \ldots, 3\}$ bildet ein Orthonormalsystem.
Ist B auch eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe H 20.
Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren v und w eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

(a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{K}$ sind die Vektoren v, $v + \alpha w$ linear abhängig, für welche sind sie linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{K}$ so, dass die Vektoren $v + \alpha w$, w orthogonal zueinander stehen.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 19.

Gegeben sind die reellen Matrizen

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \pi & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für $l, m \in \{1, \ldots, 4\}$ alle die Produkte $C_l\, C_m$, die überhaupt definiert sind.

Aufgabe P 20.

Heinrich Lohse braucht für sein Büro einen neuen Computer. Um einen Mengenrabatt zu bekommen bestellt er Radiergummis, Schreibmaschinenpapier und Computer im Wert von insgesamt 300.000,– DM und bekommt dann Radiergummis für 0,10 DM pro Stück, Schreibmaschinenpapier für 2,80 DM pro Packung und Computer für 6000,– DM pro Gerät (zur Erinnerung: 1 € $\cong$ 1,95883 DM). Insgesamt bestellt Herr Lohse 300.000 Artikel beim Großhandel. Wieviele Radiergummis, wieviele Packungen Schreibmaschinenpapier und wieviele Computer hat er jeweils bestellt?

Aufgabe P 21.

(a) Gegeben sei die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass eine Matrix $C = \left(\begin{smallmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ existiert, für die $AC = \mathbf{0}$ gilt.
Bestimmen Sie jeweils alle solchen Matrizen $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und berechnen Sie dann auch CA.

(b) Gegeben sei die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Was muss für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten, dass es möglich ist, die inverse Matrix A^{-1} zu A zu bestimmen (also eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA^{-1} = E_2 = A^{-1}A$) ? Geben Sie die Inverse in diesen Fällen an.

Aufgabe P 22.

Wir betrachten in $\mathbb{K}^{2\times 4}$ die Matrizen $A = (a_{zs})_{1\leqq z\leqq 2, 1\leqq s\leqq 4}$ und $B = (b_{zs})_{1\leqq z\leqq 2, 1\leqq s\leqq 4}$.

Berechnen Sie $A^\mathsf{T} B$ und AB^T. Wie viele Zeilen und Spalten haben diese Produkte jeweils?

Aufgabe P 23. *ein nicht-lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten für Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteqq \mathbb{R}^3$. Ist $\mathcal{L}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 21.
Lösen Sie das für $x \in \mathbb{R}^7$ gegebene Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 22.
Sie wollen für die Gruppenübung in Höherer Mathematik Kuchen backen. Dafür haben Sie mehrere Rezepte zur Auswahl: Für einen Napfkuchenteig brauchen Sie 500g Mehl, 250g Zucker, 250g Butter und 5 Eier, für einen großen Rührkuchen 6 Eier, 500g Zucker, 400g Butter und 500g Mehl, und für einen kleinen Strudel 250g Mehl, 50g Butter und 2 Eier. Sie plündern die WG-Küche und finden 1kg Mehl, $\frac{1}{4}$kg Zucker, 9 Eier und einige Butterüberreste, die zusammen 350g ergeben. Wieviele Kuchen von welcher Sorte können Sie damit backen, wenn Sie alle Vorräte aufbrauchen wollen?

Aufgabe H 23.
Es seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und die Vektoren b_1 und $b_2 \in \mathbb{R}^4$ folgendermaßen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme $S_1\colon Ax = b_1$ und $S_2\colon Ax = b_2$.
Zeigen Sie, dass die Lösungsmengen $\mathcal{L}(S_1)$ und $\mathcal{L}(S_2)$ zueinander parallele affine Teilräume sind, d.h. durch Verschiebung (Addition eines festen Vektors) auseinander hervorgehen.

Aufgabe H 24. *Blockmatrizen*
Wir betrachten zwei beliebige 3×3-Matrizen A, B. Verifizieren Sie:

$$\begin{pmatrix} E_3 & A \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & B \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & A+B \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix}$$

(Zur Erinnerung: E_3 ist die 3×3-Einheitsmatrix, $\mathbf{0}$ ist in diesem Fall die 3×3-Nullmatrix).

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 24.
Bestimmen Sie den Rang $\operatorname{Rg} A$ der folgenden reellen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P 25.
Betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto (2x+4y+7z, 5y+z, 3z) \\ g_2 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto (x^2, xyz, z+3x-29y) \\ g_3 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \quad \mapsto (5x+2y, 4y, 4x+3y) \end{aligned}$$

(a) Welche dieser Abbildungen sind linear?
Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

(b) Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildungen.

(c) Ist die Komposition der Abbildungen $g_1 \circ g_3$ linear? Falls dem so ist, geben Sie auch dafür die Matrixdarstellung ${}_E(g_1 \circ g_3)_E$ bezüglich der Standardbasis E an.

Aufgabe P 26.
Es sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto \left(y+z, -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$ gegeben. Weiterhin betrachten wir die Basis $B = \{(1,0,-1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Ef_E$ von f bezüglich der Standardbasis E.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Bf_B$ von f bezüglich der Basis B.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Bf_E$ von f bezüglich der Basis B im Zielbereich und der Standardbasis E im Definitionsbereich.

Aufgabe P 27.
Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und darin die Menge $B := \{b_1, b_2, b_3\}$, wobei

$$\begin{aligned} b_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(x) \\ b_2 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x) \\ b_3 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Weiter betrachten wir die lineare Abbildung $D\colon \mathrm{L}(b_1,b_2,b_3) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \colon f \mapsto f'$, die jeder Funktion ihre Ableitung zuordnet.

Bestimmen Sie eine Basis C für das Bild $\operatorname{Im}(D)$.

Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_CD_B$ bezüglich der Basis B an.

Bestimmen Sie den Kern $\operatorname{Ker}(D)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25.

In Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & t-1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben, die die lineare Abbildung $\alpha_t \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto A_t x$ beschreibt.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Kern $\operatorname{Ker}(\alpha_t)$.

Hinweis: Es kann hierbei im Gauß-Algorithmus nötig sein, Spalten zu vertauschen.

Aufgabe H 26.

Die reelle Matrix

$$B_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ t(t+1) & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

ist in Abhängigkeit von dem reellen Parameter t gegeben. Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} B_t$.

Aufgabe H 27.

Wir betrachten den Polynomraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ zusammen mit der Abbildung $D \colon f \mapsto f'$, die einem Polynom dessen Ableitung zuordnet (vgl. auch Vortragsübungen, Blatt 1, Aufgabe V 2).

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_M D_M$, ${}_B D_B$, ${}_L D_L$ von D bezüglich

- **(a)** der Monombasis $M \colon X^2, X^1, X^0$,
- **(b)** der Basis $B \colon X^2, X-1, X+1$ aus Aufgabe P 14, sowie
- **(c)** der Basis $L \colon \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, -X^2+1, \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ aus Aufgabe H 16.

Aufgabe H 28.

Geben Sie eine lineare Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ so an, dass

$$\alpha\left(1, -\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -4\right) \qquad \text{und} \qquad \alpha\left(0, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 9\right).$$

Ist es möglich zusätzlich zu fordern, dass $\alpha(1,0) = \left(\frac{1}{3}, -7, 42\right)$? Besteht die Möglichkeit $\alpha(1,0) = (1,0,5)$ zu fordern? Begründen Sie Ihre Antworten.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 28.

Gegeben sind die folgenden reelle Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Matrizen gibt es eine Rechtsinverse, eine Linksinverse, eine Inverse?

(b) Berechnen Sie in den Fällen, wo es möglich ist, die Inverse.

Aufgabe P 29.

Wir befinden uns in $\mathbb{R}^3$. Gegeben sind die Basis $B\colon (1,0,-1),(1,1,0),(0,1,-1)$, die Basis $C\colon (-1,-1,0),(0,-1,1),(1,0,-1)$ und die Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass

$$f(1,0,-1) = (0,-1,0)\ , \qquad f(1,1,0) = (2,0,0)\ , \qquad f(0,1,-1) = (0,0,3).$$

Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E f_B$ an.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\mathrm{id}_B$, ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_E\mathrm{id}_C$, ${}_C\mathrm{id}_E$, ${}_B\mathrm{id}_C$, ${}_C\mathrm{id}_B$.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_E f_E$, ${}_B f_B$, ${}_B f_C$.

Aufgabe P 30.

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E f_E$ bezüglich der Standardbasis E.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}({}_E f_E)$. Geben Sie $\dim \mathrm{Ker}\,(f)$ und $\dim \mathrm{Im}\,(f)$ an.
Hinweis: Benutzen Sie die Dimensionsformel.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$. Geben Sie jeweils eine Basis an.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29.
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Berechnen Sie A^{-1}.

(b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b_4 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Benutzen Sie die oben berechnete Inverse.

Aufgabe H 30.
Berechnen Sie für $x, y, z \in \mathbb{K}$ die Inverse zu

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 31.
Es sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Gegeben sind die linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch $f(b_1) = (1, 0, -1)$, $f(b_2) = (0, 1, 0)$, $f(b_3) = (2, -1, 2)$, $f(b_4) = (0, 2, 0)$ und $g(c_1) = (0, -1, 0, 0)$, $g(c_2) = (1, 0, 1, 0)$, $g(c_3) = (2, -3, 0, -1)$ für die Basen

$$B\colon b_1 = (1, 0, -1, 0), b_2 = (0, 1, 0, -1), b_3 = (1, 0, 1, 0), b_4 = (0, 2, 0, 1)$$

und

$$C\colon c_1 = (0, 1, 0), c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (2, -1, 2).$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E(g \circ f)_E$.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B(g \circ f)_B$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(g \circ f)$.

Aufgabe H 32.
Es seien $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ und e_j Basisvektoren der Standardbasis E von $\mathbb{R}^m$.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\, x_k\, e_j$ ist linear.

(b) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2\, x_k\, e_j$ ist linear.

(c) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\, x_k^2\, e_j$ ist linear.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 31.
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & -9 & 6 \\ 7 & -34 & 42 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P 32.
Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen:

$$A_t := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_t := \begin{pmatrix} -3 & 4t & 6 \\ 2 & -2 & 2t-5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(A_t)$ und $\det(B_t)$.

(b) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen A_t und B_t invertierbar sind.

(c) Bestimmen Sie, falls möglich, $\det(A_t^{-1})$, $\det(B_t^{-1})$, $\det(A_t B_t)$, $\det(A_t)\det(A_t^{-1})$.

(d) Bestimmen Sie $\det({A_t}^{16})$.

Aufgabe P 33.
Es sei die folgende Abbildung gegeben:

$$s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass s eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Ker}(s)$. Geben Sie eine Basis davon an.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E s_B$ bezüglich der Standardbasis E und der Basis

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33.
Gegeben ist $x \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A_t)$, $\det({A_t}^5)$, $\det(xA_t)$ und für die $t \in \mathbb{R}$, bei denen die Ausdrücke auch definiert sind, $\det(A_t^{-1}), \det\left((A_t^{-1})^5\right)$.

Aufgabe H 34.
Wir versehen $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit der Basis $B\colon X^2, X-1, X+1$, der Basis $C\colon X^2, X^1, X^0$, der Basis $D\colon \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, -X^2+1, \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ und der Basis $E\colon X^2+X+1, X+1, 1$.
Es ist weiter die Abbildung $s\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon aX^2+bX+c \mapsto bX^2+cX+a$ gegeben.

- **(a)** Zeigen Sie, dass s eine lineare Abbildung ist.
- **(b)** Berechnen Sie $\det({}_Bs_B)$, $\det({}_Cs_C)$, $\det({}_Ds_D)$, $\det({}_Es_E)$.
- **(c)** Berechnen Sie $\det({}_Bs_E)$, $\det({}_Cs_D)$.

Aufgabe H 35.
Gegeben ist die Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} -4-\lambda & 5 & -5 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

- **(a)** Bestimmen Sie das durch $c(\lambda) := \det(A_\lambda)$ gegebene Polynom c.
- **(b)** Berechnen Sie die Nullstellen λ_1, λ_2, λ_3 des Polynoms c und zerlegen Sie es in seine Linearfaktoren.
  Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Linearfaktoren ausmultiplizieren!

Aufgabe H 36.
Es sei A_λ wie oben gegeben, und es seien $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ die Nullstellen des dort berechneten Polynoms c. Außerdem sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_0\,x$.

- **(a)** Bestimmen Sie Vektoren b_1, b_2, b_3 derart, dass $A_{\lambda_j} b_j = 0$ für $j \in \{1,2,3\}$ gilt und dass $B\colon b_1, b_2, b_3$ eine Basis ist.
- **(b)** Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_B\alpha_B$ an.
- **(c)** Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_E\alpha_E\right)^k$.
  Hinweis: Die Matrix ${}_B\alpha_B$ hilft dabei.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 34.

Zeigen Sie: Die Matrix

$$F := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal.

Aufgabe P 35.

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = (1,1,1,1) \qquad v_2 = (1,0,3,0) \qquad v_3 = (2,2,4,0) \qquad v_4 = (8,-2,6,-4)$$

Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3, f_4$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Aufgabe P 36. *Symmetrien eines Tetraeders*

Im dreidimensionalen Raum ist das regelmäßige Tetraeder mit den Eckpunkten

$$P_1 = (1,0,0) \quad P_2 = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right) \quad P_3 = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \quad P_4 = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$$

gegeben. Es ist $M := \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ die Menge der Ecken des Tetraeders und $\mathrm{Sym}(M)$ die Gruppe der Permutationen seiner Ecken.

Weiter ist die Basis $B\colon P_2, P_3, P_4$ gegeben. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit E.

(a) Gegeben sind die Transpositionen

$$\tau_1 := \left(\begin{smallmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & P_3 & P_2 & P_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}(M) \text{ und } \tau_2 := \left(\begin{smallmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & P_2 & P_4 & P_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}(M).$$

Skizzieren Sie die Wirkung von $\tau_1, \tau_1^2, \tau_2, \tau_2^2$ und $\tau_1 \circ \tau_2$ auf den Ecken des Tetraeders. Bestimmen Sie jeweils das Signum der Abbildung.

(b) Zerlegen Sie die Permutation $\delta_1 := \left(\begin{smallmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & P_4 & P_2 & P_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}(M)$ in Transpositionen und bestimmen Sie $\mathrm{sig}\,\delta_1$.

(c) Es sei $\varphi_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die $\varphi_1(P_j) = \delta_1(P_j)$ erfüllt. Geben Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\varphi_{1B}$ und ${}_E\varphi_{1E}$ an.

(d) Es ist darüber hinaus die Permutation $\delta_2 := \left(\begin{smallmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_3 & P_1 & P_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}(M)$ gegeben, und es sei $\varphi_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die $\varphi_2(P_j) = \delta_2(P_j)$ erfüllt.

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\varphi_{2B}$, ${}_B(\varphi_2 \circ \varphi_1)_B$, ${}_B(\varphi_1 \circ \varphi_2)_B$, ${}_E(\varphi_2 \circ \varphi_1)_E$ und ${}_E(\varphi_1 \circ \varphi_2)_E$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37.

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = (1,1,0,0) \qquad v_2 = (-1,0,1,0) \qquad v_3 = (1,0,0,1) \qquad v_4 = (1,0,1,1)$$

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3, f_4$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix $A := \left({}_Ef_1\ {}_Ef_2\ {}_Ef_3\ {}_Ef_4\right)$ orthogonal ist.

Aufgabe H 38.

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ mit

$$b_1 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \qquad b_2 = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad b_3 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

gegeben und E bezeichne die Standardbasis.

Die lineare Abbildung δ ist durch

$${}_B\delta(e_1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad {}_B\delta(e_2) = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad {}_B\delta(e_3) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\delta_B$.

(c) Zeigen Sie, dass δ eine orthogonale Abbildung ist.

(d) Berechnen Sie $\det\left({}_E\delta_E\right)$.

Aufgabe H 39. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Wir befinden uns im $\mathbb{R}^4$. Es sei die Basis $C\colon v_1, \ldots, v_4$ gegeben. Für $k \in \{1, \ldots, 4\}$ definieren wir die Vektoren

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{\left\langle v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \,\middle|\, v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \right\rangle}} \left(v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle\, b_j \right),$$

dabei wird $\sum_{j=1}^{0} w_j = 0$ gesetzt.

Zeigen Sie: $B = \{b_j \mid j = 1, \ldots, 4\}$ bildet ein Orthonormalsystem.

Aufgabe H 40.

Zeigen Sie, dass die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ ist.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 37.
Es sind die affinen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + t$ und $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Bv + r$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter ist

$$g := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade.

(a) Untersuchen Sie, welche der Abbildungen α, β Affinitäten sind.

(b) Bestimmen Sie $\alpha(g)$ und $\beta(g)$. Sind das Geraden?

(c) Berechnen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

Aufgabe P 38.
Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, ob α eine Affinität ist und ob es sich dabei um eine Bewegung handelt.

Bestimmen Sie, falls α eine eigentliche Bewegung ist, eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch den Drehwinkel von δ.

Aufgabe P 39.
Es ist $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2, e_3)$ das in $\mathbb{R}^3$ gegebene Standardkoordinatensystem. Durch den Punkt $P := (-1, \frac{1}{2}, 4)$ und die Vektoren $f_1 := (1, 2, 0), f_2 := (-2, -3, 1), f_3 := (3, -1, 1)$ ist ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F} := (P; f_1, f_2, f_3)$ bestimmt.

(a) Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

(b) Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.
Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Gegeben ist die Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren $s := (2, 2, -2)$ und $t := (1, -1, 0)$. Damit werden die beiden affinen Abbildungen $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + s$ und $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + t$ definiert.

Aufgabe H 41.

Zeigen Sie:

(a) σ und τ sind Affinitäten.

(b) σ und τ sind uneigentliche Bewegungen.

Aufgabe H 42.

(a) Gegeben ist die Ebene $F := \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)v = 0 \right\}$. Verifizieren Sie $\tau(F) = F$.

(b) Bestimmen Sie für den Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ eine Gerade g, die P und $\tau(P)$ enthält. Zeigen Sie: die Gerade g ist genau dann parallel zu F, wenn $P \in F$.

Aufgabe H 43.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\sigma) := \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sigma(v) = v \right\}$.
Zeigen Sie: $\mathrm{Fix}(\sigma)$ ist eine affine Ebene.

(b) Stellen Sie für den Punkt $P = (p_1, p_2, p_3) \notin \mathrm{Fix}(\sigma)$ eine Gerade f auf, die die Punkte P und $\sigma(P)$ enthält.
Verifizieren Sie, dass die Gerade f die Ebene $\mathrm{Fix}(\sigma)$ orthogonal durchstößt.

Aufgabe H 44.

(a) Wählen Sie einen Punkt $U \in \mathrm{Fix}(\sigma)$ und finden Sie eine orthogonale Basis b_1, b_2, b_3 so, dass $U + b_1 \in \mathrm{Fix}(\sigma)$ und $U + b_2 \in \mathrm{Fix}(\sigma)$. Damit ist ein Koordinatensystem $\mathbb{U} := (U; b_1, b_2, b_3)$ gegeben.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{U}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Beschreiben Sie die Abbildungen σ, τ und $\sigma \circ \tau$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{U}$.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 40.
Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie von den Matrizen A, B, C alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie von den Matrizen A, B, C alle komplexen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe P 41.
In $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P_0 = (5,-2,1), P_1 = (6,1,4), P_2 = (3,-1,3), P_3 = (5,-1,2)$ gegeben.
Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so, dass ${}_{\mathbb{F}}P_0 = \vec{0}, {}_{\mathbb{F}}P_1 = e_1, {}_{\mathbb{F}}P_2 = e_2, {}_{\mathbb{F}}P_3 = e_3$. Dabei ist $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem.
Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.
Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P_4$ des Punktes ${}_{\mathbb{F}}P_4 = (2,1,-3)$.

Aufgabe P 42.
In $\mathbb{R}^3$ sind die affinen Abbildungen σ und δ gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto A \cdot {}_{\mathbb{E}}v + t$ und ${}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto B \cdot {}_{\mathbb{E}}v + s$, wobei mit $\mathbb{E}$ wie üblich das Standardkoordinatensystem bezeichnet wird und

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -6 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad s := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $P := (-1,0,-2)$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ für A und $\chi_B(\lambda)$ für B.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix A. Nummerieren Sie dabei ihre Eigenwerte so, dass der Eigenwert λ_1 negativ ist.

(c) Zeigen Sie: P ist ein Fixpunkt von σ und δ, also $\sigma(P) = P$ und $\delta(P) = P$.

(d) Wählen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ folgendermaßen:
Es sei f_1 ein Eigenvektor zum negativen Eigenwert λ_1. Sie erhalten f_2, indem Sie einen weiteren geeigneten Eigenvektor von A wählen. Schließlich sei $f_3 := Bf_2$.
Zeigen Sie: f_3 ist ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert von f_2.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}$.

(f) Zeigen Sie: f_1 ist ein Eigenvektor von B.

(g) Zeigen Sie, dass $Bf_3 = -f_2$.

(h) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}(\sigma \circ \delta)_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}(\delta \circ \sigma)_{\mathbb{F}}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 45.

Gegeben ist die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5\colon x \mapsto Ax$, die durch die folgenden Matrix A beschrieben wird:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ für A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A. Wählen Sie die Nummerierung der Eigenwerte so, dass λ_1 der negative Eigenwert ist.

(c) Konstruieren Sie nun eine Basis: Wählen Sie einen Eigenvektor $f_1 \in V(\lambda_1)$ zum negativen Eigenwert λ_1. Wählen Sie nun einen Vektor f_2 so, dass $(A-\lambda_1 E_3)f_2 = f_1$. Ergänzen Sie die so gewonnenen Vektoren zu einer Basis, indem Sie aus den verbleibenden Eigenräumen drei linear unabhängige Vektoren f_3, f_4, f_5 wählen.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_F\alpha_F$ bezüglich der Basis $F\colon f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$.

Aufgabe H 46.

Es ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und n eine natürliche Zahl.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Ist λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v, dann ist λ^n ein Eigenwert von A^n zum Eigenvektor v.

(b) Widerlegen Sie die Behauptung: Ist λ ein Eigenwert von A^n, dann ist $\sqrt[n]{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

Hinweis: In „kleinen" Räumen lassen sich für kleine n schöne Gegenbeispiele finden.

Aufgabe H 47.

Gegeben ist die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon x \mapsto Ax$, wobei $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

(b) Wählen Sie einen Eigenwert λ von A und einen zugehörigen Eigenvektor f_1. Konstruieren Sie eine Basis $F\colon f_1, f_2$, indem Sie einen Vektor f_2 so wählen, dass $(A-\lambda E_2)f_2 = f_1$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_F\varphi_F$.

Aufgabe H 48.

Es ist das Koordinatensystem $\mathbb{O} := (U; o_1, \ldots, o_n)$ des affinen Raumes $\mathbb{K}^n$ gegeben. Es bezeichnet $\mathbb{E}$ wie üblich das Standardkoordinatensystem. Die affine Abbildung α ist gegeben durch ${}_{\mathbb{O}}\big(\alpha(X)\big) = B \cdot {}_{\mathbb{O}}X + s$.

Leiten Sie analog Satz 4.7.12 aus der Vorlesung eine Formel her für den linearen Anteil und den Translationsanteil von α bezüglich $\mathbb{E}$.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 43.

Gegeben sind die folgenden Matrizen in $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.

Welche Eigenschaften treffen auf die jeweiligen Matrizen zu?

	EW $+1$	EW -1	EW 2	keine reellen EW	Basis aus EV	2-dim Eigenraum
A	☐	☐	☐	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Aufgabe P 44.

In $\mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := (2,-1)^\intercal$, $v_2 := (-3,2)^\intercal$, $v_3 := (-2,2)^\intercal$ sowie die folgenden Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, ob v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A beziehungsweise B sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Eigenwerte an.

(b) Diagonalisieren Sie die Matrizen A und B: Bestimmen Sie jeweils eine Diagonalmatrix, zu der die entsprechende Matrix konjugiert ist, und die zugehörige Transformationsmatrix.

Aufgabe P 45.

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 - 4\,x_3^2 + 2x_1\,x_2 - 3\,x_1\,x_3 + x_3 - 2\,x_1 + 1 = 0 \right\}$$

(a) Geben Sie den quadratischen Teil q, den linearen Teil $2\,f$ und den konstanten Teil c der Quadrik Q an.

(b) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A und einen Spaltenvektor a so, dass

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A\,x + 2\,a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

(c) Entscheiden Sie, ob Q eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49.

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Weiter sei v ein Vektor, der sich folgendermaßen zerlegen lässt: $v = \sum_{j=1}^{k} v_j$, wobei $v_j \in V(\lambda_j)$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Zeigen Sie: $A\,v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$.

(b) Gegeben sei nun

$$A := \begin{pmatrix} \frac{8359}{41} & 200 & -\frac{8400}{41} \\ \frac{84}{41} & 1 & -\frac{84}{41} \\ \frac{8400}{41} & 200 & -\frac{8441}{41} \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (100, 1, 100)^\intercal$ und $v_2 = (1, 0, 1)^\intercal$ Eigenvektoren von A sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

Berechnen Sie für $v = \left(\frac{2342}{98}, \frac{23}{98}, \frac{1171}{49}\right)^\intercal$ den Vektor $A\,v$. Verwenden Sie dazu (a), indem Sie $v = w_1 + w_2$ zerlegen mit $w_1 \in \mathrm{L}(v_1)$ und $w_2 \in \mathrm{L}(v_2)$.

Hinweis: Finger weg vom Taschenrechner!

Aufgabe H 50.

Diagonalisieren Sie die in Aufgabe H 49 gegebene Matrix A: Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D, zu der A konjugiert ist, und die Transformationsmatrix T, für die $D = T^{-1}AT$ gilt.

Hinweis: Der Eigenraum $V(\lambda)$ zum negativen Eigenwert λ ist 2-dimensional.

Aufgabe H 51.

Gegeben ist die Quadrik $Q := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\right\}$.

(a) Geben Sie den quadratischen, den linearen und den konstanten Teil der Quadrik an.

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik Q an.

(c) Entscheiden Sie, ob Q eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(d) Skizzieren Sie die Quadrik.

Hinweis: Gehen Sie analog zur Vorlesung vor und schneiden Sie die Quadrik mit Ebenen, die senkrecht zu Koordinatenachsen liegen.

Aufgabe H 52.

Bezüglich der Standardbasis E ist in $\mathbb{R}^n$ eine quadratische Form über $q\colon {}_E x \mapsto ({}_E x)^\intercal A\,({}_E x)$ gegeben. Es sei $B\colon b_1, \ldots, b_n$ eine weitere Basis.

Geben Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so an, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $({}_E x)^\intercal A\,({}_E x) = ({}_B x)^\intercal C\,({}_B x)$.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 46.
Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_1\,x_2 + 3\,x_2\,x_1 + 4\,x_2^2 + \frac{26}{5}\,x_1 + \frac{12}{5}\,x_2 - 7 = 0 \right\} .$$

Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

Aufgabe P 47.
Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

(a) $\big(n + \sin(2\,\pi\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

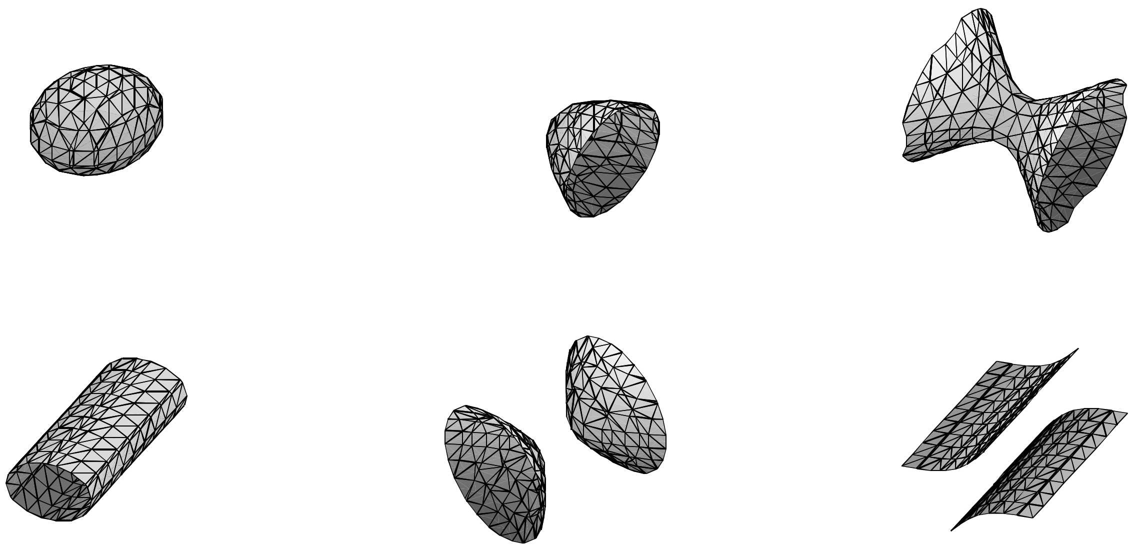
(b) $\big(n\,\sin(\frac{\pi}{2}\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\big(\frac{1}{n}\,\sin(2\,\pi\,n + n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\big(\sin(2\,\pi\,n - \frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\big(\sin(\pi\,n - \frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 48.
Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 53.

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3\,x_1^2 - 12\,x_3\,x_1 - 3\,x_2^2 + 12\,x_3\,x_2 - 4\,x_1 - 22\,x_2 + 34\,x_3 - 33 = 0 \right\} .$$

Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

Aufgabe H 54.

In W. Kimmerle, Lineare Algebra und Geometrie für Ingenieure, Informatiker und Physiker, Seiten 120-122 wird ein Beispiel für die Bestimmung der euklidischen Normalform einer Quadrik gegeben. Bestimmen Sie für jeden angegebenen Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation. Bestimmen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil der jeweiligen Koordinatentransformationen.

Aufgabe H 55.

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

(a) $\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

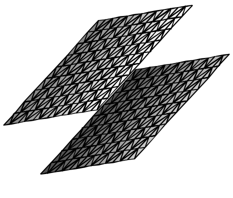
(b) $\left((-1)^n\,\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

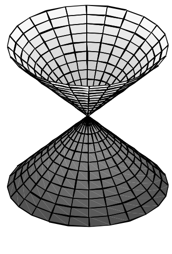
(c) $\big(2\,n + \sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

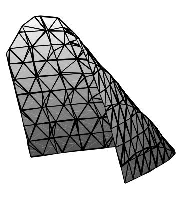
(d) $\big(2\,\pi\,n + n\,\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 56.

Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.







Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2005/06

Aufgabe P 49.
Entscheiden Sie, ob die Folgen konvergent sind:

$$\left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^5}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Hinweis: Vielleicht hilft es, eine Identität der Form $\frac{4\,n^4-3\,n+1}{N}=\frac{4\,n^4}{N}+\frac{-3\,n}{N}+\frac{1}{N}$ und dann Konvergenzsätze zu benutzen.

Aufgabe P 50.
Es sei $q\in\mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für welche Werte von q ist die Folge konvergent, divergent beziehungsweise bestimmt divergent?

Aufgabe P 51.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver Zahlen und $a:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ebenfalls positiv.

Zeigen Sie, dass $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon>0$ existiert ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ so, dass $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$ für alle $n\geqq n_\varepsilon$ gilt. Verwenden Sie hierzu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ sowie

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|\leqq\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 57.

(a) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

(b) Es sei $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Zeigen Sie: die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Die Dritte Binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ und der Sandwichsatz helfen.

Aufgabe H 58.

Es ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 = 4$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geqq 2$.

(b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls diese konvergent ist.

Hinweis: P 51 hilft. Damit kann man begründen, dass man den Grenzwert a durch die Gleichung $a = \sqrt{2a+1}$ bestimmen kann.

Aufgabe H 59.

Gegeben sind die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\,n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2\,n^3 + 2\,n^2 + n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} = \left(\frac{2\,n^4}{-2\,n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}}$$

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{-6\,n^2 + 42\,n - 72}{-3\,(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(a) Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(b) Führen Sie diese Untersuchung ebenfalls durch für die Folgen

$$(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (f_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n - d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (a_n - e_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{b_n}{g_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{g_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Begründen Sie mit Hilfe dieser Erkenntnisse, warum es nicht möglich ist, Ausdrücken wie „ $0\cdot\infty$ “, „ $\infty - \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ oder „ $\frac{0}{0}$ “ einen vernünftigen Wert zuzuordnen.