D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

1. Gruppenübung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik 1

Winter 2008/09

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = 2097,8 : 17$

(b) $x_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{\frac{5}{2}}$

(c) $x_3 = \sqrt{48^2 + 14^2}$

Aufgabe P 2. *Binomialkoeffizienten*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = \binom{10}{7}$

(b) $x_2 = \binom{8}{5} + \binom{8}{6} - \binom{8}{8}$

Hinweis: Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten geschickt aus.

Aufgabe P 3. *vollständige Induktion, Fakultät*

Beweisen Sie folgende Summenformeln mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Aufgabe P 4. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} M_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} , \\ M_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 4\} , \\ M_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4\} . \end{aligned}$$

Diskutieren Sie dabei in ihrer Gruppe, welche Auswirkungen die Änderungen bei jedem Schritt in der Skizze haben.

(c) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$\begin{aligned} M_5 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\} , \\ M_6 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2(x+1)^2 \geqq 2\} . \end{aligned}$$

und die Schnittmenge von M_1, M_5 und M_6.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Binomischer Lehrsatz*
Zeigen Sie, dass die folgende Summenformel für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Hinweis: Sie können dabei den Binomischen Lehrsatz verwenden, den Sie in der Vorlesung gelernt haben.

Aufgabe H 2. *vollständige Induktion, Pascalsches Dreieck*
Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion über n, dass die folgende Summenformel für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

Stellen Sie das Ergebnis für $m = 3$, $n = 1$ im Pascalschen Dreieck dar.
Hinweis: Nutzen Sie hier ebenfalls die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten geschickt aus.

Aufgabe H 3. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ y = -2\,(x+1)^2 + 4\}\ ,$$
$$M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x + 2\,(y+1)^2 = 4\}\ .$$

(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ (x-1)^2 + y^2 \leqq 2\}\ ,$$
$$M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + y^2 < 1\}\ .$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

2. Gruppenübung

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Höhere Mathematik 1

Winter 2008/09

Aufgabe P 5. *Komplexe Zahlen*

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-3\,i$, $z_3 = -i$ und $z_4 = (1+\sqrt{2})\,i - 1$. Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Ergebnisse sowohl in klassischer Schreibweise $(a+b\,i)$ als auch als Paar (a,b) an (jeweils mit $a,b \in \mathbb{R}$).

(a) $z_5 = z_1 + z_4$

(b) $z_6 = z_1 \cdot z_2$

(c) $z_7 = \overline{z_2}$

(d) $z_8 = \dfrac{z_1}{z_3}$

Skizzieren Sie alle beteiligten Zahlen in der Zahlenebene.

Aufgabe P 6. *Mengen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese:

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - i + 1| \leqq 1 \right\} ,$$
$$M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(1/\bar{z}) \geqq \sqrt{2} \right\} ,$$
$$M_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) \geqq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) < -2 \right\}$$

Aufgabe P 7. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

(a) Prüfen Sie folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - x^2$$
$$g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\colon x \mapsto \sqrt{x}$$
$$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto \bar{c}$$

(b) Es seien die Mengen $M_1 := \{0,1,2,3\}$ und $M_2 := \{0,1,2,3,4\}$ gegeben. Existiert eine injektive, eine surjektive, eine bijektive Abbildung von M_1 nach M_2?

(c) Existiert eine injektive, eine surjektive, eine bijektive Abbildung vom Intervall $I_1 := [0,3]$ ins Intervall $I_2 := [0,4]$?

Aufgabe P 8. *Aussagen und komplexe Zahlen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $\forall c \in \mathbb{C}\, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\colon c = a + bi$

(b) $\forall c \in \mathbb{C}\colon c = \operatorname{Re} c + \operatorname{Im} c$

(c) $\exists c \in \mathbb{C}\colon c = \operatorname{Re} c + \operatorname{Im} c$

(d) $\forall c \in \mathbb{C}\colon c = \operatorname{Re} c + (\operatorname{Im} c)i$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Komplexe Zahlen*

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + y\,i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 - 3\,i)(3 + 2\,i) + \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

(b) $(1 + \sqrt{3}\,i)^3 + (1 - \sqrt{3}\,i)^3$

(c) $(1 + i)^{10}$

(d) $\mathrm{Im}(2 - 4\,i) + \mathrm{Re}(|5 + 2\,i|)$

Aufgabe H 5. *Mengen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z + \bar{z} = z \cdot \bar{z} \right\} , \\ M_2 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1| = |z + 1| \right\} , \\ M_3 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqq 1 \vee |z - 3\,i| \leqq 2 \right\} . \end{aligned}$$

Aufgabe H 6. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto c^2$

(b) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto |c|$

(c) $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto i \cdot c$

D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

3. Gruppenübung

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Höhere Mathematik 1

Winter 2008/09

Aufgabe P 9. *Polarkoordinaten komplexer Zahlen*

Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $z_1 = 4\,i$

(b) $z_2 = 5 - 5\,i$

(c) $z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$

Aufgabe P 10.

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die die Gleichung

$$z^4 = 16 - 16\,i$$

erfüllen.

Aufgabe P 11. *Linearfaktoren*

(a) Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren:

$$p_1(X) = 4\,X^3 + 7\,X^2 - 7\,X - 10 \quad \text{und} \quad p_2(X) = 7\,X^4 - 10\,X^3 - 15\,X^2 + 10\,X + 8\,.$$

(b) Wie müssen die Parameter a, b, c und d aus $\mathbb{C}$ gewählt werden, damit i, -1 und $1-2\,i$ Nullstellen des Polynoms $p(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$ sind?

Aufgabe P 12. *Vektorräume und Untervektorräume*

Gegeben ist die Menge der reellen Polynome $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$.

Weiter ist $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R} := \left\{p \in \operatorname{Pol}\mathbb{R} \;\middle|\; p = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k X^k; \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens 2.

(a) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, wie die Addition und die Multiplikation mit Skalaren sinnvollerweise zu definieren ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe P 13. *Kartesische Produkte*

Gegeben ist das reelle Intervall $I := [0,1]$ und die Menge $W := I^3 = I \times I \times I$ sowie die Mengen $S_1 := \left\{(a,b,0) \in W \;\middle|\; (a,b) \in I^2\right\}$ und $S_2 := \left\{(a,0,b) \in W \;\middle|\; (a,b) \in I^2\right\}$.

(a) Visualisieren Sie die Menge W durch eine Skizze.

Hinweis: Es kann dabei helfen, sich W als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ vorzustellen.

(b) Skizzieren Sie $S_1, S_2 \subsetneqq W$.

(c) Verstehen Sie anhand dieses Beispiels die Gesetze von de Morgan.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7.

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 := 1 - i\,, \quad z_2 := \sqrt{3} + i\,, \quad z_3 := \sqrt{3}i\,.$$

Berechnen Sie die folgenden Terme möglichst geschickt, indem Sie Polarkoordinaten verwenden, wenn es gegeben erscheint. Geben Sie die Ergebnisse sowohl in Polarkoordinaten als auch in der Form $a + b\,i$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ an.

(a) $z_2 \cdot z_3$

(b) ${z_1}^2 - \overline{z_3}$

(c) ${z_2}^{10}$

(d) $z_4 + \overline{z_1}$, wobei z_4 Lösung der Gleichung ${z_4}^2 = z_3$ ist.

Aufgabe H 8.

(a) Gesucht ist ein Polynom $p \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$ so, dass

$$p \cdot (X^2 - 7\,X) = (3\,X^5 - 21\,X^4 + X^3 - 5\,X^2 - 14\,X)\,.$$

(b) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 - X^2 - 12 \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$ in (komplexe) Linearfaktoren.

(c) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 - X^2 - 12 \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$ so in ein Produkt reeller Polynome, dass keiner dieser Faktoren mehr als eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe H 9. *Vektoräume und Untervektorräume*

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, wie die Addition und die Multiplikation mit Skalaren sinnvollerweise zu definieren ist.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante. Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengen um Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ handelt:

$$R := \left\{ a + 0i \in \mathbb{C} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \arg(z) = c \right\}$$
$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = c \right\}$$

Zusatz (geht nicht in die Bewertung ein): Wie ändert sich die Situation, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet?

I. Rybak
S. Poppitz

4. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1
Winter 2008/09

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Aufgabe P 14.
Die Ebene E ist im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ und $P_3 = (0,0,2)$ aufgespannt. Weiter ist die Gerade g gegeben durch $g\colon (0,0,-4) + \lambda(-1,1,0)$.

Untersuchen Sie, ob die Gerade g parallel zur Ebene E ist.

Aufgabe P 15.
Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren

- v_1, v_2, v_3
- $v_1, \ldots, v_5$
- v_1, v_5

jeweils linear unabhängig? Welche Dimension hat jeweils die Lineare Hülle L? Bilden sie jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Bilden sie jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Bilden Sie aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ mindestens zwei verschiedene Basen von $\mathbb{R}^3$ sowie mindestens zwei davon verschiedene Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 16.
Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $B = \{X^2, X-1, X+1\}$ und $C = \{1, X, X^2\}$.

Geben Sie für die Polynome $p(X) := X^2 + 2X$, $q(X) := X^2 + 2X + 1$ sowie $p+q$ die Koordinatentupel ${}_Bp$, ${}_Bq$, ${}_B(p+q)$ bezüglich B und ${}_Cp$ bezüglich C an.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

Aufgabe P 17.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit "Skalarprodukt" (*) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ und $b_1, b_2, b_3 \in V$ so, dass $\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle = 1$, $\langle b_1 \,|\, b_2 \rangle = 0$, $\langle b_1 \,|\, b_3 \rangle = \sqrt{2}$, $\langle b_2 \,|\, b_2 \rangle = 2$, $\langle b_2 \,|\, b_3 \rangle = -1$ und $\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle = 1$.

Berechnen Sie $\langle b_1 + b_2 + b_3 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|b_1 + b_2 + b_3|$.

(*) Vorsicht: Das "Skalarprodukt" erfüllt nicht alle Eigenschaften aus 2.6.1.

Aufgabe P 18.
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ und $u, w \in V$ linear unabhängige Vektoren.

Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathrm{L}(u, w)$, der *orthogonal* zu u ist, d.h. $\langle u \,|\, v \rangle = 0$, und der *normiert* ist, d.h. $\langle v \,|\, v \rangle = 1$ erfüllt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10.
Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sowie die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie für die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

die Koordinatentupel ${}_Bu$, ${}_Bv$, ${}_Bw$ bezüglich B an.

Aufgabe H 11.
Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Die Basis $O = \{b_1, b_2, b_3\}$ besteht aus den folgenden Vektoren:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sei weiter $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle b_1 \mid b_2 \rangle = \langle b_1 \mid b_3 \rangle = \langle b_2 \mid b_3 \rangle = 0$.

(b) Berechnen Sie $|b_1|$, $|b_2|$ und $|b_3|$.

(c) Zeigen Sie:

$$v = \frac{\langle v \mid b_1 \rangle}{\langle b_1 \mid b_1 \rangle} b_1 + \frac{\langle v \mid b_2 \rangle}{\langle b_2 \mid b_2 \rangle} b_2 + \frac{\langle v \mid b_3 \rangle}{\langle b_3 \mid b_3 \rangle} b_3$$

(d) Geben Sie das Koordinatentupel ${}_Ov$ bezüglich O an.

Aufgabe H 12. *Beispiel 2.6.3*
Zeigen Sie, auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ definiert

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

ein Skalarprodukt.

Aufgabe P 19. *Vektorprodukt, Winkel*

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $a \times b$ **(b)** $(a + b) \times c$ **(c)** $\langle a + b \,|\, a \times b \rangle$ **(d)** $|b \times c|$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Aufgabe P 20. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte und Summen

$$AB, \quad BA, \quad CE, \quad EC, \quad E^{\mathsf{T}}C, \quad A + B^{\mathsf{T}}, \quad B + D, \quad C + D.$$

existieren und berechnen Sie diese.

Aufgabe P 21. *Lineares Gleichungssystem*

André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?

Aufgabe P 22. *Abstand zwischen windschiefen Geraden*

Zeigen Sie, dass die beiden Parameterdarstellungen

$$g_1 \colon x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad g_2 \colon x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

windschiefe Geraden beschreiben (d. h. g_1 und g_2 sind nicht parallel und schneiden sich nicht), berechnen Sie deren Abstand und bestimmen Sie die Punkte $P \in g_1$ und $Q \in g_2$ mit dem kürzesten Abstand.

Hinweis: Die Verbindungsgerade h zwischen den Punkten P und Q steht senkrecht auf g_1 und auf g_2, und diese beiden Geraden liegen in Ebenen, die jeweils senkrecht zu h sind.
Wie erhalten Sie am bequemsten einen Richtungsvektor für h ?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Vektorprodukt*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke mit Vektoren a, b, c:

(a) $(2a + b) \times (a + 2b)$

(b) $(2a + b) \times (c - a) + (b + c) \times (a + b)$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass das Vektorprodukt in jedem der beiden Argumente additiv ist, d. h. es gilt $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ und $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$.

Aufgabe H 14. *Winkel, Flächenberechnung*

Gegeben sind zwei Vektoren a und b mit $|a| = |b| = 5$ und $\sphericalangle(a, b) = 45°$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Vektoren $a - 2b$ und $3a + 2b$ aufgespannt wird.

Aufgabe H 15. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $4A + 7B$

(b) $B - A$

(c) $AB^\intercal$

(d) $(A + B)C$

(e) $A + 2AB^\intercal + C^\intercal$

I. Rybak
S. Poppitz

6. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 22.
Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \\ 7x_2 + 0x_1 &= 2 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ x_1 + 0x_2 &= 4 \\ 3x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen?

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.

Lösen Sie die Gleichungssysteme.

Führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe P 23.
Heinrich Lohse braucht für sein Büro einen neuen Computer. Um einen Mengenrabatt zu bekommen bestellt er Radiergummis, Schreibmaschinenpapier und Computer im Wert von insgesamt 300.000,– DM und bekommt dann Radiergummis für 0,10 DM pro Stück, Schreibmaschinenpapier für 2,80 DM pro Packung und Computer für 6000,– DM pro Gerät (zur Erinnerung: 1 € $\cong$ 1,95883 DM). Insgesamt bestellt Herr Lohse 300.000 Artikel beim Großhandel. Wieviele Radiergummis, wieviele Packungen Schreibmaschinenpapier und wieviele Computer hat er jeweils bestellt?

Aufgabe P 24. *Grassmann- und Jacobi-Identität*
Beweisen Sie für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

(a) die Grassmann-Identität: $$(a \times b) \times c = \langle a \,|\, c \rangle \, b - \langle b \,|\, c \rangle \, a\,,$$

(b) die Jacobi-Identität: $$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0\,.$$

Aufgabe P 25. *Interpolation*
Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Menge $\mathsf{Trig}_n \subsetneqq \mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ rekursiv definiert via

$$\begin{aligned} \mathsf{Trig}_0 &:= \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1 \} \\ \mathsf{Trig}_n &:= \mathsf{Trig}_{n-1} \cup \{\cos(nx), \sin(nx)\} \quad \text{für } n > 0. \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie, falls möglich, die folgenden Interpolationsprobleme: Gesucht ist jeweils eine Funktion $g_i \in \mathrm{L}(\mathsf{Trig}_1)$ so, dass
- $g_1(0) = 0$ und $g_1(2\pi) = \frac{1}{2}$
- $g_2(0) = 0$ und $g_2(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $g_3(0) = 0$, $g_3(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $g_3(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
- $g_4(0) = 0$, $g_4(\frac{\pi}{2}) = 1$, $g_4(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ und $g_4(\pi) = 0$

(b) Zeigen Sie, Trig_1 ist eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$.

(c) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix für das allgemeine Interpolationsproblem auf: Es sind $m \in \mathbb{N}$ und $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ für $0 \leqq i \leqq m$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $g \in \mathrm{L}(\mathsf{Trig}_n)$ so gesucht, dass gilt $g(x_i) = y_i$. Diskutieren Sie anhand der Koeffizientenmatrix, wann das Problem lösbar ist und wann es genau eine solche Funktion gibt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Lineare Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & - & 2 & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 4z & + & 5 & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 3z & + & 4 & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

Aufgabe H 17.

In $\mathbb{R}^4$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad b_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen sie den Schnitt von Untervektorräumen $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) \cap \mathrm{L}(b_4, b_5, b_6)$.

Aufgabe H 18.

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die folgendes erfüllt:

$$A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \quad A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich eine solche Matrix A_α finden? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine solche Matrix A_α? Geben Sie, wenn möglich, die Matrix A_α explizit an.

Hinweis: Ein Gleichungssystem mit allen Unbekannten wird sehr unübersichtlich. Versuchen Sie stattdessen *mehrere* von einander unabhängige Gleichungssysteme aufzustellen. Vergleichen Sie deren Koeffizienten, bevor sie beginnen die Systeme zu lösen.

I. Rybak
S. Poppitz

7. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 26.
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Aufgabe P 27.
Es sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \left(y+z, -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^\intercal$ gegeben. Weiterhin betrachten wir die Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$.

- **(a)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Ef_E$ von f bezüglich der Standardbasis E.
- **(b)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Bf_E$ von f bezüglich der Basis B im Zielbereich und der Standardbasis E im Definitionsbereich.
- **(c)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_Bf_B$ von f bezüglich der Basis B.

Aufgabe P 28.
Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal &\mapsto (x+2y-4z, -y+2z, -x+y-2z)^\intercal \\ g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal &\mapsto (x^2, xyz, z+3x-29y)^\intercal \\ g_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \quad (x,y)^\intercal &\mapsto (5x+2y, 4y, 3y+4x)^\intercal \end{aligned}$$

- **(a)** Welche dieser Abbildungen sind linear?
  Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.
- **(b)** Bestimmen Sie jeweils den Kern der gegebenen Abbildungen, falls sie linear sind.
- **(c)** Welche Dimension haben jeweils Kern und Bild der linearen Abbildungen? Geben Sie das Bild explizit an.
- **(d)** Begründen Sie, warum die Abbildung $g_1 \circ g_3$ linear ist. Geben Sie auch dafür die Matrixdarstellung ${}_E(g_1 \circ g_3)_E$ bezüglich der Standardbasis E an.
  Zusatz: Bestimmen Sie auch hiervon Kern und Bild.

Aufgabe P 29.
Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, falls möglich Rechts- sowie Linksinverse der gegebenen Matrizen.

Hinweis: Stellen Sie Gleichungssysteme für die Spalten respektive Zeilen der gesuchten Matrizen auf und lösen Sie diese simultan.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & (1-\alpha)^2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Es sei $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto A_\alpha x$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den Rang der Matrix A_α.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse A_α^{-1}.

(c) Wie hängen $\dim \operatorname{Kern}(\varphi_\alpha)$ und $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_\alpha)$ von α ab? Geben Sie $\operatorname{Kern}(\varphi_\alpha)$ und $\operatorname{Bild}(\varphi_\alpha)$ explizit an.

Aufgabe H 20.

Wir betrachten die Liste $T\colon t_1, t_2, t_3$ der Funktionen

$$\begin{aligned} t_1\colon &\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto 1, \\ t_2\colon &\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \cos(x), \\ t_3\colon &\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \sin(x). \end{aligned}$$

Diese gehören zum Vektorraum $\mathcal{C}^1([0,2\pi])$ (vgl. Aufgabe P 25).

Weiter sei $D\colon \operatorname{L}(t_1,t_2,t_3) \to \operatorname{L}(t_1,t_2,t_3) : f \mapsto f'$ die Abbildung, die einer Funktion ihre Ableitung zuordnet. Außerdem ist $B\colon t_1, t_2, t_3 + t_2$ gegeben.

(a) Begründen Sie, warum T eine Basis von $\operatorname{L}(t_1,t_2,t_3)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass B ebenso eine Basis von $\operatorname{L}(t_1,t_2,t_3)$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_TD_T$, ${}_BD_T$ und ${}_BD_B$.

(d) Bestimmen Sie den Kern $\operatorname{Kern}(D)$.

Aufgabe H 21.

Gegeben ist ein 3-dim. Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, einer Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$, sowie einer Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$. Die Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist gegeben als eine lineare Abbildung mit $\varphi(b_1) = b_1 + b_3$, $\varphi(b_2) = b_2 + b_3$ und $\varphi(b_3 - b_2) = -b_1 - b_3$.

(a) Begründen Sie, warum φ damit bereits eindeutig festgelegt ist.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_B\varphi_B$ an.

(c) Berechnen Sie $\dim \operatorname{Kern}(\varphi)$, $\dim \operatorname{Bild}(\varphi)$ und geben Sie Kern und Bild explizit an.

(d) Zeigen Sie: Ist $v \in V$ gegeben so gilt für die Koordinaten bezüglich F

$${}_Fv = \big(\langle v \mid f_1 \rangle , \langle v \mid f_2 \rangle , \langle v \mid f_3 \rangle \big)^{\mathsf{T}}.$$

Hinweis: Setzen Sie $v \in V$ als Linearkombination bezüglich F und vergleichen Sie die Koeffizienten mit dem Koordinatentupel.

(e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_F\varphi_B$.

I. Rybak
S. Poppitz

8. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 30. *Reguläre Matrizen*
Bestimmen Sie jeweils die Determinante und den Rang der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind regulär? Berechnen Sie – sofern möglich – die Inversen. Bestimmen Sie weiterhin die Determinante der Inversen sowie die Determinanten von AB und BA.

Aufgabe P 31. *Basiswechsel*
Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich B in Koordinaten bezüglich E umrechnet.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\mathrm{id}_E$, die Koordinaten bezüglich E in Koordinaten bezüglich B umrechnet.

Aufgabe P 32.
Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$.

Aufgabe P 33.
Der Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wird versehen mit den Basen

$$C\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{C}^1([0,2\pi])$ sowie die Basen $T\colon t_1, t_2, t_3$ und $B\colon t_1, t_2, t_3 + t_2$ sind definiert wie in Aufgabe H 20; dabei war

$$t_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1\,, \quad t_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)\,, \quad t_3\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)\,.$$

Weiterhin sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathrm{L}\,(t_1, t_2, t_3) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+d)t_2 + (c+d)t_3\,.$$

(a) Bestimmen Sie ${}_T\varphi_C$, ${}_B\varphi_C$ und ${}_B\varphi_D$.

(b) Bestimmen Sie Kern und Bild von φ. Geben Sie jeweils eine Basis an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22.

Gegeben sind die folgenden Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 92 & -113 & 17 \\ -48 & 69 & 39 \\ 44 & -44 & 56 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie, falls möglich, die Determinaten, Ränge und Inversen der gegebenen Matrizen.

(b) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen BC, CB, DE und ED.

Aufgabe H 23.

Gegeben ist die folgende Abbildung:

$$s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass s eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Kern}\,(s)$. Geben Sie eine Basis davon an.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E s_B$ bezüglich der Standardbasis E und der Basis

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 24.

In $\mathbb{R}^3$ ist die Basis

$$B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Abbildung φ soll diejenige lineare Abbildung sein, für die gilt $\varphi(b_1) = b_1 - 2b_3$, $\varphi(b_2) = -b_2$ und $\varphi(b_3) = b_1 + b_2 - 2b_3$. Mit E ist wie üblich die Standarbasis bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_E\mathrm{id}_B$.

(c) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$.

(d) Berechnen Sie $\det({}_B\varphi_B)$, $\det({}_E\mathrm{id}_B)$, $\det({}_B\mathrm{id}_E)$, $\det({}_E\varphi_E)$.

(e) Beschreiben Sie $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$, indem Sie eine Basis davon bestimmen; geben Sie diese in Koordinanten bezüglich E an.

I. Rybak
S. Poppitz

9. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 34.
Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P 35. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*
In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1,0,-1)^\intercal$, $v_2 = (1,1,-1)^\intercal$ und $v_3 = (-1,2,-2)^\intercal$ gegeben.

- **(a)** Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.
- **(b)** Lässt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auch eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ konstruieren, wenn $\widetilde{v_3} = (-1,2,1)^\intercal$ statt v_3 verwendet werden soll?

Aufgabe P 36.
Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Was ist der lineare Anteil, was ist der Translationsanteil von α?

Untersuchen Sie, ob α eine Affinität ist und ob es sich dabei um eine Bewegung handelt.

Bestimmen Sie, falls α eine eigentliche Bewegung ist, eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$. Welchen Drehwinkel hat δ in diesem Fall?
Finden Sie alle Fixpunkte der Abbildung δ (also alle Vektoren v mit $\delta(v) = v$).

Aufgabe P 37.
Es sind die affinen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + t$ und $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Bv + r$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter ist

$$g := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade.

- **(a)** Untersuchen Sie, welche der Abbildungen α, β Affinitäten sind.
- **(b)** Bestimmen Sie $\alpha(g)$ und $\beta(g)$. Sind das Geraden?
- **(c)** Berechnen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*
Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = (1,1,1,1)^\intercal \qquad v_2 = (1,0,3,0)^\intercal \qquad v_3 = (2,2,4,0)^\intercal \qquad v_4 = (8,-2,6,-4)^\intercal$$

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3, f_4$ von $\mathbb{R}^4$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(b) Begründen Sie, warum ${}_E\mathrm{id}_F$ eine orthogonale Matrix ist (mit E ist wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ bezeichnet).

Aufgabe H 26. *Komposition und Inverse von Bewegungen*
Gegeben sind Bewegungen $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Ax + s$ und $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Bx + t$. Zeigen Sie, dass die Komposition $\beta \circ \alpha$ ebenfalls eine Bewegung ist.

Zusatz: Ist jede Bewegung invertierbar? Sind die Inversen von Bewegungen wieder Bewegungen?

Aufgabe H 27. *Strohstern*
In $\mathbb{R}^2$ ist die affine Abbildung

$$\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} x$$

und die Gerade

$$g_0 = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Des Weiteren ist $\delta^0 := \mathrm{id}$ und $\delta^n := \delta \circ \delta^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Hintereinanderausführung der Abbildung δ.

(a) Zeigen Sie, dass δ^n eine Bewegung ist.
Hinweis: Sie können Aufgabe H 26 verwenden.

(b) Finden Sie alle *Fixpunkte* von δ, das sind Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die gilt $\delta(x) = x$.

(c) Bestimmen Sie die Mengen $g_n := \delta^n(g_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Begründen Sie, dass es sich dabei um Geraden handelt.
Hinweis: Sie werden feststellen, dass $g_6 = g_0$ und sogar $\delta^6(x) = x$ für $x \in g_0$.

(d) Begründen Sie damit, dass $\delta^7 = \delta$.
Hinweis: Die Abbildung δ ist insbesondere eine lineare Abbildung

(e) Entscheiden Sie, welche der Geraden g_n parallel zueinander sind, und welche sich schneiden. Geben Sie alle Schnittpunkte an.
Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Abbildungen δ^n sowie sich ergebende Symmetrien aus. Ein Blick auf die nächste Teilaufgabe kann dabei helfen.

(f) Skizzieren Sie die Geraden g_n für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

10. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 38.

Gegeben ist die Matrix A und die Vektoren $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad v_1 := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind Eigenvektoren? Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Aufgabe P 39.

Es ist $O := (0,0,0)$ und $\mathbb{E} = (O; e_1, e_2, e_3)$ das in $\mathbb{R}^3$ gegebene Standardkoordinatensystem. Durch den Punkt $P := (-1, \frac{1}{2}, 4)$ und die Vektoren $f_1 := (1,2,0)^\intercal$, $f_2 := (-2,-3,1)^\intercal$, $f_3 := (3,-1,1)^\intercal$ ist ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F} := (P; f_1, f_2, f_3)$ bestimmt. Außerdem sind die Punkte $E_1 := (1,0,0)$, $E_2 := (0,1,0)$ und $E_3 := (0,0,1)$ gegeben.

(a) Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

(b) Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}O$, ${}_{\mathbb{F}}E_1$, ${}_{\mathbb{F}}E_2$, ${}_{\mathbb{F}}E_3$ mit Hilfe der Definition 4.7.4 aus der Vorlesung.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.
Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für ${}_{\mathbb{F}}O$, ${}_{\mathbb{F}}E_1$, ${}_{\mathbb{F}}E_2$, ${}_{\mathbb{F}}E_3$.

Aufgabe P 40.

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie für die Matrizen A, B, C jeweils alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie für die Matrizen A, B, C jeweils alle komplexen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(c) Entscheiden Sie, ob die Matrizen A, B, C reell beziehungsweise komplex diagonalisierbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls Matrizen, mit denen man die jeweilige Matrix in eine Diagonalmatrix konjugieren kann. Geben Sie letztere auch explizit an.

Aufgabe P 41.

In $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P_0 = (5,-2,1), P_1 = (6,1,4), P_2 = (3,-1,3), P_3 = (5,-1,2)$ gegeben.

Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so, dass ${}_{\mathbb{F}}P_0 = \vec{0}, {}_{\mathbb{F}}P_1 = e_1, {}_{\mathbb{F}}P_2 = e_2, {}_{\mathbb{F}}P_3 = e_3$. Dabei ist $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem.

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P_4$ des Punktes ${}_{\mathbb{F}}P_4 = (2,1,-3)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Eigenwerte und Eigenvektoren*
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die reellen sowie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren. Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine Transformationsmatrix T an, die auf Diagonalgestalt transformiert. Verwenden Sie diese Transformationsmatrix und die zugehörige Diagonalmatrix, um explizit B^{100} zu berechnen.

Aufgabe H 29.
In $\mathbb{R}^3$ sind die affinen Abbildungen σ und δ gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto A \cdot {}_{\mathbb{E}}v + s$ und ${}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto B \cdot {}_{\mathbb{E}}v + t$, wobei mit $\mathbb{E}$ wie üblich das Standardkoordinatensystem bezeichnet wird und

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad s := \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -6 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $P := (-1, 0, -2)$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ für A und $\chi_B(\lambda)$ für B.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix A. Nummerieren Sie dabei die Eigenwerte so, dass der Eigenwert λ_1 negativ ist.

(c) Zeigen Sie: P ist ein Fixpunkt von σ und δ, also $\sigma(P) = P$ und $\delta(P) = P$.

(d) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ folgendermaßen:
Es sei f_1 ein Eigenvektor von A zum negativen Eigenwert λ_1. Sie erhalten f_2, indem Sie einen weiteren geeigneten Eigenvektor von A wählen. Schließlich sei $f_3 := Bf_2$.
Zeigen Sie: f_3 ist ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert von f_2.

(e) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}$ der Abbildung σ bezüglich $\mathbb{F}$.
Hinweis: Sie können den linearen Anteil und den Translationsanteil von ${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}$ direkt bestimmen, wenn Sie in Betracht ziehen, wie Punkte, deren $\mathbb{F}$-Koordinaten Standardbasisvektoren sind, sowie der Koordinatenursprung von $\mathbb{F}$ abgebildet werden. Dabei helfen die vorigen Teilaufgaben.

(f) Zeigen Sie: f_1 ist ein Eigenvektor von B.

(g) Zeigen Sie, dass $Bf_3 = -f_2$.

(h) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}$.
Hinweis: Auch hier können linearer Anteil und Translationsanteil direkt bestimmt werden.

(i) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}(\sigma \circ \delta)_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}(\delta \circ \sigma)_{\mathbb{F}}$.

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

11. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 42.
Welche der folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix}$$

sind symmetrisch, welche sind hermitesch?

Aufgabe P 43.
Gegeben ist die Menge

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_3 = 0 \right\} .$$

(a) Begründen Sie, dass es sich bei Q um eine Quadrik handelt, indem Sie den quadratischen, den linearen und den konstanten Teil der Quadrik angeben.

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik und die zugehörige erweiterte Matrix an.

(c) Entscheiden Sie, ob der quadratische Teil der Quadrik positiv definit, negativ definit, indefinit oder keines davon ist.

(d) Untersuchen Sie, welchen Typ die Quadrik hat, d.h. ob sie eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(e) Was erhält man, wenn man Q mit

- einer Ebene parallel zur x_1–x_2-Ebene,
- einer Ebene parallel zur x_2–x_3-Ebene,
- einer Ebene parallel zur x_1–x_3-Ebene,
- einer Ebene parallel zu $E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$ sowie
- einer Ebene parallel zu $E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 = 0 \right\}$

schneidet? Skizzieren Sie die Schnittfiguren für Ebenen mit verschiedenen Abständen vom Ursprung (insbesondere auch für Abstand 0).

(f) Verstehen Sie die Geometrie der Quadrik Q anhand einer dreidimensionalen Skizze, die Sie mit Hilfe der ebenen Schnittfiguren anfertigen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 30.

Es seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ symmetrische Matrizen und $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal.

(a) Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} A_k$ ist ebenfalls eine symmetrische Matrix.

(b) Untersuchen Sie, ob das Produkt $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ eine symmetrische Matrix ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel.

(c) Zeigen Sie, die zu A_1 konjugierte Matrix $T^{-1}A_1T$ ist symmetrisch.

Aufgabe H 31.

Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und B.

(b) Geben Sie Diagonalmatrizen D_A und D_B sowie Transformationsmatrizen T_A und T_B so an, dass $D_A = T_A^{-1}\,A\,T_A$ und $D_B = T_B^{-1}\,B\,T_B$.

(c) Untersuchen Sie, ob die Eigenräume von A zueinander paarweise orthogonal sind, sowie ob die Eigenräume von B zueinander paarweise orthogonal sind.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens ausgehend von Eigenvektoren von A eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 sowie ausgehend von Eigenvektoren von B eine Orthonormalbasis g_1, g_2, g_3.

(e) Sind die Vektoren f_1, f_2, f_3 Eigenvektoren von A, sind die Vektoren g_1, g_2, g_3 Eigenvektoren von B?

(f) Lässt sich A mit der Transformationsmatrix $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$ und B mit der Transformationsmatrix $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix}$ diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H 32.

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - x_2x_3 + 1 = 0 \right\}$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

(b) Untersuchen Sie, welchen Typ die Quadrik hat.

(c) Bestimmen Sie, welche geometrischen Figuren entstehen, wenn man Q mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen schneidet. Skizzieren Sie die Schnittfiguren für verschiedene Abstände der Schnittebene von der Koordinatenebene.

Hinweis: Durch Auflösen nach geeigneten Variablen oder quadratisches Ergänzen erhalten Sie aus der Schule bekannte Beschreibungen für Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen, etc.

(d) Fertigen Sie mit Hilfe der ebenen Schnitte eine dreidimensionale Skizze an.

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

12. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 44.
Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 20\sqrt{2}x_1 - 16\sqrt{2}x_2 + 31 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

(b) Bestimmen Sie die *euklidische* Normalform der Quadrik.

(c) Geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an.

(d) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik, indem Sie die *affine* Normalform der Quadrik auswerten.

(e) Skizzieren Sie die Quadrik in dem Koordinatensystem $\mathbb{G}$, bezüglich dessen sie Normalform hat, und bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems. Zeichnen Sie in letztere Skizze auch das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ ein.

Aufgabe P 45.
In $\mathbb{R}^4$ ist die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 - 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Geben Sie die Quadrik in Matrixform an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der erweiterten Matrix den Typ der Quadrik.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q. Geben Sie die dazu benötigten Koordinatentransformationen explizit an.

(d) Sei $\mathbb{F}$ das Koordinatensystem, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt. Welche Gestalt haben die Schnitte von Q mit den von jeweils drei Koordinatenachsen von $\mathbb{F}$ aufgespannten Unterräumen?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33.
In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tfrac{3\alpha-1}{4}x_1^2 - \tfrac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{2}x_1x_2 + \tfrac{(\alpha-3)}{4}x_2^2 + \sqrt{3}(\alpha-1)x_1 - (\alpha-1)x_2 = 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Geben Sie die Quadrik Q_α in Matrixform an.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den Typ der Quadrik, d.h. ob sie kegelig, parabolisch oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation in Abhängigkeit von α die euklidische Normalform der Quadrik Q_α. Welche Gestalt hat Q_α?

(d) Skizzieren Sie Q_α für $\alpha \in \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ in den Koordinaten, bezüglich derer Q_α Normalform besitzt, und in den ursprünglichen Koordinaten.

Aufgabe H 34.
Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -23x_1^2 + 25x_2^2 - 2x_3^2 + 72x_1x_3 - 30x_1 + 50x_2 - 40x_3 + 75 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik.

(c) Geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an.

(d) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik.

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

13. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 46.
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz:

$$\big(5\big)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \big(5\cdot n\big)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \left(5\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \big(5^{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \big(5^{-n}\big)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \left(5^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\quad \big(5\cdot(-1)^{-n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgabe P 47.
Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

(a) $\big(n+\sin(2\,\pi\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\big(n\,\sin(\frac{\pi}{2}\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

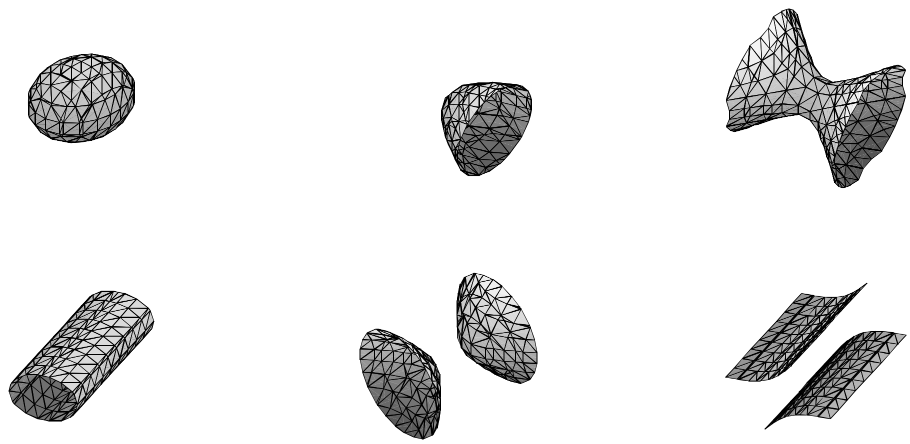
(c) $\big(\frac{1}{n}\,\sin(2\,\pi\,n+n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\big(\sin(2\,\pi\,n-\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\big(\sin(\pi\,n-\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen, sowie Limes superior und Limes inferior der einzelnen Folgen. Sind die einzelnen Folgen konvergent? Sind sie divergent beziehungsweise bestimmt divergent? Besitzen sie konvergente Teilfolgen?

Aufgabe P 48.
Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.



Aufgabe P 49.
Gegeben sind die komplexen Folgen

$$\big(i^{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}\quad \text{und}\quad \big(\tfrac{1}{n}\,i^{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Untersuchen Sie, ob die Folgen konvergieren. Untersuchen Sie weiter, ob sie jeweils konvergente Teilfolgen besitzen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 35.
Eine reelle Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für $q \in \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := a_n \cdot (1+q) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

(a) Geben Sie a_n in nicht-rekursiver Form an, d.h. bestimmen Sie a_n so, dass Sie zur Beschreibung nicht auf vorhergehende Folgenglieder zurückgreifen müssen.

(b) Untersuchen Sie die Folge jeweils für $q \in \{1, 0, -1, -2\}$ auf Monotonie und Beschränktheit, geben Sie dabei jeweils obere beziehungsweise untere Schranken an, falls solche existieren.

(c) Bestimmen Sie für $q \in \{1, 0, -1, -2\}$ jeweils alle Häufungspunkte der Folge und geben Sie Limes superior und Limes inferior an.

(d) Entscheiden Sie, ob für $q \in \{1, 0, -1, -2\}$ die Folge jeweils konvergiert, divergiert oder bestimmt divergiert. Geben Sie, wenn möglich, mindestens eine konvergente Teilfolge an.

(e) Bestimmen Sie nun, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge konvergiert, für welche sie divergiert und für welche sie bestimmt divergiert.

Aufgabe H 36. *Monotonie und Beschränkheit*
Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit:

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

(b) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

(c) $a_n = (-1)^n(2n+1)$

(d) $a_n = 8\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

Aufgabe H 37. *Konvergenz*
Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}$

(b) $a_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

(c) $a_n = \dfrac{1}{2n}$

(d) $a_n = \cos(\pi(n+1))$

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

14. Gruppenübung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Winter 2008/09

Aufgabe P 50. *Konvergenz und (bestimmte) Divergenz*
Gegeben sind die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\,n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2\,n^3+2\,n^2+n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} = \left(\frac{2\,n^4}{-2\,n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}}$$

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{-6\,n^2+42\,n-72}{-3\,(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(a) Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(b) Führen Sie diese Untersuchung ebenfalls durch für die Folgen

$$(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (f_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n-c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n-d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (a_n-e_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{b_n}{g_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{g_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Begründen Sie mit Hilfe dieser Erkenntnisse, warum es nicht möglich ist, Ausdrücken wie „ $0\cdot\infty$ “, „ $\infty-\infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ oder „ $\frac{0}{0}$ “ einen vernünftigen Wert zuzuordnen.

Aufgabe P 51. *Cauchy-Folgen*
Zeigen Sie, dass die Folgen

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Cauchy-Folgen sind. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε so an, dass das Cauchy-Kriterium erfüllt ist.

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn sie sich den Verlauf der Folgen, wie zum Beispiel Monotonie und Beschränktheit, näher betrachten.

Aufgabe P 52.
Finden Sie jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass (a_n) nicht konvergiert und (b_n) gegen Null konvergiert, während die Produktfolge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen ein beliebiges $c\in\mathbb{R}$ konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber trotzdem nicht konvergiert.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 38. *Sätze über Konvergenz*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte

(a) $a_n = \dfrac{2n^5}{n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1}$

(b) $b_n = \left(\dfrac{5n}{2n+1}\right)^4$

(c) $c_n = \sqrt{n(n+3)} - n$

(d) $d_n = \dfrac{n^3 + (-1)^n n^2}{2n^3 + 1}$

(e) $e_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+3}$

(f) $f_n = \dfrac{(\sin n)^2}{n}$

Aufgabe H 39. *Babylonisches Wurzelziehen*

Für $\alpha \geqq 0$ wird die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = \alpha + 1, \qquad\qquad a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2}\,.$$

(a) Verifizieren Sie mit vollständiger Induktion, dass alle Folgenglieder positiv sind.

(b) Zeigen Sie wiederum mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqq 0$ die Ungleichung $a_n \geqq \sqrt{\alpha}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fällt monoton.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum der Grenzwert existieren muss. Nutzen Sie dann Sätze über Grenzwerte von Folgen aus, um ausgehend von der Rekursionsvorschrift auf den Grenzwert zu schließen.

Aufgabe H 40.

Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierte Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte

(a) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(b) $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = \dfrac{3}{4 - b_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 3c_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}$