Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**1. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 1.**
Berechnen Sie

**(a)** $x_1 = \binom{11}{5}$

**(b)** $x_2 = \binom{11}{5} - \binom{10}{4} - \binom{10}{5}$

**(c)** $x_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

*Hinweis zu (c):* Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, den Sie in der Vorlesung gelernt haben. Alternativ können Sie sich auch überlegen, dass $\binom{n}{k}$ angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt $n$ Elemente so auf zwei Kästchen zu verteilen, dass im ersten Kästchen $k$ Elemente und im zweiten $n-k$ Elemente sind.

**Aufgabe P 2.** *Tennis-Grand-Slam*
Bei Tennis-Turnieren ist die Teilnehmerzahl in der Regel eine Zweierpotenz $2^n$ ($n = 7$ bei einem Grand-Slam). Geht man davon aus, dass in jeder Partie ein Teilnehmer aus dem Turnier ausscheidet (K.-o.-System), beträgt die Anzahl der insgesamt gespielten Partien $2^n - 1$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass dies für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Aufgabe P 3.** *Formeln und Sprache*
Übersetzen Sie den folgenden Ausdruck in natürliche Sprache:

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ \exists z \in \mathbb{Z}\ :\ (x < y) \land (x > z)\,.$$

Übersetzen Sie folgende Aussage in eine Formel:

„Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere.“

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 1.**
Gegeben sind folgenden komplexen Zahlen: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 6 - 2i$, $z_3 = (2 + \sqrt{3})i - 5$ und $z_4 = 3 + 6i$. Berechnen Sie dazu die unten aufgeführten Terme und geben Sie die Ergebnisse sowohl in klassischer ($a + bi$) als auch in Vektorschreibweise (als Paar $(a, b)$) an.

**(a)** $z_1' = z_2 + z_3$

**(b)** $z_2' = z_2 \cdot z_1$

**(c)** $z_3' = \dfrac{z_1}{z_4}$

**Aufgabe H 2.**
Zeigen mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Geben Sie eine Interpretation dieser Gleichung in eigenen Worten an.

**Aufgabe H 3.** *binomischer Lehrsatz für komplexe Zahlen*
Es seien $x = a + b\,i$ und $y = c + d\,i$ zwei komplexe Zahlen (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\big((a + b\,i) + (c + d\,i)\big)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (a + b\,i)^{n-j}(c + d\,i)^j \,.$$

Schreiben Sie diese Formel für $n = 4$ explizit aus. Verwenden Sie dabei für die Binomialkoeffizienten das Pascalsche Dreieck.

*Hinweis:* In der Vorlesung haben wir den binomischen Lehrsatz für reelle Zahlen schon bewiesen. Orientieren Sie sich an diesem Beweis.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**2. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 4.**
Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob sie *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**(a)** $f_1 : \{\text{Menge der Studenten}\} \to \mathbb{N} :$ Student $\mapsto$ Matrikelnummer des Studenten

**(b)** $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$

**(c)** $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \min(x, x^2)$

**Aufgabe P 5.** *komplexe Zahlen*
Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahlen $z_1 := \frac{2-i}{1+i}$, $z_2 := (1-2\,i)^4$ und der (einzigen) Lösung $w$ der Gleichung

$$z^2 + 2\,(1-i)\,z = 2\,i\,.$$

Skizzieren Sie das Gebiet $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Re}(z)| \leqq 1\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

**Aufgabe P 6.** *Polarkoordinaten und Elementargeometrie*
Berechnen Sie die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen. Verwenden Sie keine Näherungen, sondern geben Sie die Argumente exakt an.

$$\begin{aligned} z_3 &:= 2 + 2\sqrt{3}\,i \\ z_4 &:= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \\ z_5 &:= 1 + \sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

**Aufgabe P 7.** *affine Transformationen*
Wir betrachten die Menge $A := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ der durch $f_{a,b}(x) = a\,x + b$ definierten Abbildungen $f_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Abbildungen kann man nacheinander ausführen und erhält jeweils wieder eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir schreiben $g \circ f$, wenn wir *zuerst* $f$ und *dann* $g$ anwenden wollen.

**(a)** Berechnen Sie $f_{3,2} \circ f_{2,-5}$ und $f_{2,-5} \circ f_{3,2}$.

**(b)** Zeigen Sie: Für beliebige $f, g \in A$ gilt $f \circ g \in A$.

**(c)** Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv bzw. surjektiv?

*Zusatz:* $A$ ist keine Gruppe, denn die Nullabbildung $f_{0,0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 0$ hat keine Inverse. Finden Sie eine möglichst große Teilmenge von $A$ derart, dass diese bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 4.** *Eigenschaften von Abbildungen*
Geben Sie Beispiele von Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit den folgenden Eigenschaften an:

**(a)** $f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
**(b)** $f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
**(c)** $f$ ist nicht surjektiv und nicht injektiv.
**(d)** $f$ ist bijektiv.
**(e)** $f$ ist konstant.
**(f)** Das Bild $f(X) = \{z \in Y \mid \exists\, x \in X\colon z = f(x)\}$ besteht aus genau zwei Elementen.

Zeichnen Sie möglichst zu jeder Abbildung den zugehörigen Graphen.

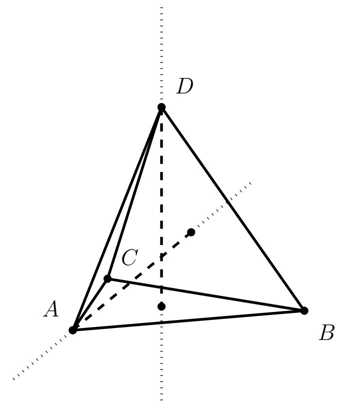
**Aufgabe H 5.** *Rechnen mit komplexen Zahlen*
Gegeben sind im Folgenden je zwei komplexe Zahlen $x$ und $y$ in Polarkoordinatendarstellung. Addieren Sie die beiden Zahlen und geben Sie das Ergebnis $x + y$ in Polarkoordinaten an.

**(a)** $x = 2\,\big(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{\pi}{6})\big)$ $\quad y = 3\,\big(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{6})\big)$
**(b)** $x = 4\,\big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4})\big)$ $\quad y = 5\,\big(\cos(\frac{6\pi}{8}) + i\,\sin(\frac{6\pi}{8})\big)$
**(c)** $x = 6\,\big(\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i\,\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\big)$ $\quad y = 7\,\big(\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + i\,\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\big)$

**Aufgabe H 6.** *Wurzelziehen*
Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $(z - i)^8 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$.
*Hinweis:* Es ist $(z - i)^8 = 1$ genau dann, wenn $(z - i)^4 = \pm 1$. Reduzieren Sie nun genauso zu Gleichungen für $(z - i)^2$ und lösen Sie dann mit dem Ansatz $z = x + i\,y$.

**Aufgabe H 7.** *Drehgruppe, räumliche Anschauung*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Drehungen eines Tetraeders, die den Tetraeder als Ganzes fest lassen und nur Ecken, Kanten und Flächen vertauschen.




**(a)** Was erhält man, wenn man zuerst den Tetraeder um die Achse durch $A$ und die gegenüberliegende Flächenmitte um $120°$ dreht und dann um die Achse durch $D$ und die gegenüberliegende Flächenmitte um $240°$ dreht? In beiden Fällen drehen wir gegen den Uhrzeigersinn, wenn wir die Achse vom Eckpunkt zur Fläche hin betrachten.

**(b)** Beschreiben Sie alle Drehungen, die den Tetraeder als Ganzes fest lassen.
*Hinweis:* Sie müssen auf $12$ verschiedene Drehungen kommen (einschließlich der Drehung um $0°$).

**(c)** Begründen Sie kurz, warum diese $12$ Drehungen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**3. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 8.** *Formale Mengenschreibweise*

Geben Sie die folgenden Mengen in formaler Schreibweise an:

**(a)** Die Menge der rationalen Zahlen zwischen $-1$ und $2$.

**(b)** Die Menge bestehend aus den Zahlen $0, 2, 4$ und $\pi$.

**(c)** Die Menge aller nicht-rationalen komplexen Zahlen.

**Aufgabe P 9.** *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}$. Geben Sie diese Lösungsmengen in formaler Mengenschreibweise an.

**(a)** $x^2 - 5x \leqq 0$

**(b)** $x^2 \geqq 4 - 3x$

**(c)** $x^3 - x < 0$

**Aufgabe P 10.** *Nullstellen von Polynomen*

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomgleichungen. Raten Sie zunächst eine Lösung und führen Sie dann eine Polynomdivision durch.

**(a)** $-\frac{1}{8}u^3 + \frac{3}{4}u^2 - 4 = 0$

**(b)** $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

**(c)** $x^3 - 7x - 6 = 0$

**(d)** $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{8} = 0$

**Aufgabe P 11.** *Menge von Mengen*

Als Potenzmenge bezeichnet man die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Grundmenge. Zu einer Menge $M = \{a, b, c\}$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ gegeben durch

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Zeigen Sie: Hat eine Menge $M$ die Mächtigkeit $|M| = n$ (das heißt: enthält sie genau $n$ Elemente), so hat ihre Potenzmenge die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 8.** *Faktorisierung von Polynomen*

Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden komplexen Polynomgleichungen. Verwenden Sie die angegebene Lösung für den ersten Schritt der Polynomdivision.

**(a)** $z^3 + (1-i)z^2 + (1-i)z - i = 0 \quad ; \qquad z_1 = i$

**(b)** $z^5 + z^4 - 13z^3 + 19z^2 - 68z + 60 = 0 \quad ; \qquad z_1 = -5$

**Aufgabe H 9.** *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die jeweiligen Lösungsmengen in formaler Schreibweise an und stellen Sie diese auch graphisch dar.

**(a)** $xy \leqq 2$

**(b)** $x^3 + y^3 \geqq xy(x+y)$

**Aufgabe H 10.** *Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung*

Es sei $n \geqq 2$. Beweisen Sie: Sind die reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ alle positiv oder alle negativ, aber immer größer als $-1$, so ist

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Inwiefern ist dies eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung?

**Aufgabe H 11.** *Dreiecksungleichung*

Beweisen Sie die folgende Ungleichung für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 + x_2| \leqq |x_1| + |x_2|.$$

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 12.**

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

**(a)** Die Kreislinie $\left\{v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |v| = 1\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

**(b)** Die Menge $\left\{\sum_{j=1}^{2} \alpha_j v_j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$ mit $v_1 = (1, 2, -1)$ und $v_2 = (0, 1, -7)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**(c)** Die Menge $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3\,x + 2\,y - z = 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**(d)** Die Menge $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3\,x + 2\,y - z = 2\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe P 13.**

Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Aufspann $\mathrm{L}\,(v_1, v_2)$.

Sind die Vektoren

**(a)** $v_1, v_2, v_3$ **(b)** $v_1, \ldots, v_5$ **(c)** $v_1, v_5$

jeweils linear unabhängig? Bilden sie jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Bilden sie jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Wählen Sie aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ mindestens zwei verschiedene Basen von $\mathbb{R}^3$ sowie mindestens zwei davon verschiedene Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe P 14.**

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome. Für $p, q \in \mathbb{R}[X]$ sei

$$\langle p|q\rangle := \int_0^1 p(x)\,q(x)\;\mathrm{d}\,x$$

definiert. Zeigen Sie, dass dies für alle $p, q, r \in \mathbb{R}[X]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften

**(a)** $\langle p|q\rangle = \langle q|p\rangle$

**(b)** $\big(\langle p|p\rangle \geqq 0\big) \wedge \big(\langle p|p\rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0\big)$

**(c)** $\langle p|q + r\rangle = \langle p|q\rangle + \langle p|r\rangle$

**(d)** $\alpha\langle p|q\rangle = \langle \alpha\,p|q\rangle = \langle p|\alpha\,q\rangle$

eines Skalarproduktes besitzt.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

### Aufgabe H 12.

Wir betrachten einen reellen Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt:

**(a)** $|v+w|^2 = |v|^2 + 2\langle v|w\rangle + |w|^2$

**(b)** $|v-w|^2 = |v|^2 - 2\langle v|w\rangle + |w|^2$

**(c)** $|v|^2 - |w|^2 = \langle v+w|v-w\rangle$

### Aufgabe H 13.

Gegeben sind die Punkte $A = (5,1,0)$, $B = (1,5,2)$ und $C = (-1,1,6)$ sowie die Gerade $g$ mit

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene $E$, die $A$, $B$ und $C$ enthält. Berechnen Sie außerdem den Schnittpunkt von $g$ und $E$.

**(b)** Zeigen Sie, dass das Dreieck $ABC$ gleichschenklig und rechtwinklig ist.

**(c)** Der Punkt $D$ bilde mit $A$, $B$ und $C$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt $M$. Bestimmen Sie $D$ und $M$.

### Aufgabe H 14.

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1,1,0,2)$, $v_2 = (0,2,1,\pi)$, $v_3 = (2,1,-1,2)$ sowie $v_4 = (-1,0,1,0)$ und $v_5 = (2,4,1,4+\pi) \in \mathbb{R}^4$. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit der entsprechenden Rechnung.

**(a)** $v_1, v_3$

**(b)** $v_1, v_2, v_3$

**(c)** $v_1, v_2, v_5$

**(d)** $v_1, v_2, v_3, v_4$

### Aufgabe H 15.

Ein spurgebundenes Fahrzeug (Eisenbahn, Transrapid, etc.) übt momentan eine Antriebskraft vom Betrag $4$ aus und bewegt sich dabei auf Schienen, die in Richtung $\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ verlegt sind. Zusätzlich wirkt auf das Fahrzeug die Windkraft $\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Wie groß ist die Gesamtkraft in Fahrtrichtung?

Wie groß ist die vom Wind erzeugte Querkraft auf die Schiene (die Kraft, die senkrecht zur Schiene in der horizontalen Ebene, die von $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ aufgespannt wird, wirkt)?

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**5. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 15.** *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Ebene $E_1$ und die Gerade $g_1$ durch:

$$E_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4 \right\}, \qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Schnitt $E_1 \cap g_1$.

**(b)** Bestimmen Sie die Ebene $E_2$, die $g_1$ enthält und zu $E_1$ senkrecht ist.

**Aufgabe P 16.** *Auffüllen einer Basis*

Wir betrachten den Untervektorraum

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\} \subseteqq \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass $v_1 = (1, 0, 1, 1)$ und $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ linear unabhängig sind und in $U$ liegen. Geben Sie eine Basis von $U$ an, welche $v_1$ und $v_2$ enthält. Welche Dimension hat $U$?

**Aufgabe P 17.** *Vektoren und Koordinaten*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $B = \{X^2, X - 1, X + 1\}$ und $C = \{1, X, X^2\}$.

Geben Sie für das Polynom $p(X) := X^2 + 2X + 1$ die Koordinatentupel ${}_Bp$ bezüglich $B$ und ${}_Cp$ bezüglich $C$ an.

Überprüfen Sie die von Ihnen gefundenen Koordinaten durch eine Probe (Einsetzen).

**Aufgabe P 18.** *Fläche eines Dreiecks*

Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sind drei Punkte $P_1 = (1, 2, 2)$, $P_2 = (2, 1, -3)$ und $P_3 = (3, 2, -2)$ gegeben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $P_1, P_2$ und $P_3$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 16.** *Koordinatentupel*

Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren $v_1 = (3, 0, 3)$, $v_2 = (6, -12, 0)$ und $v_3 = (3, 30, 90)$ bezüglich der folgenden Basen.

**(a)**

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

**(b)**

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Definition von *Koordinaten(-tupeln)* aus der Vorlesung.
Machen Sie eine *Probe*!

**Aufgabe H 17.** *Winkel und Spiegelbilder*

**(a)** Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden und den Winkel zwischen ihnen:

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; r, s \in \mathbb{R}.$$

Überprüfen Sie den ermittelten Schnittpunkt durch eine Probe!

**(b)** Die Ebene $E$ enthalte die Geraden $f$ und $g$. Stellen Sie die Hesse-Normalform von $E$ auf und spiegeln Sie den Punkt $Q(1, 1, -3)$ an $E$.
*Hinweis:* Welchen Abstand haben $Q$ und $Q'$ von $E$?

**Aufgabe H 18.** *Vom Nutzen verschiedener Basen*

Im Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} = \left\{ \sum_{j=0}^{2} c_j X^j \;\middle|\; c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens $2$ bilden die folgenden Elemente eine Basis:

$$p_1(X) := \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X, \quad p_2(X) := -X^2 + 1, \quad p_3(X) := \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} X.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Werte $p_j(k)$ für alle $j \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{-1, 0, 1\}$.

**(b)** Finden Sie $f, g \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

$$\begin{aligned} &f(-1) = 1, \quad f(0) = 17, \quad f(1) = -2121, \\ &g(-1) = 8, \quad g(0) = -7, \quad g(1) = 0. \end{aligned}$$

*Hinweis:* Setzen Sie $f$ und $g$ als Linearkombinationen von $p_1, p_2, p_3$ an.

**(c)** Warum ist die Basis $p_1, p_2, p_3$ hier besser als die Basis $X^0, X^1, X^2$ ?

*Zusatz:* In der Aufgabe haben wir angenommen, dass die Polynome $p_1, p_2, p_3$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ bilden. Können Sie den Nachweis erbringen, dass dies tatsächlich wahr ist?

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 19.**

Berechnen Sie für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgende Summen und Produkte (sofern das möglich ist):

**(a)** $A^\mathsf{T} y$ **(c)** $B^\mathsf{T} B$ **(e)** $A + B^\mathsf{T}$

**(b)** $A y^\mathsf{T}$ **(d)** $A + B$ **(f)** $y^\mathsf{T} y$

**Aufgabe P 20.**

Heinrich Lohse braucht für sein Büro einen neuen Computer. Um einen Mengenrabatt zu bekommen, bestellt er Radiergummis, Schreibmaschinenpapier und Computer im Wert von insgesamt 300.000,– DM und bekommt dann Radiergummis für 0,10 DM pro Stück, Schreibmaschinenpapier für 2,80 DM pro Packung und Computer für 6000,– DM pro Gerät (zur Erinnerung: 1 € $\cong$ 1,95583 DM). Insgesamt bestellt Herr Lohse 300.000 Artikel beim Großhandel.

Wie viele Radiergummis, wie viele Packungen Schreibmaschinenpapier und wie viele Computer hat er jeweils bestellt?

**Aufgabe P 21.**

Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$.

**(a)**
$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_3 + 3\,x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$

**(b)**
$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \\ 7x_2 + 0x_1 &= 2 \end{aligned}$$

**(c)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ x_1 + 0x_2 &= 4 \\ 3x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen?

Stellen Sie die erweiterten Koeffizientenmatrizen auf.

Lösen Sie die Gleichungssysteme.

**Aufgabe P 22.**

**(a)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert eine Matrix $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}$ derart, dass $AC = \mathbf{0}$ gilt?

Bestimmen Sie jeweils alle solchen Matrizen $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und berechnen Sie dann auch $CA$.

**(b)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Was muss für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten, damit es möglich ist, die inverse Matrix $A^{-1}$ zu $A$ zu bestimmen (also eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA^{-1} = E_2 = A^{-1}A$) ?

Geben Sie die Inverse in diesen Fällen an.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 19.**

Berechnen Sie für die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

alle Matrizenprodukte aus je zwei Faktoren, soweit diese Produkte definiert sind.

**Aufgabe H 20.** *Kuchen backen*

Sie wollen für die Gruppenübung in Höherer Mathematik Kuchen backen. Dafür haben Sie mehrere Rezepte zur Auswahl: Für einen Napfkuchenteig brauchen Sie 500g Mehl, 250g Zucker, 250g Butter und 5 Eier, für einen großen Rührkuchen 6 Eier, 500g Zucker, 400g Butter und 500g Mehl, und für einen kleinen Strudel 250g Mehl, 50g Butter und 2 Eier. Sie plündern die WG-Küche und finden 1kg Mehl, $\frac{1}{4}$kg Zucker, 9 Eier und einige Butterüberreste, die zusammen 350g ergeben. Wieviele Kuchen von welcher Sorte können Sie damit backen, wenn Sie alle Vorräte aufbrauchen wollen?

**Aufgabe H 21.**

Lösen Sie das folgende komplexe lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} (4-i)\,z_1 & + & i\,z_2 & = & 4i \\ (4+i)\,z_1 & + & z_2 & = & 2 \end{array}$$

Vergessen Sie die Probe nicht!

**Aufgabe H 22.**

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $v$ und $w$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$.

**(a)** Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{K}$ sind die Vektoren $v$, $v + \alpha w$ linear abhängig, für welche sind sie linear unabhängig?

**(b)** Jetzt sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v + \alpha w$, $w$ orthogonal zueinander stehen.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**7. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 23.**
Lösen Sie das für $x \in \mathbb{R}^4$ gegebene Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \\ 6 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe P 24.**
Bestimmen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (t-1)^2 & 1 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

**(a)** genau eine Lösung **(b)** keine Lösung **(c)** unendlich viele Lösungen

besitzt. Geben Sie im Fall **(a)** und **(c)** alle Lösungen an.

**Aufgabe P 25.** *Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen*

**(a)** Beschreiben Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Vektor auf den um $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Vektor gleicher Länge abbildet durch eine Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{C}$: $c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**(b)** Gegeben ist die Ebene

$$E_1 : \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x}\right) = 0.$$

Spiegeln an dieser Ebene ist eine lineare Abbildung, wir nennen sie $\varphi$. Geben Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{E}}$ an für die Basis $\mathcal{B}$: $b_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe P 26.** *Lineare Abbildungen*
Sind die folgenden Abbildungen linear oder nicht? Geben Sie jeweils eine Begründung.

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

**(b)** $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto 2x+4$

**(c)** $h\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \quad p(X) \mapsto p(1)$

**(d)** $k\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(X+1)$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 23.**
Lösen Sie das für $x \in \mathbb{R}^6$ gegebene Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 16 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 30 \\ 2 & 5 & 9 & 14 & 20 & 23 \\ 2 & 5 & 11 & 21 & 36 & 32 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 35 \\ 70 \\ 50 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H 24.**
Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & t^2+3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & t-4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußverfahrens.

**Aufgabe H 25.** *Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen*

**(a)** Beschreiben Sie die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um $\frac{\pi}{6}$ gegen den Uhrzeigersinn um die $x$-Achse durch eine Matrix bezüglich der Standardbasis.

**(b)** Beschreiben Sie die Halbdrehung des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ um die Gerade $g_1 : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ durch eine Matrix bezüglich der Standardbasen.

**Aufgabe H 26.** *Blockmatrizen*
Wir betrachten zwei beliebige $3 \times 3$-Matrizen $A, B$. Verifizieren Sie:

$$\begin{pmatrix} E_3 & A \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & B \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & A+B \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix}$$

(Zur Erinnerung: $E_3$ ist die $3 \times 3$-Einheitsmatrix, $\mathbf{0}$ ist in diesem Fall die $3 \times 3$-Nullmatrix).

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**8. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 27.**

Bestimmen Sie den Rang $\operatorname{Rg} A$ der folgenden reellen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe P 28.**

Gegeben sind die folgenden reelle Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**(a)** Für welche Matrizen gibt es eine Rechtsinverse, eine Linksinverse, eine Inverse?

**(b)** Berechnen Sie in den Fällen, wo es möglich ist, die Inverse.

**Aufgabe P 29.**

Gegeben sind zwei Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

**(a)** Durch $\varphi(b_1) = 2c_1 + c_2$, $\varphi(b_2) = -c_3$ und $\varphi(b_3) = c_1 + 2c_3$ ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert. Begründen Sie diese Behauptung. Geben Sie die Matrix ${}_C\varphi_B$ an.

**(b)** Die Basen $B$ und $C$ stehen in folgender Beziehung:

$$b_1 = c_1 - c_3\,, \qquad b_2 = c_1 + c_2\,, \qquad b_3 = c_2 - c_3\,.$$

Geben Sie für alle $j \in \{1, 2, 3\}$ die Koordinatentupel ${}_B(b_j)$ und ${}_C(b_j)$ an. Berechnen Sie die Matrixdarstellungen ${}_C\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_C$.

**(c)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_B\varphi_C$ und ${}_C\varphi_C$.

**Aufgabe P 30.**

Betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) \mapsto (2x + 4y + 7z, 5y + z, 3z) \\ g_2 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) \mapsto (x^2, xyz, z + 3x - 29y) \\ g_3 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \quad\ \mapsto (5x + 2y, 4y, 4x + 3y) \end{aligned}$$

**(a)** Welche dieser Abbildungen sind linear?
Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

**(b)** Bestimmen Sie die Kerne der linearen Abbildungen.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 27.**
In Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & t \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben, die die lineare Abbildung $\alpha_t \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto A_t\, x$ beschreibt.
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t$ den Kern $\operatorname{Ker}(\alpha_t)$.

**Aufgabe H 28.**

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

**(a)** Berechnen Sie $A^{-1}$.

**(b)** Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $A\,x = b_j$ für die Vektoren $b_1 = (6,0,1)^\intercal$, $b_2 = (3,0,4)^\intercal$, $b_3 = (48,24,3)^\intercal$, $b_4 = (6,7,-3)^\intercal$.
*Hinweis:* Benutzen Sie die oben berechnete Inverse.

**Aufgabe H 29.**
Wir bezeichnen mit $E$ bzw. $F$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $C := \{c_1, c_2, c_3\}$ die Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. von $\mathbb{R}^3$, für die gilt:

$$B\colon\ {}_E(b_1) = (1,0,-1,0)^\intercal,\ {}_E(b_2) = (0,1,0,-1)^\intercal,\ {}_E(b_3) = (1,0,1,0)^\intercal,\ {}_E(b_4) = (0,2,0,1)^\intercal$$

$$C\colon\ {}_F(c_1) = (0,1,0)^\intercal,\ {}_F(c_2) = (1,0,-1)^\intercal,\ {}_F(c_3) = (2,-1,2)^\intercal.$$

Gegeben sind nun die linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch die Werte auf den Basen $B$ bzw. $C$:

$${}_F(\varphi(b_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ {}_F(\varphi(b_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}_F(\varphi(b_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ {}_F(\varphi(b_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_E(\psi(c_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}_E(\psi(c_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}_E(\psi(c_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**(a)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E(\psi \circ \varphi)_E$.

**(b)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_C(\varphi \circ \psi)_C$.

**(c)** Bestimmen Sie den Kern $\operatorname{Ker}(\psi \circ \varphi)$.

# Höhere Mathematik I



**Aufgabe P 31.**

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & -9 & 6 \\ 7 & -34 & 42 & 9 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe P 32.**

Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen:

$$A_t := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_t := \begin{pmatrix} -3 & 4t & 6 \\ 2 & -2 & 2t-5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**(a)** Berechnen Sie $\det(A_t)$ und $\det(B_t)$.

**(b)** Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen $A_t$ und $B_t$ invertierbar sind.

**(c)** Bestimmen Sie, falls möglich, $\det(A_t^{-1})$, $\det(B_t^{-1})$, $\det(A_t B_t)$, $\det(A_t)\det(A_t^{-1})$.

**Aufgabe P 33.**

Es sei die folgende Abbildung gegeben:

$$s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix}$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $s$ eine lineare Abbildung ist.

**(b)** Berechnen Sie $\operatorname{Ker}(s)$. Geben Sie eine Basis davon an.

**Aufgabe P 34.**

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass $AB$ und $A^{-1}$ ebenfalls orthogonal sind.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 30.**
Gegeben ist $x \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A_t)$, $\det({A_t}^6)$, $\det(\sqrt{x}A_t)$ und für die $t \in \mathbb{R}$, bei denen die Ausdrücke auch definiert sind, $\det(A_t^{-1}), \det\left((A_t^{-1})^6\right)$.

**Aufgabe H 31.**
Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = (1,1,0,0) \qquad v_2 = (1,0,1,0) \qquad v_3 = (1,0,0,-1) \qquad v_4 = (1,0,1,1)$$

**(a)** Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $W\colon w_1, w_2, w_3, w_4$ derart, dass $\mathrm{L}(w_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $\mathrm{L}(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ und $\mathrm{L}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Matrix $A := \left({}_E w_1 \ {}_E w_2 \ {}_E w_3 \ {}_E w_4\right)$ orthogonal ist, wobei $E$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnet.

**Aufgabe H 32.**
Wir versehen $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit der Basis $B\colon X^2, X-1, X+1$, der Basis $C\colon X^2, X^1, X^0$, der Basis $D\colon \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, -X^2+1, \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ und der Basis $E\colon X^2+X+1, X+1, 1$.
Es ist weiter die Abbildung $s\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon aX^2+bX+c \mapsto bX^2+cX+a$ gegeben.

**(a)** Zeigen Sie, dass $s$ eine lineare Abbildung ist.

**(b)** Berechnen Sie $\det({}_B s_B)$, $\det({}_C s_C)$, $\det({}_D s_D)$, $\det({}_E s_E)$.

**(c)** Berechnen Sie $\det({}_B s_E)$ und $\det({}_C s_D)$.

# Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**10. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 35.**

Es sind die affinen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + t$ und $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Bv + r$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter ist

$$g := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade.

**(a)** Bestimmen Sie $\alpha(g)$ und $\beta(g)$. Sind das Geraden?

**(b)** Berechnen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

**Aufgabe P 36.** *Scherung*

Eine Scherung ist eine affine Abbildung der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst. Dabei bleibt eine Gerade punktweise fest (genannt Scherungsachse) und alle Punkte außerhalb dieser Geraden werden parallel zur Scherungsachse verschoben. Gegeben ist nun eine Scherung $\alpha$ mit der $x$-Achse als Scherungsachse bei der der Punkt $P := (1, 1)$ auf den Punkt $P' = \alpha(P) := (2, 1)$ abgebildet wird. Außerdem ist $Q := (1, 2)$.

**(a)** Bestimmen Sie $\alpha(Q)$ durch eine geometrische Konstruktion.

**(b)** Stellen Sie die zu $\alpha$ gehörige Matrix ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$ auf, wobei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem bezeichnet.

**(c)** Prüfen Sie ihr Ergebnis aus (a) rechnerisch nach.

**Aufgabe P 37.** *Koordinatenwechsel*

Es ist $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2, e_3)$ das in $\mathbb{R}^3$ gegebene Standardkoordinatensystem. Durch den Punkt $P := (-1, \frac{1}{2}, 4)$ und die Vektoren $f_1 := (1, 2, 0)^\intercal, f_2 := (-2, -3, 1)^\intercal, f_3 := (3, -1, 1)^\intercal$ ist ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F} := (P; f_1, f_2, f_3)$ bestimmt.

**(a)** Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

**(b)** Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

**(c)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

**(d)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.
Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 33.** *Drehung: Winkel und Achse*
Zeigen Sie, dass die folgende Matrix $A$ eine Drehmatrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie ferner den Drehwinkel $\varphi$ und die Drehachse von $A$ und geben Sie eine Basis $B$ des $\mathbb{R}^3$ so an, dass gilt:

$${}_BA_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

*Hinweis:* Nehmen Sie die Drehachse als dritte Koordinatenachse.

**Aufgabe H 34.** *Scherung*
Gegeben ist die Scherung $\alpha$ durch:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; : \; x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(a)** Geben Sie das Bild des Dreiecks $PQR$ mit $P := (1,0),\ Q := (2,3),\ R := (3,1)$ unter der Abbildung $\alpha$ an. Machen Sie eine Zeichnung.

**(b)** Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks durch die Abbildung nicht ändert.

**(c)** Bestimmen Sie die Scherungsachse von $\alpha$ und skizzieren Sie das Bild des Einheitskreises unter der Scherung $\alpha$ (durch Konstruktion/Berechnung hinreichend vieler Bildpunkte).

**Aufgabe H 35.** *Koordinatenwechsel*
Gegeben sind die Punkte $P := (1,-2,-1)$, $F_1 := (0,-1,1)$, $F_2 := (0,0,1)$ und $F_3 := (-1,-3,2)$ sowie die Punkte $Q := (-1,0,1)$, $G_1 := (0,0,0)$, $G_2 := (-1,1,3)$ und $G_3 := (-2,1,3)$.

**(a)** Zeigen Sie, dass durch die Punkte $P$ und $F_j$ bzw. die Punkte $Q$ und $G_j$ jeweils ein affines Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(P; \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PF_3}\right)$ bzw. $\mathbb{G} := \left(Q; \overrightarrow{QG_1}, \overrightarrow{QG_2}, \overrightarrow{QG_3}\right)$ gegeben ist. Sind dies auch kartesische Koordinatensysteme?

**(b)** Sei nun noch das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**11. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 38.** *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

**(a)** Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte der Matrizen $A, B, C$ sowie die zugehörigen Eigenräume.

**(b)** Bestimmen Sie alle komplexen Eigenwerte der Matrizen $A, B, C$ sowie die zugehörigen Eigenräume.

**Aufgabe P 39.** *affine Koordinatentransformation*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P_0 := (5,-2,1)$, $P_1 := (6,1,4)$, $P_2 := (3,-1,3)$, $P_3 := (5,-1,2)$ gegeben.

Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so, dass ${}_{\mathbb{F}}P_0 = \vec{0}, {}_{\mathbb{F}}P_1 = e_1, {}_{\mathbb{F}}P_2 = e_2, {}_{\mathbb{F}}P_3 = e_3$. Dabei ist $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem.

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P_4$ des Punktes ${}_{\mathbb{F}}P_4 = (2,1,-3)$.

**Aufgabe P 40.**

Gegeben ist die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$.

**Aufgabe P 41.** *Involutionen*

Gegeben sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. (Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt Involution.)
Welche Eigenwerte kann $\varphi$ besitzen?

*Zusatz:* Zeigen Sie, dass jeder Vektor entweder ein Eigenvektor von $\varphi$ oder die Summe von zwei Eigenvektoren von $\varphi$ ist.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 36.**
Gegeben sei die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5\colon x \mapsto Ax$, die durch folgende Matrix $A$ beschrieben wird:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{2} & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

**(a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ für $A$.

**(b)** Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $A$. Wählen Sie die Nummerierung der Eigenwerte so, dass $\lambda_1$ der negative Eigenwert ist.

**(c)** Konstruieren Sie nun eine Basis: Wählen Sie einen Eigenvektor $f_1 \in V(\lambda_1)$ zum negativen Eigenwert $\lambda_1$. Wählen Sie nun einen Vektor $f_2$ so, dass $(A - \lambda_1 E_5)f_2 = f_1$. Ergänzen Sie die so gewonnenen Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$, indem Sie aus den verbleibenden Eigenräumen drei linear unabhängige Vektoren $f_3, f_4, f_5$ wählen.

**(d)** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_F\alpha_F$ bezüglich der Basis $F := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

**Aufgabe H 37.**
Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $n$ eine natürliche Zahl.

**(a)** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ zum Eigenvektor $v$, dann ist $\lambda^n$ ein Eigenwert von $A^n$ zum Eigenvektor $v$.

**(b)** Widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A^n$, dann ist $\sqrt[n]{\lambda}$ ein Eigenwert von $A$.

*Hinweis:* In „kleinen" Räumen lassen sich für kleine $n$ schöne Gegenbeispiele finden.

**Aufgabe H 38.**
Gegeben sei die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon x \mapsto Ax$, wobei $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $A$.

**(b)** Wählen Sie einen Eigenwert $\lambda$ von $A$ und einen zugehörigen Eigenvektor $f_1$. Konstruieren Sie eine Basis $F\colon f_1, f_2$, indem Sie einen Vektor $f_2$ so wählen, dass $(A - \lambda E_2)f_2 = f_1$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_F\varphi_F$.

**Aufgabe H 39.** *Normalformenproblem für Affinitäten*
Geben Sie eine Klassifikation aller Affinitäten von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, welche eine Fixpunktgerade besitzen.

*Hinweis:* Es gibt drei wesentlich verschiedene Formen solcher Affinitäten.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Inf. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

**12. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

### Aufgabe P 42.

Gegeben ist die symmetrische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$. Geben Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an und diagonalisieren Sie $A$.

### Aufgabe P 43.

In $\mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := (2,-1)^\intercal$, $v_2 := (-3,2)^\intercal$, $v_3 := (-2,2)^\intercal$ sowie die folgenden Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**(a)** Überprüfen Sie, ob $v_1, v_2, v_3$ Eigenvektoren von $A$ beziehungsweise $B$ sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Eigenwerte an.

**(b)** Diagonalisieren Sie die Matrizen $A$ und $B$: Bestimmen Sie jeweils eine Diagonalmatrix, zu der die entsprechende Matrix konjugiert ist, und die zugehörige Transformationsmatrix.

### Aufgabe P 44.

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6x_1^2 + 6x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 - 1 = 0 \right\}$$

**(a)** Geben Sie den quadratischen Teil $q$, den linearen Teil $2\,f$ und den konstanten Teil $c$ der Quadrik $Q$ an.

**(b)** Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A$ und einen Spaltenvektor $a$ so, dass

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

**(c)** Berechnen Sie die Schnitte von $Q$ mit den Koordinatenebenen. Welche Form könnte $Q$ daher haben?

### Aufgabe P 45.

Berechnen Sie für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

die Eigenwerte in Abhängigkeit von $\alpha$, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q$ so, daß $D = Q^{-1} B\, Q$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie $D$ an.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 40.**

**(a)** Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Weiter sei $v$ ein Vektor, der sich folgendermaßen zerlegen lässt: $v = \sum_{j=1}^{k} v_j$, wobei $v_j \in V(\lambda_j)$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Zeigen Sie: $A\,v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$.

**(b)** Gegeben sei nun

$$A := \begin{pmatrix} -4+\sqrt{2} & 64 & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{8}\sqrt{2} & 4 & -\frac{1}{8}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 64 & -4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (8,1,8)^\intercal$ und $v_2 = (2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})^\intercal$ Eigenvektoren von $A$ sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. Berechnen Sie für $v = \left(\frac{20}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 10\sqrt{2}\right)^\intercal$ den Vektor $A\,v$. Verwenden Sie dazu (a), indem Sie $v = w_1 + w_2$ zerlegen mit $w_1 \in \mathrm{L}(v_1)$ und $w_2 \in \mathrm{L}(v_2)$. (*Hinweis:* Finger weg vom Taschenrechner!)

**Aufgabe H 41.**

Diagonalisieren Sie die in Aufgabe H 40 gegebene Matrix $A$: Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D$, zu der $A$ konjugiert ist, und die Transformationsmatrix $T$, für die $D = T^{-1}AT$ gilt.

*Hinweis:* Der Eigenraum $V(\lambda)$ zum negativen Eigenwert $\lambda$ ist 2-dimensional.

**Aufgabe H 42.**

Gegeben ist die hermitesche Matrix $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2+i \\ 0 & -1 & 1-2i \\ 2-i & 1+2i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

**(a)** Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A$ und die entsprechenden Eigenräume.

**(b)** Diagonalisieren Sie die Matrix $A$ und geben Sie die Diagonalmatrix $D$ und die Transformationsmatrix $T$ an, so dass $\overline{T}^\intercal AT = D$ gilt.

**Aufgabe H 43.**

Gegeben ist die Quadrik $Q := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\right\}$.

**(a)** Geben Sie den quadratischen, den linearen und den konstanten Teil der Quadrik an.

**(b)** Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik $Q$ an.

**(c)** Entscheiden Sie, ob $Q$ eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

**(d)** Skizzieren Sie die Quadrik.

*Hinweis:* Gehen Sie analog zur Vorlesung vor und schneiden Sie die Quadrik mit Ebenen, die senkrecht zu Koordinatenachsen liegen.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Kreitz
Dipl.-Math. M. Pfeil

**13. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 46.**
Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_1\,x_2 + 3\,x_2\,x_1 + 4\,x_2^2 + \frac{26}{5}\,x_1 + \frac{12}{5}\,x_2 - 7 = 0 \right\} .$$

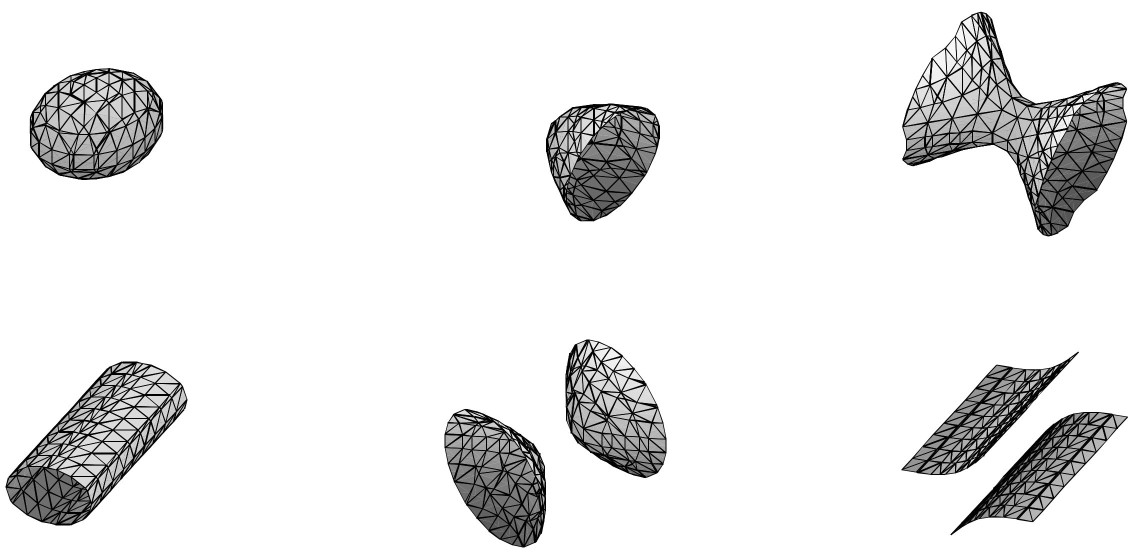
Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

**Aufgabe P 47.**
Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4cx_2x_3 + 2c(c-1)x_3 + c(c-1) = 0 \right\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

**Aufgabe P 48.**
Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.



## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 44.**
Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q : x_1^2 + 20x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 + 24x_2x_3 - 14x_2 + 7x_3 - 7 = 0\,.$$

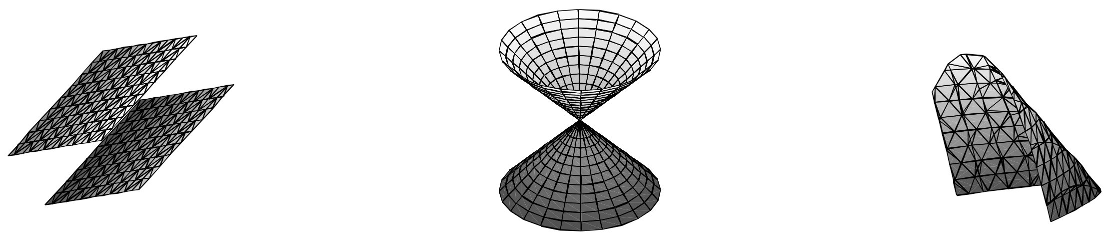
Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

**Aufgabe H 45.**
Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{5}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{5}{4}x_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2x_3 + 4x_2 + 4x_3 + 10 = 0 \right\}.$$

Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

**Aufgabe H 46.**
Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.



Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Kreitz
Dipl.-Math. M. Pfeil

**14. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 49.**

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie im Falle der Beschränktheit konkrete obere und untere Schranken an.

**(a)** $\big(n + \sin(2\,\pi\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

**(b)** $\big(n\,\sin(\frac{\pi}{2}\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

**(c)** $\big(\frac{1}{n}\,\sin(2\,\pi\,n + n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

**(d)** $\big(\sin(2\,\pi\,n - \frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

**(e)** $\big(\sin(\pi\,n - \frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe P 50.** *Häufungspunkte*

Berechnen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen:

**(a)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

**(b)** $a_n = 5 \cdot (-1)^n$

**(c)** $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

**(d)** $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

**Aufgabe P 51.** *rekursive Folgen*

Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder der rekursiv definierten Folge

$$a_{n+1} = a_n + 8\,(n-1) \qquad \text{mit } a_1 = 1\,.$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass für diese Folge auch

$$a_n = 4n^2 - 12n + 9$$

gilt.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 47.** *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

**(a)** $\left(\dfrac{n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(b)** $\left((-1)^n\,\dfrac{n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(c)** $\left(2\,n+\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(d)** $\left(2\,\pi\,n+n\,\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe H 48.** *Häufungspunkte*

Geben Sie alle Häufungspunkte der Folgen an:

**(a)** $\left(\dfrac{1}{n}+\sin(n\dfrac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(b)** $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+3\cos(n\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(c)** $\left(\dfrac{n+1}{n}(-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(d)** $\left((-1)^n+\sqrt{1-\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+n\pi)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe H 49.** *rekursive Folge von Matrizen, Fibonacci-Zahlen*

Wir starten mit der Matrix

$$A:=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Damit definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_i$ ist der Eintrag rechts oben in der Matrix $A^i$. Weiter ist die Folge der Fibonacci-Zahlen rekursiv definiert durch $f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ für $n\geqq 2$.

**(a)** Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Folgen $(a_n)$ und $(f_n)$ gleich sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass für eine Diagonalmatrix $D$ und eine invertierbare Matrix $T$ gilt:

$$(T^{-1}DT)^k=T^{-1}D^kT\quad\forall\ k\in\mathbb{N}$$

**(c)** Benutzen Sie die beiden vorigen Aufgabenteile, um eine explizite (nicht-rekursive) Beschreibung der Fibonacci-Zahlen zu geben.

*Hinweis:* Lassen Sie sich nicht von ein paar Wurzeln schrecken.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Kreitz
Dipl.-Math. M. Pfeil

**15. Gruppenübung zur Vorlesung**

Prof. Dr. M. Stroppel

# Höhere Mathematik I

Winter 2006/07

**Aufgabe P 52.**
Geben Sie für alle Folgen an, ob sie beschränkt oder monoton sind. Welche der Folgen sind Cauchy-Folgen?

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2+2}{n^2+1} \\
b_n &= (-1)^n \frac{e^n}{4^n+5} \\
c_n &= n - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe P 53.**
Geben Sie für die Folge

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{n+2}{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (vgl. 1.4.1, S. 26 im Skript) und alle Häufungspunkte an.

**Aufgabe P 54.**
Entscheiden Sie, ob die Folgen konvergent sind:

$$\left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^5}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{4\,n^4-3\,n+1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

*Hinweis:* Vielleicht hilft es, eine Identität der Form $\frac{4\,n^4-3\,n+1}{N} = \frac{4\,n^4}{N} + \frac{-3\,n}{N} + \frac{1}{N}$ und dann Konvergenzsätze zu benutzen.

**Aufgabe P 55.**
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver Zahlen und $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ebenfalls positiv.

Zeigen Sie, dass $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ gilt.

*Hinweis:* Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_\varepsilon$ gilt. Verwenden Sie hierzu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sowie

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leqq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 50.**
Es ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 = 4$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$.

**(a)** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geqq 2$.

**(b)** Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

**(c)** Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls diese konvergent ist.
*Hinweis:* P 55 hilft. Damit kann man begründen, dass man den Grenzwert $a$ durch die Gleichung $a = \sqrt{2a+1}$ bestimmen kann.

**Aufgabe H 51.**
Gegeben sind die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\,n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2\,n^3 + 2\,n^2 + n}{n^2 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n)_{n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{2\}} = \left(\frac{2\,n^4}{-2\,n^2 + 8}\right)_{n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{2\}}$$

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{-6\,n^2 + 42\,n - 72}{-3\,(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

**(a)** Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

**(b)** Führen Sie diese Untersuchung ebenfalls durch für die Folgen

$$(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{2\}} \qquad (f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n - d_n)_{n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{2\}} \qquad (a_n - e_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{b_n}{g_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{g_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Begründen Sie mit Hilfe dieser Erkenntnisse, warum es nicht möglich ist, Ausdrücken wie „$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“ oder „$\frac{0}{0}$“ einen vernünftigen Wert zuzuordnen.

**Aufgabe H 52.** *Ein etwas komplizierterer Grenzwert*

**(a)** Zeigen Sie, dass $\frac{(n+1)^e}{n^e} < e$ falls $n \geqq 3$.

**(b)** Zeigen mit Hilfe vollständiger Induktion und dem Ergebnis aus (a), dass $n^e < e^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 3$ gilt.

**(c)** Benutzen Sie obige Ergebnisse und den Sandwich-Satz, um den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^e + e^n}$$

zu bestimmen.