M. Boßle, P. Engel
B. Krinn, Dr. I. Rybak

**1. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A.-M. Sändig

Wintersemester 2009/10

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 1.** *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

**(a)** $x_1 = 2097,8 : 17$

**(b)** $x_2 = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{15}{\frac{5}{2}}$

**(c)** $x_3 = \sqrt{48^2 + 14^2}$

**(d)** $x_4 = \dbinom{10}{7}$

**Aufgabe P 2.** *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgenden Summenformeln mit Hilfe der vollständigen Induktion:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

**Aufgabe P 3.** *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich?

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l$

**(e)** $\displaystyle\sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l^2+l}\, \frac{a_{2n-(l-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1}\, \frac{a_k}{2}$

**Aufgabe P 4.**

Drei Logiker sitzen auf Stühlen hintereinander. Der hinterste sieht die beiden vorderen, der mittlere sieht nur den vordersten, der vorderste sieht niemanden. Alle drei wissen, dass sie jeweils einen Hut aus der Garderobe eines Theaters aufgesetzt bekommen haben, und sie wissen, dass diese Garderobe fünf Hüte zur Verfügung hat: zwei rote und drei schwarze. Nun wird der hinterste Logiker gefragt, ob er seine Hutfarbe kenne. Er sagt "Nein". Dann wird der mittlere das gleiche gefragt. Auch er sagt "Nein". Schließlich wird der vorderste gefragt. Was antwortet er?

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 1.**

Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

**(a)** Für jede natürliche Zahl $n$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1$ eine Quadratzahl.

*Hinweis:* Finden Sie zunächst durch Einsetzen einiger Zahlen für $n$ eine Formel der Form $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1 = ?$ und beweisen Sie dann diese.

**(b)** Für jede natürliche Zahl $m$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{m} q^k = \dfrac{1-q^{m+1}}{1-q}$ für jede Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**Aufgabe H 2.** *Zweimal Induktion*

Sei $M(d,k)$ die Menge der $k$-Tupel mit maximaler Komponentensumme $d$ gegeben durch

$$M(d,k) = \left\{ (d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{N}_0^k \;\middle|\; \sum_{l=1}^{k} d_l \leqq d \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente von $M(d,k)$ – geschrieben als $|M(d,k)|$ – berechnet werden kann durch

$$|M(d,k)| = \binom{d+k}{d}.$$

Machen Sie dazu die folgenden Hilfsüberlegungen:

**(a)** Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $m$ die Hilfsformel

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

**(b)** Zeigen Sie, dass gilt: $|M(d,1)| = \dbinom{d+1}{d}$.

**(c)** Zeigen Sie, dass gilt: $|M(d,k+1)| = \sum\limits_{l=0}^{d} |M(d-l,k)|$.

**(d)** Zeigen Sie die gewünschte Aussage, durch eine Induktion über $k$ und benutzen Sie dabei (a), (b) und (c).

**Aufgabe H 3.**

**(a)** Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$M_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| = 1 \right\},$$
$$M_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| < 1 \right\}.$$

**(b)** Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1 \right\},$$
$$M_4 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| > 1 \right\}.$$

und die Schnittmenge von $M_3$ und $M_4$.

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 5.

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

**(a)** $x + 3 > x^2(x + 3)$

**(b)** $|x^2 + 3x - 4| + 1 < |x + 4| + |x - 1|$

**(c)** $\dfrac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1$

### Aufgabe P 6. *Eigenschaften von Abbildungen*

Untersuchen Sie, ob folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

**(a)** $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x$

**(b)** $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \colon x \mapsto x^2$

**(c)** $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \min\{x, x^2\}$

**(d)** $f_4 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**(e)** $f_5 \colon \mathbb{R} \to (0,1] \colon \ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

### Aufgabe P 7.

Skizzieren Sie die Mengen

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x > -1\} \ , \\
M_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 = 1\} \ , \\
M_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x-2)^2 + y^2 = 4\} \ , \\
M_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4\} \ , \\
M_5 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\} \ , \\
M_6 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y - 2(x+1)^2 \geqq 2\} \ .
\end{aligned}
$$

### Aufgabe P 8.

Zwei Schatzsucher finden folgenden Text, mit dem ein Pirat die Lage seines vergrabenen Schatzes auf einer Insel beschrieben hat: „Gehe von der alten Eiche am Westufer 65 Schritte in Richtung Brunnen, dann 25 Schritte nach Norden. Von hier gehe exakt die Hälfte der Strecke auf den Leuchtturm zu, dann 30 Schritte nach Westen.“
„Na toll!“, meint der erste Schatzsucher. „Woher sollen wir wissen, wie lang die Schritte des Piraten waren?“ „Ich habe die Insel erkundet!“, entgegnet der zweite Schatzsucher. „Die Eiche, der Brunnen und der Leuchtturm stehen noch. Von der Eiche zum Brunnen und zum Leuchtturm habe ich jeweils 390 Schritte gebraucht. Der Leuchtturm steht 300 Schritte nördlich des Brunnens. Ich weiß wo der Schatz liegt!“ Wo müssen die beiden Schatzsucher graben?

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 4.** *Ungleichungen, vollständige Induktion*

**(a)** Mit Hilfe des Binomischen Satzes zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$, $x \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geqq 1 + \frac{n^2}{4}x^2.$$

**(b)** Zeigen Sie: $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch $9$ teilbar.

**Aufgabe H 5.** *Mengen*

Gegeben sind die Mengen $M_1$ bis $M_5$ und die Zahlen $x_1$ bis $x_6$:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}\colon n! = k\right\} \\
M_2 &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 4x \in \mathbb{Z}\right\} \\
M_3 &= \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists b \in \mathbb{R}\colon a^2 = -b^2\right\} \\
M_4 &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall y \in \mathbb{N}_0\colon x < y\right\} \\
M_5 &= \left\{z \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0\colon |z-n| \leqq \frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 720 \qquad x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x_4 = 3000 \qquad x_5 = -25,25 \qquad x_6 = \sqrt{10}$$

Erstellen Sie eine Tabelle und tragen Sie in die $(k,l)$-te Zelle "wahr" ein, falls die Aussage $x_k \in M_l$ wahr ist.

**Aufgabe H 6.** *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

**(a)** Prüfen Sie folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 2x \\
&g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n! \\
&h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\colon n \mapsto \frac{5n^2 - 13n + 5}{2n-5}
\end{aligned}$$

**(b)** Es seien die Mengen $M_1 := \{0,1,2,3\}$ und $M_2 := \{0,1,2,3,4\}$ gegeben. Existiert eine injektive, eine surjektive bzw. eine bijektive Abbildung von $M_1$ nach $M_2$?

**(c)** Existiert eine injektive, eine surjektive bzw. eine bijektive Abbildung vom Intervall $I_1 := [0,3] \subsetneqq \mathbb{R}$ ins Intervall $I_2 := [0,4] \subsetneqq \mathbb{R}$?

M. Boßle, P. Engel
B. Krinn, Dr. I. Rybak

**3. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A.-M. Sändig

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 9.** *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ an.

$$z_1 = (1+i)^2 \qquad z_2 = \frac{2+5i}{3+i} \qquad z_3 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{3+7i}\right)$$

**Aufgabe P 10.** *komplexe Wurzeln*

Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome:

**(a)** $p_1(z) = z^4 - 1$

**(b)** $p_2(z) = z^3 - 8i$

**Aufgabe P 11.** *Komplexe Gebiete*

Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) < 3\right\} \qquad M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-i| < 1\right\}$$

$$M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |(1+i)z| \leqq 4\sqrt{2}\right\} \quad M_4 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right) \leqq \tfrac{1}{2},\ z \neq 0\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1$ bis $M_4$ und $M_3 \cap M_4$.

**Aufgabe P 12.**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und begründen Sie Ihre Antwort:

**(a)** $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto c^2$

**(b)** $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto i \cdot c$

**(c)** $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto |c|\left(\cos(\arg(c)) + i\sin(\arg(c))\right)$

**(d)** $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon c \mapsto \left(\cos(\arg(c)) + i\sin(\arg(c))\right)$

**Zusatzaufgabe P 13.** $\mathbb{C}$ *kein geordneter Körper*

Zeigen Sie, dass es keine Anordnung $<$ auf $\mathbb{C}$ gibt, die sich mit der Addition und der Multiplikation des Körpers verträgt: d. h. so, dass für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

- $z_1 < z_2 \implies z_1 + z_3 < z_2 + z_3$
- $\big(0 < z_1 \wedge 0 < z_2\big) \implies 0 < z_1 \cdot z_2$
- $(z_1 < z_2) \vee (z_1 > z_2) \vee (z_1 = z_2)$

*Hinweis:* Überlegen Sie, was aus $0 < i$ (bzw. $i < 0$) folgen würde.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 7.** *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument, sowie das komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen:

**(a)** $z_1 = \dfrac{1+2i}{3-4i}$

**(b)** $z_2 = \dfrac{3}{2}i + \dfrac{2-i}{(1+i)^2}$

**(c)** $z_3 = \overline{\left(\dfrac{2}{1-i}\right)}$

**(d)** $z_4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^8$

**Aufgabe H 8.** *Wurzelziehen im Komplexen*

Bestimmen alle $n$-ten Wurzeln von $z$ für die folgenden Werte $n$ und $z$. Geben Sie das Ergebnis in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

**(a)** $n = 8$ und $z = 1$ **(b)** $n = 2$ und $z = i$ **(c)** $n = 2$ und $z = 1+\sqrt{3}i$

**Aufgabe H 9.**

Gegeben sind folgende Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-2| \geqq 2 \right\} , \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Re} z| \leqq 1 \right\} , \\ M_3 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1 \cup M_2) \\ M_4 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_2) \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Mengen $M_1$, $M_2$, $M_3$ und $M_4$.

**Aufgabe H 10.**

Berechnen Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome:

**(a)** $p_1(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

**(b)** $p_2(x) = x^3 - x^2 + 2$

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 14.

Es seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

**(a)** Die Menge $\mathrm{L}(v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

**(b)** Die Vektoren $v_1$ und $v_2$ sind linear unabhängig.

**(c)** Die Vektoren $v_1$ und $v_2$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

**(d)** Es gilt: $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$.

**(e)** Die Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

**(f)** Die Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ bilden ein Basis von $\mathbb{R}^2$.

**(g)** Es gilt: $\langle w_1 \mid w_2 \rangle = 1$.

**(h)** Es gilt: $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 4z = 0\right\}$.

### Aufgabe P 15.

Nach **2.4.3** der Vorlesung ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume von $\mathbb{C}$? Welche sind $\mathbb{C}$-Untervektorräume?

**(a)** $M_1 = \mathbb{R}$

**(b)** $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqq 0\right\}$

**(c)** $M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)\right\}$

**(d)** $M_4 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid (\mathrm{Im}(z))^2 = (\mathrm{Re}(z))^2\right\}$

**(e)** $M_5 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z - i|\right\}$

**(f)** $M_6 = \{0\}$

### Aufgabe P 16.

Gegeben seien die folgenden Funktion aus dem Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$ (siehe **2.6.3**):

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1$$
$$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x)$$

Begründen Sie die folgenden Aussagen:

**(a)** Die Funktionen $f_1$ und $f_2$ sind linear unabhängig.

**(b)** Es gilt $(\sin(x))^2 \in \mathrm{L}(f_1, f_2)$ und $(\cos(x))^2 \in \mathrm{L}(f_1, f_2)$.

**(c)** Es gilt $\sin(x)\cos(x) \notin \mathrm{L}(f_1, f_2)$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 11.**

In $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$P_1 = (0,0,1), \quad P_2 = (2,-1,1), \quad P_3 = (3,-2,2) \quad \text{sowie}$$

$$Q_1 = (1,1,1), \quad Q_2 = (2,0,2), \quad Q_3 = (1,0,\alpha)$$

gegeben. Geben Sie die Ebene, die $P_1$, $P_2$ und $P_3$ enthält, und die Ebene, die $Q_1$, $Q_2$ und $Q_3$ enthält, an. Berechnen Sie $\alpha$ so, dass die beiden Ebenen parallel sind.

**Aufgabe H 12.**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ (siehe 2.6.2.) und $b_1, b_2, b_3 \in V$ so, dass $\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle = 1$, $\langle b_1 \,|\, b_2 \rangle = 2$, $\langle b_1 \,|\, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2 \,|\, b_2 \rangle = 2$, $\langle b_2 \,|\, b_3 \rangle = 2$ und $\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle = 3$. Berechnen Sie $\langle b_1 + b_2 + b_3 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|b_1 + b_2 + b_3|^2$.

**Aufgabe H 13.** *Faktorisierung von Polynomen, Wurzelziehen bei komplexen Zahlen*

Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung

$$z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$$

*Hinweis:* $z = 2$ ist mehrfache Lösung.

**Aufgabe H 14.**

Wir betrachten den Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und die Mengen $B = \{1, X, X^2\}$ und $C = \{X^2, X-1, X+1\}$. Weisen Sie nach, dass es sich um Basen von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ handelt.

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 17.

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Vektoren $v$, $w$ in den Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$_{\mathcal{B}}v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{C}}w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Summe $v + w$ und geben sie das Ergebnis in der Basis $\mathcal{B}$ an. Überlegen Sie sich mindestens 3 mögliche Wege durch die Sie das Ergebnis berechnen können.

### Aufgabe P 18.

**(a)** Sei $b_1$, $b_2$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie, dass $\sphericalangle(b_1, b_2) = \frac{\pi}{2}$ gilt.

**(b)** Geben Sie ein Rechtssystem und ein Linkssystem für $\mathbb{R}^3$ an.

**(c)** Sei $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $f_2 \in \mathbb{R}^2$, so dass $f_1$, $f_2$ ein Rechtssystem bilden.

### Aufgabe P 19.

Gegeben sei das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ bestehend aus den Punkten

$$(0, 0), \qquad (3, 0) \quad \text{und} \qquad (1, 5)$$

**(a)** Finden Sie Bedingungen, die die Punkte innerhalb des Dreiecks beschreiben.

**(b)** Berechnen Sie die Höhen und den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

### Aufgabe P 20.

Sei $V$ der Raum alle Polynome auf $[0, 1]$ mit Grad maximal $2$ gegeben durch

$$V = \left\{ p \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon X \mapsto aX^2 + bX + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser Raum kann mit dem Skalarprodukt

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \,\mathrm{d}\,x$$

aus Beispiel 2.6.3 versehen werden.

**(a)** Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $V$. Welche Dimension besitzt er?

**(b)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V$ bezüglich des gegebenen Skalarproduktes.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 15.** *Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt*

Gegeben seien drei Vektoren $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^3$.

**(a)** Beweisen Sie den folgenden Entwicklungssatz durch elementare Rechnung:

$$a \times (b \times c) = \langle a \,|\, c\rangle\, b - \langle a \,|\, b\rangle\, c.$$

**(b)** Gegeben seien zwei nicht parallele Vektoren $a \neq 0$ und $c \neq 0$. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

**Aufgabe H 16.**

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Vektoren $v$, $w$ in den Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ gegeben durch

$${}_{\mathcal{B}}v = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{C}}w = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}v$, ${}_{\mathcal{B}}w$ sowie ${}_{\mathcal{B}}(3v + 3w)$.

**Aufgabe H 17.**

Im $\mathbb{R}^3$ sei $E$ die Ebene durch die Punkte

$$P_1 = (0, 0, 3)\,, \qquad P_2 = (0, 3, 0)\,, \qquad P_3 = (1, 1, 0)$$

**(a)** Berechnen Sie die Hessesche Normalform von $E$.

**(b)** Berechnen Sie das Spiegelbild der Geraden $g$ an $E$, wobei

$$g: \quad x = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}.$$

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 21.

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

**(a)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**(b)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

### Aufgabe P 22. *Matrizenaddition und -multiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte und Summen

$$AB, \quad BA, \quad CE, \quad EC, \quad E^{\mathsf{T}}C, \quad A + B^{\mathsf{T}}, \quad B + D, \quad C + D.$$

existieren und berechnen Sie diese.

### Aufgabe P 23.

Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$.

**(a)** $\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$

**(b)** $\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \\ 7x_2 + 0x_1 &= 2 \end{aligned}$

**(c)** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ x_1 + 0x_2 &= 4 \\ 3x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen?
Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.
Lösen Sie die Gleichungssysteme.
Führen Sie eine Probe durch.

### Aufgabe P 24. *Lineares Gleichungssystem*

André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder mit einem Würfel genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 18.**
Entscheiden Sie ob die folgenden Terme definiert sind und berechnen Sie diese (falls sie definiert sind):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

**(a)** $AB$

**(b)** $BA$

**(c)** $C + A$

**(d)** $C^{\mathsf{T}} AB$

**(e)** $(B + C)^{\mathsf{T}} A$

**Aufgabe H 19.**
Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, dabei sind $A$ und $b$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H 20.**
Wir betrachten die $2 \times 2$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Welche Bedingungen müssen die Einträge von $A$ erfüllen, damit für beliebige $2 \times 2$-Matrizen $B$ die Gleichung $AB = BA$ gilt?

**Aufgabe H 21.** *Lineares Gleichungssystem*
Es soll nach folgender Tabelle (Nährstoffanteile (in %)) ein Obstsalat zusammengestellt werden, der insgesamt 9 g Eiweiß, 5 g Fett und 194 g Kohlenhydrate enthält.

| | Eiweiß | Fett | Kohlenhydrate |
|---|---|---|---|
| Äpfel | 0,3 | 0,6 | 15 |
| Bananen | 1,1 | 0,2 | 22 |
| Orangen | 1,0 | 0,2 | 12 |

Stellen Sie hierfür ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 25.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Rang von $A$.

**(b)** Untersuchen Sie die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto Ax$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

**(c)** Führen Sie die Punkte (a) und (b) auch für $A^\intercal$ durch. Was stellen Sie fest?

### Aufgabe P 26. *Basiswechsel*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis $E$.

**(a)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich $B$ in Koordinaten bezüglich $E$ umrechnet.

**(b)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\mathrm{id}_E$, die Koordinaten bezüglich $E$ in Koordinaten bezüglich $B$ umrechnet.

### Aufgabe P 27.

Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 22.**
Es sei die Matrix $B$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse der Matrix $B$.

**Aufgabe H 23.**
Gegeben seien der Vektor $b = (1, 0, 2, 3 - t^2)^\mathsf{T}$ und die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t$ den Rang der Matrix $A$ sowie die Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

**(b)** Geben Sie für $t = 0$ eine Basis des Kerns von $A$ an.

**(c)** Für welche Werte von $t$ ist das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar?

**Aufgabe H 24.**
Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie die Matrix $B$, die die Abbildung $\varphi$ bezüglich der folgenden Basen ausdrückt:

$$v_1 = (1,1,1)^\mathsf{T}, \quad v_2 = (1,1,0)^\mathsf{T}, \quad v_3 = (1,0,0)^\mathsf{T} \quad \text{im } \mathbb{R}^3, \quad \text{und}$$
$$w_1 = (1,3)^\mathsf{T}, \quad w_2 = (2,5)^\mathsf{T} \quad \text{im } \mathbb{R}^2.$$

**(b)** Welche Koordinaten hat $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{w_1, w_2\}$?

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 28.

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe P 29.

Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^\intercal \mapsto (x+2y-4z, -y+2z, -x+y-2z)^\intercal \\ g_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^\intercal \mapsto (x^2, xyz, z+3x-29y)^\intercal \\ g_3 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \quad (x,y)^\intercal \mapsto (5x+2y, 4y, 3y+4x)^\intercal \end{aligned}$$

**(a)** Welche dieser Abbildungen sind linear?
Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

**(b)** Bestimmen Sie jeweils den Kern der gegebenen Abbildungen, falls sie linear sind. Welche Dimension haben jeweils Kern und Bild der linearen Abbildungen?

**(c)** Welche der linearen Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

**(d)** Begründen Sie, warum die Abbildung $g_1 \circ g_3$ linear ist. Geben Sie auch dafür die Matrixdarstellung ${}_E(g_1 \circ g_3)_E$ bezüglich der Standardbasis $E$ an.
Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $g_1 \circ g_3$.

### Aufgabe P 30.

Gegeben sei die Matrix $A$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie die Determinate von $A$.

**(b)** Bestimmen Sie die Adjunkte $\tilde{A}$ von $A$. Dabei ist die Adjunkte $\tilde{A}$ die Matrix, die die Einträge $\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k} \det \tilde{A}_{jk}$ hat. (Siehe Skript Definition 3.13.1)

**(c)** Berechnen Sie die Inverse von $A$.

**(d)** Finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\det A$, $\tilde{A}$ und $A^{-1}$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

### Aufgabe H 25.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A$, die gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe H 26.

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha$ durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha$ invertierbar ist.

**(b)** Berechnen Sie die inverse Matrix von $A_\alpha$, falls sie existiert.

### Aufgabe H 27.

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(x) & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos(x) & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos(x) & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(nx)$.

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 31.** *Orthogonale Matrizen*
Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?
Welche davon sind eigentlich bzw. uneigentlich orthogonal?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe P 32.** *Orthonormierungsverfahren*
Gegeben seien die Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $V = \mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

**(a)** Berechnen Sie die Dimension von $V$ und eine Basis von $V$.

**(b)** Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis von $V$.

**Aufgabe P 33.** *kongruente Ellipsen*
Gegeben seien die beiden Ellipsen

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-5)^2}{4} + (y+2)^2 = 1 \right\}.$$

Skizzieren Sie die beiden Ellipsen.
Geben Sie eine eigentliche Bewegung an, die $E_1$ auf $E_2$ abbildet.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 28.** *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1, 0, -1)^\intercal$, $v_2 = (1, 1, -1)^\intercal$ und $v_3 = (-1, 2, -2)^\intercal$ gegeben.

**(a)** Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

**(b)** Lässt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auch eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ konstruieren, wenn $\widetilde{v_3} = (-1, 2, 1)^\intercal$ statt $v_3$ verwendet werden soll?

**Aufgabe H 29.** *Drehachsen und Drehwinkel*

Gegeben seien die affinen Abbildungen $\alpha : u \mapsto Au$, $\beta : v \mapsto Av + s$ und $\gamma : w \mapsto Aw + t$ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestätigen Sie, dass $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ Bewegungen sind. Handelt es sich um eigentliche oder uneigentliche Bewegungen?

**(b)** Zeigen Sie, dass $\alpha$ eine Drehung ist, indem Sie die Drehachse (die Menge aller Fixpunkte $x$ mit $x = \alpha(x)$) und den Drehwinkel bestimmen.

*Hinweis:* Finden Sie zur Berechnung des Drehwinkels einen Vektor $y$, der orthogonal zur Drehachse ist, und berechnen Sie den Winkel zwischen $y$ und $\alpha(y)$ oder benutzen Sie **4.6.20**.

**(c)** Bestimmen Sie die Fixpunkte von $\beta$ und $\gamma$ (also die Punkte $x$ mit $\beta(x) = x$ beziehungsweise $\gamma(x) = x$). Kann es sich auch bei $\beta$ und $\gamma$ um Drehungen handeln?

**Aufgabe H 30.** *Komposition und Inverse von Bewegungen*

Gegeben sind Bewegungen $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Ax + s$ und $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Bx + t$.
Zeigen Sie, dass die Komposition $\beta \circ \alpha$ ebenfalls eine Bewegung ist.
*Zusatz:* Ist jede Bewegung invertierbar?
Sind die Inversen von Bewegungen wieder Bewegungen?

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 34.** *ehemalige Klausuraufgabe*
Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (1, -1) \qquad \text{und} \qquad Q = (-2, 0)$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt. Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

**Aufgabe P 35.**
Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$x_1 - 2x_2 + 2 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix $A$ und einen Vektor $t$ so, dass die Spiegelung an der Geraden beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$. Handelt es sich um eine Bewegung? Ist diese eigentlich?

**Aufgabe P 36.**
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leqq x \leqq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leqq \pi \end{cases} .$$

Weiter seien für $n \in \mathbb{Z}$ die Basisfunktionen (vgl. Skript Z.2.9)

$$\varphi_n\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto c_{-n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(-nx) \qquad \text{für } n < 0,$$
$$\varphi_n\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{für } n = 0,$$
$$\varphi_n\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \qquad \text{für } n > 0$$

gegeben. Berechnen Sie den $n$-ten Fourier Koeffizienten $a_n$, der gegeben ist durch

$$a_n := \langle f \mid \varphi_n \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

Will be continued ...

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

### Aufgabe H 31.

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 15.$$

Finden Sie eine Matrix $A$ und einen Vektor $t$ so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

### Aufgabe H 32.

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung $\alpha$ bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

### Zusatzaufgabe H 33. *Fortsetzung von* **Aufgabe P 36.**

Die Fourier Approximation $N$-ter Stufe ist gegeben durch

$$f_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} a_n \varphi_n(x).$$

Benutzen Sie ein Computerprogramm ihrer Wahl (WolframAlpha.com, Maple, Mathematica, Matlab, ...) oder einen Taschenrechner um $f_1$, $f_3$, $f_5$, $f_7$, ... zu zeichnen. Zeichnen Sie zum Vergleich auch $f$ selbst.
Berechnen Sie den Fehler $e_N$ für $N = 1, 3, 5, 7, \ldots$ , der definiert wird durch

$$e_N := \|f - f_N\| = \sqrt{\langle f - f_N \,|\, f - f_N \rangle}.$$

*Hinweis:* Die auftretenden Integrale dürfen nachgeschlagen oder näherungsweise berechnet werden.

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 37.

Gegeben ist die Matrix $A$ und die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -4 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Welche der Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ sind Eigenvektoren? Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

**(b)** Ist die Matrix $A$ diagonalisierbar?

### Aufgabe P 38.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Geben sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. Sind $A$ und $B$ reell diagonalisierbar? Sind $A$ und $B$ komplex diagonalisierbar?

### Aufgabe P 39.

Gegeben seien die Matrizen $A$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**(a)** Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ und $\chi_B(\lambda)$.

**(b)** Bestimmen Sie die reellen sowie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren.

**(c)** Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine Transformationsmatrix $T$ an, die auf Diagonalgestalt transformiert.

**(d)** Verwenden Sie diese Transformationsmatrix und die zugehörige Diagonalmatrix, um explizit $B^{100}$ zu berechnen.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 34.**
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von den Matrizen $A$, $A^2$ und $A^{100}$.

**Aufgabe H 35.**
Finden Sie eine $3\times3$-Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und $3$ hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right), \qquad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

**Aufgabe H 36.**
Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe H 37.**
Es seien die Matrizen $A$, $E_n$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, wobei $A$ eine beliebige Matrix, $E_n$ die Einheitsmatrix und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix ist. Wir definieren die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ durch

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Ist $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$, dann sind $w^+$ bzw. $w^-$ Eigenvektoren von $M$ zum Eigenwert $\mu^+$ bzw. $\mu^-$. Hierbei sind

$$w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}, \qquad w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mu^+ = +\sqrt{\lambda}, \qquad \mu^- = -\sqrt{\lambda}.$$

**Aufgabe H 38.**
Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Aussage von **Aufgabe H 37.**

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 40.

Gegeben sei folgende Quadrik

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1.$$

**(a)** Bestimmen Sie die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, den Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$, so dass sich die Quadrik schreiben lässt als $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ .

**(b)** Bestimmen Sie $A_{erw}$ und damit, um welchen der in Definition 6.26 genannten Typen es sich handelt.

**(c)** Zeichnen Sie Schnitte dieser Quadrik mit den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ und $x - z = 0$.

**(d)** Zeichnen Sie die Quadrik.

### Aufgabe P 41.

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0\right\}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik in ein Koordinatensystem ein. Weiter sei die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\alpha(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie auch die Quadrik $\alpha(Q)$.

### Aufgabe P 42.

Gegeben Sei der Doppelkegel

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\}.$$

**(a)** Skizzieren Sie die Schnitte von $Q$ mit den Ebenen $E_1 : x_3 = 1$, $E_2 : x_3 = 0$, $E_3 : x_3 = -1$, $E_4 : x_1 = 1$, $E_5 : x_1 = 0$, $E_6 : x_1 = -1$, $E_7 : x_2 = 1$, und $E_8 : x_1 - x_2 = 0$.

**(b)** Erstellen Sie eine Skizze von $Q$.

**(c)** Bestimmen Sie den Öffnungswinkel von $Q$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 39.**
Gegeben sei die quadratische Form

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass sich $q$ schreiben lässt als

$$q(x) = x^\intercal Ax.$$

Bestimmen Sie, ob $q$ positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

**Aufgabe H 40.**
Gegeben sei die folgende Familie von Quadriken

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axz = 1, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie um welchen Typ (nach Definition 6.26) es sich in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ handelt.

**Aufgabe H 41.**
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 21 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von $A$. Bestimmen Sie alle Eigenräume und alle Eigenwerte von $A$.

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 43.**
Gegeben Sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 1 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $Q$.

**Aufgabe P 44.**
Gegeben Sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

**(a)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $Q$ und die Gestalt von $Q$.

**(b)** Geben Sie ein Koordinatensystem an in dem $Q$ Normalform hat. (Finden Sie auch ein zweites?) Geben Sie die Koordinatentransformation in dieses Koordinatensystem an.

**(c)** Geben Sie eine affine Abbildung an, die die Gleichung von $Q$ in eine der Formen aus **6.3.6** / **6.3.7** transformiert.

**Aufgabe P 45.**
Zeichnen Sie Niveaulinien der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto x^2 + xy - y^2$$

für die Werte $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Die Niveaulinie $N(c)$ zu $c \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$N(c) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x, y) = c \right\} .$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 42.**
Gegeben sei folgende Quadrik

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axz = 1, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Klassifizieren Sie diese Quadrik in Abhängigkeit von $a$.

**(b)** Geben Sie eine auf Hauptachsenlage transformierende Drehung an, sowie die Quadrik nach dieser Transformation.

**Aufgabe H 43.**
Gegeben sei die Quadrik $Q$ durch

$$Q := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 2z = 0\right\}.$$

Die Gestalt von $Q$ ist ein paralleles Ebenenpaar. Bestimmen Sie Ebenen $E_1 \neq E_2$, die in $Q$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand zwischen $E_1$ und $E_2$.

**Aufgabe H 44.**
Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + \sqrt{6}x_3 = 0\right\}.$$

Berechnen Sie eine euklidische Normalform von $Q$. Geben Sie das Koordinatensystem, in dem $Q$ diese Normalform hat und die zugehörige Koordinatentransformation an.

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 46.

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad b_n = \cos 2n\pi + \frac{1}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \qquad c_0 = 1, c_{n+1} = \frac{1}{9}c_n.$$

Zeigen Sie, dass jede der Folgen konvergent ist und geben Sie den Grenzwert an.

### Aufgabe P 47.

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 5^n, \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \qquad c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$d_n = \frac{1}{n^2 - 2}, \qquad e_n = (-1)^n + \frac{1}{2}.$$

**(a)** Bestimmen Sie, ob die Folgen beschränkt sind und finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

**(b)** Bestimmen Sie, ob die Folgen (streng) monoton wachsend bzw. fallend sind.

**(c)** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen.

**(d)** Geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

### Aufgabe P 48.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n}{2n+1}.$$

Berechnen Sie für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N_\varepsilon > 0$ so, dass für jede natürliche Zahl $k$, die größer ist als $N_\varepsilon$, gilt:

$$\left|a_k - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

### Aufgabe H 45.

Gegeben seien die folgenden rekursiv definierten Folgen

$$a_0 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + 5, \qquad b_0 = 3, \quad b_n = 4b_{n-1}, \qquad c_0 = 5, \quad c_n = 2c_{n-1} + 1.$$

Bestimmen Sie eine explizite Form dieser Folgen, d.h. eine Ausdruck der nur von $n$ aber nicht von $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, ... abhängt.

### Aufgabe H 46.

Gegeben sind die Folgen

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \text{ für } n \geqq 2.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n = b_n$ gilt.

### Aufgabe H 47. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

**(a)** $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$

**(b)** $a_n = n\cos(\pi n)$

**(c)** $a_n = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

**(d)** $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

### Aufgabe H 48. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert

**(a)** $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

**(b)** $a_n = \dfrac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4}$

**(c)** $a_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n}$

**(d)** $a_n = 2^{-n}\cos(\pi n)$

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 49.**

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen, falls sie existieren:

$$\left(\frac{n^2+5}{2n^2+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{(n+1)(n-1)}{2n+10}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{4^{n+1}}{2n+n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{n+1}{n+2}\left(\sqrt[n]{n}-2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

**Aufgabe P 50.**

Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierte Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls die Grenzwerte

**(a)** $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

**(b)** $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = \dfrac{3}{4-b_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

**(c)** $c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 3c_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}$

**Aufgabe P 51.**

Gegeben sind die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k^2+11k+30} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+2}.$$

Weisen Sie nach, dass diese Reihen konvergieren.

**Aufgabe P 52.** *Konvergenzkriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k(2k+1)}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$

**(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

*Hinweis:* Die Abgaben zu diesen Aufgaben werden in der ersten Übung des kommenden Semesters eingesammelt und zählen zum HM2-Schein.

**Aufgabe H 49.**

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \left(\frac{1+2(-1)^n}{2}\right)^n .$$

**(a)** Bestimmen Sie $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ und $\varliminf_{n\to\infty} a_n$.

**(b)** Bestimmen Sie $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, falls sie existieren.

**(c)** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $a_n$.

**(d)** Entscheiden Sie, ob $a_n$ konvergent ist.

**Aufgabe H 50.** *Sätze über Konvergenz*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls die Grenzwerte

**(a)** $a_n = \dfrac{5n^3 - 7n}{1-2n^2}$

**(b)** $b_n = \dfrac{\sqrt{n} - 6n}{3n+1}$

**(c)** $c_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$

**(d)** $d_n = \dfrac{5n^2}{1-n^2} + 2^{1/n}$

**(e)** $e_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

**(f)** $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

**Aufgabe H 51.**

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}+3^{-n}}{5}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}5^{1-n}$