B. Chen, M. Jedlitschky,
B. Krinn, M. Kutter,
M. Werth

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2013/2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = 23455{,}5 : 19$

(b) $x_2 = \dfrac{1}{35} \cdot \dfrac{21}{\frac{3}{5}}$

(c) $x_3 = \sqrt{15^2 + 36^2}$

(d) $x_4 = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

Aufgabe P 2. *Funktionsgraphen*

Skizzeren Sie die Graphen folgender Funktionen:

(a) $f:\ [0, +\infty) \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \sqrt{x}$

(b) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto 2\sin(x - \pi) + 1$

Aufgabe P 3. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke liefern für $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen a_j stets dasselbe Resultat?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

(d) $\displaystyle\sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1 - (-1)^l\right)}{2} \sin\!\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l$

(e) $\displaystyle\sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l^2+l}\, \frac{a_{2n-(l-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1}\, \frac{a_k}{2}$

Aufgabe P 4. *Induktion*

Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0,\quad f_1 := 1 \ \text{ und } \ f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \ \text{ für } \ n \geqq 1.$$

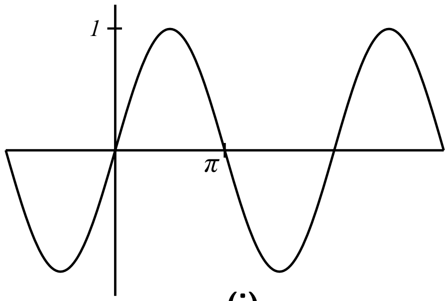
Berechnen Sie f_7.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geqq 1$ gilt:

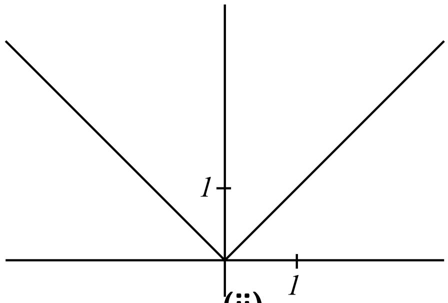
$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\ .$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

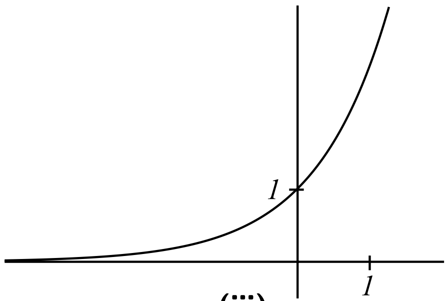
Aufgabe H 1. *Funktionsgraphen*



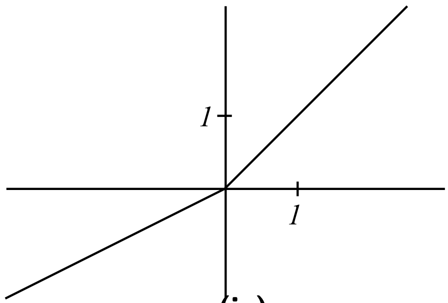
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Ordnen Sie jedem der obigen Funktionsgraphen jeweils eine der unteren Funktionen zu und begründen Sie jede dieser Zuordnungen.

(a) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ 2x & x \geqq 0 \end{cases}$

(b) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \cos\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big)$

(c) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \exp(x)$

(d) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ |x| & x \geqq 0 \end{cases}$

(e) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \sin\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big)$

(f) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ x \mapsto \sqrt{x^2}$

Aufgabe H 2. *Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{j=0}^{k} \binom{5+j}{j} = \binom{5+k+1}{k}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $|\sin(n\alpha)| \leqq n|\sin(\alpha)|$.
Hinweis: Man kann $\sin(\beta+\gamma) = \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma)$ verwenden.

Aufgabe H 3. *Induktion*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $49^n + 16n - 1$ durch 64 teilbar.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ ist $(1 + \frac{1}{n})^n < n$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Abbildungen*

Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, um nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv zu sein.
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe und B die Menge $\{\text{Januar}, \text{Februar}, \dots, \text{Dezember}\}$. Weiterhin sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seinen Geburtsmonat zuordnet.

(b) Es sei C die Menge der Vereine der ersten Fußball-Bundesliga und D die Menge der Zahlen zwischen 1 und 18. Weiterhin sei $t\colon C \to D$ die Abbildung, die jedem Verein seinen aktuellen Tabellenplatz zuordnet. Kann t vom Spieltag abhängen?

(c) Sei $g\colon\ [2, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - 4x + 5$. Skizzieren Sie auch den Graphen.

Aufgabe P 6. *Ungleichungen, Beträge*

Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$\left|x - y\right| \leqq \left|x^2 - y^2\right|.$$

Aufgabe P 7. *Beispiele von Abbildungen*

Finden Sie

(a) eine Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

(b) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, die weder surjektiv noch injektiv ist.

(c) eine Abbildung $f\colon [-1,2] \cup (3,5] \to [0,1]$, die bijektiv ist.

Aufgabe P 8. *Mengen*

Es seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung.
Sei $U \subseteqq A$. Wir schreiben $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\} \subseteqq B$.
Sei $V \subseteqq B$. Wir schreiben $f^{\leftarrow}(V) := \{x \in A \mid f(x) \in V\} \subseteqq A$.
Sind folgende Rechenregeln richtig?

(a) $f^{\leftarrow}(f(U)) = U$ **(b)** $f(f^{\leftarrow}(V)) = V$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie gegebenenfalls eine Umkehrabbildung an.

(a) Sei R die Menge der Rechtecke mit positivem Flächeninhalt in der Ebene. Sei $F\colon R \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto$ (Flächeninhalt von x).

(b) Sei $u\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-5\} \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\colon y \mapsto \dfrac{1}{y+5}$.

Aufgabe H 5. *Ungleichungen*

(a) Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist $(x + y + 2z)^2 \leqq 6(x^2 + y^2 + z^2)$?
Hinweis: Schwarzsche Ungleichung.

(b) Zeigen Sie folgende Ungleichung für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$.

$$(1 + x)^n \;\geqq\; 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$$

Ist die Ungleichung für $x = -1/2$ auch noch für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig?

Aufgabe H 6. *Abbildungen*

Finden Sie

(a) eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$, die injektiv ist. Ist Ihr Beispiel surjektiv?

(b) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(c) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to (0, 1]$, die bijektiv ist.

(d) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \{0, 1, 2, 3\}$, die surjektiv ist.

Aufgabe H 7. *Skizzieren von Mengen*

Gegeben sind

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \qquad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-8}\}$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 4^2\} \qquad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$$

Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(a) A, B, C und D **(b)** $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^2}(A) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{R}^2}(B)$ **(c)** $C \smallsetminus (D \cup \{(1, 2)\})$

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 := 1, \quad z_2 := 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_3 := -3 + \mathrm{i}, \quad z_4 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$$

(a) Zeichnen Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 in die komplexe Ebene ein.

(b) Zeichnen Sie $\overline{z_2}$, $z_2 + z_3$, $z_2 z_3$ und z_4^5 in die komplexe Ebene ein und überprüfen Sie in diesen Beispielen die jeweiligen geometrischen Interpretationen der angewendeten Rechenoperationen.

(c) Bestimmen Sie $\arg(z_4)$.

Aufgabe P 10. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Im}(z) > 1 \right\}$

(b) $\left\{ z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \right\}$

(c) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z + \mathrm{i}z) + \operatorname{Im}(z + \mathrm{i}z) = 0 \wedge z\overline{z} = 4 \right\}$

Aufgabe P 11. *Abbildungen im Komplexen*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$$

sowie die Mengen $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} z = 1 \right\}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im} z = 1 \right\}$.

Zeichnen Sie A, $f(A)$ und $f(B)$ in die komplexe Ebene ein.

Aufgabe P 12. *Symmetrische Gruppe*

Finden Sie ein Element $\sigma \in \operatorname{Sym}(\{1,2,3\})$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$, aber $\sigma^3 = \mathrm{id}$.
Hierbei ist $\mathrm{id}(k) = k$ für $k \in \{1,2,3\}$, es ist id also die identische Abbildung.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8. *Gleichungen im Komplexen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + |z| = 0$?

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} = 4$ und $|z + 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}| = 4$? Bestimmen Sie dies auf rechnerischem und auf zeichnerischem Weg.

Aufgabe H 9. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1 - \mathrm{i}| > 2\right\}$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1 - \mathrm{i}| > |z - 1 + \mathrm{i}|\right\}$

(c) $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(z)^4\right\}$

Aufgabe H 10. *Abbildungen im Komplexen*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z + \frac{1}{z} \ , \qquad g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z + \frac{\mathrm{i}}{z}$$

sowie die Menge $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\right\}$.

(a) Zeichnen Sie A, $f(A)$ und $g(A)$ in die komplexe Ebene ein.

(b) Bestimmen Sie $\left\{\arg(z) \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \wedge f(z) = 1\right\}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Nullstellen von Polynomen*

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen und zeichnen Sie diese in die komplexe Zahlenebene ein.

(a) $z^3 = -1$

(b) $(w - 3\mathrm{i})^4 - \mathrm{i} = 0$

(c) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

Aufgabe P 14. *Untervektorräume*

Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 1\right\}$

(b) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0\right\}$

(c) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\}$

(d) $\left\{\lambda(2, 3, 5) + \mu(7, 11, 13) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

(e) $\left\{(1, 2, -7) + \lambda(-2, -4, 14) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe P 15. *Skalarprodukt*

(a) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels, den die Vektoren $(1, 1, 1)$ und $(2, 1, 0)$ einschließen.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren $(1, 1, 1, 1)$ und $(2, 1, 0, t)$ senkrecht aufeinander?

Aufgabe P 16. *Untervektorräume, Geraden*

Für $t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$\begin{aligned} V_t &:= \left\{-2 + \mathrm{i} - 3\lambda + \lambda(1 + t)\mathrm{i} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ W_t &:= \left\{1 - \mathrm{i}\,t + 3\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie V_2 .

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$?

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein komplexer Untervektorraum von $\mathbb{C}$?

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $V_t = W_t$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*

Auf dem reellen Vektorraum $V := \mathcal{C}^0([0,1])$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ ist durch

$$\langle\, f \,|\, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

ein Skalarprodukt definiert (vergleiche 2.6.3). Sei $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x$.

(a) Bestimmen Sie die Teilmenge $P \subseteqq V$ der Polynome f von Grad $\leqq 2$ (mit reellen Koeffizienten), für welche $\langle\, f \,|\, h \rangle = 0$ ist. Ist P ein Untervektorraum von V?

(b) Sei $Q \subseteqq V$ die Teilmenge der Polynome f von Grad $\leqq 3$, die $\langle\, f-h \,|\, f-h \rangle = 3$ erfüllen. Ist Q ein Untervektorraum von V?

(c) Sei $R := \left\{ f \in V \,\middle|\, f(\tfrac{1}{2}) = 0 \right\}$. Ist R ein Untervektorraum von V?

Aufgabe H 12. *Nullstellen von Polynomen*

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des jeweiligen Polynoms und zeichnen Sie diese in die komplexe Zahlenebene ein. Zerlegen Sie das jeweilige Polynom in $\operatorname{Pol}\mathbb{C}$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(a) $z^8 - 1$

(b) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$

(c) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

(d) $u^4 - 13u^3 - 2u + 26$

Aufgabe H 13. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte

$$P = (0,2,5)\,, \quad Q = (3,5,6) \quad \text{und} \quad R = (-1,0,0) \quad \text{aus} \quad \mathbb{R}^3\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch die Punkte P und Q geht. Mit welchen Parameterwerten wird dabei die Strecke von P nach Q beschrieben?

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene, die durch P, Q und R geht.

(c) Parametrisieren Sie die Dreiecksfläche mit den Ecken P, Q und R mittels zweier Parameter.

(d) Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{ \alpha P + \beta Q + \gamma R \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+ \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 1 \right\}\,.$$

B. Chen, M. Jedlitschky,
B. Krinn, M. Kutter,
M. Werth

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2013/2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Vektorräume*

Erklären Sie Ihrem Nachbarn die Begriffe "linear unabhängig", "Erzeugendensystem", "Basis" und "Dimension".

Nun seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$v_1 = (3,7)\,, \quad v_2 = (-6,4)\,, \quad v_3 = (3,-2)\,, \quad v_4 = (1,9)\,, \quad v_5 = (0,0)\,.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}(v_3)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

(c) Die Vektoren v_5, v_3 sind linear unabhängig.

(d) Es gilt: $\mathrm{L}(v_3, v_4) = \mathbb{R}^2$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_4 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(f) Die Vektoren v_2 und v_3 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(g) Es gilt: $\mathrm{L}(v_4) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 9x - y = 0\right\}$.

Aufgabe P 18. *Basen*

Es seien die Basen $C\colon (0,1),(1,0)$ und $D\colon (1,1),(-1,1)$ von $\mathbb{R}^2$ gegeben. Weiter seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit

$$_{C}a = (-6,5), \qquad _{C}b = (5,-9)$$

Geben Sie die Koordinaten der Vektoren bezüglich der Standardbasis und bezüglich der Basis D an. Skizzieren Sie die beiden Basen und die Vektoren a und b.

Aufgabe P 19. *Hesse-Normalform*

Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{(1,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $(1,1,0)$ und $(0,1,1)$.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E und den Abstand dieser Ebene vom Ursprung.

Aufgabe P 20. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe **2.6.3**):

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 \qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(3x) \qquad f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

(b) Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 bilden eine Basis des Untervektorraums $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 14. *Hesse-Normalform und Vektorprodukt*

Es seien die Punkte $A = (5, 1, 6)$, $B = (1, -4, 3)$, $C = (-3, -1, 8)$ und $D_t = (1, t, 7 + t)$ gegeben, wobei t ein reeller Parameter ist.

(a) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, die A, B und C enthält.

(c) Bestimmen Sie $\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, D_t \in E\right\}$.

(d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

(e) Bestimmen Sie den Parameter t so, dass $ABCD_t$ eine Raute bildet. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Raute.

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe **2.6.3**):

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1, \qquad f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x),$$
$$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(x), \qquad f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(2x).$$

(a) Bestehe C aus den Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4. Zeigen Sie, dass C eine Basis von $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$ ist.

(b) Sei

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto (\sin(x) + \cos(x))\sin(x)$$

und

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)\,.$$

Liegen g und h in $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$? Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis C.

Aufgabe H 16. *Basen*

Wir betrachten den komplexen Vektorraum $V := \mathrm{Pol}_4\,\mathbb{C}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ von Grad $\leqq 4$. Gegeben seien darin die Polynome

$$1,\ \mathrm{i} + X,\ (\mathrm{i} + X)^2 \quad \text{und} \quad (\mathrm{i} + X)^3\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Polynome linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von V, die alle diese Polynome enthält.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Polynoms X^3 bezüglich B.

(d) Sei $U := \mathrm{L}\,(X^2 - 1, (X + \mathrm{i})^2, (X - \mathrm{i})^2, X^2)$. Bestimmen Sie $\dim U$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 21. *Matrixmultiplikation*
Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte aus je zwei dieser Matrizen. Berechnen Sie B^3.

Aufgabe P 22. *Matrizen*
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle reellen 2×2-Matrizen B, die $AB = \mathbf{0}$ erfüllen.

Aufgabe P 23. *Matrizen und lineare Gleichungssysteme*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Es existiert eine 2×2-Matrix H mit $H^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Es existiert eine Matrix A mit

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Sei $b \in \mathbb{R}^3$. Für alle $y,\, z \in \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, Ax = b \right\}$ ist $A(y - z) = \mathbf{0}$.

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Sei $b \in \mathbb{R}^3$. Wenn $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, Ax = b \right\} = \mathbb{R}^2$ ist, dann gilt $A = \mathbf{0}$ und $b = \mathbf{0}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17. *Matrizen*

Es bezeichnen $\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ und $\mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^\intercal$.

Bestimmen Sie die jeweilige Menge

(a) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, für die $\mathrm{e}_1^\intercal A \mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_2^\intercal A \mathrm{e}_1$ gilt.

(b) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, die $\mathrm{e}_2^\intercal A \mathrm{e}_2 = 0$ und $A^2 = A$ erfüllen.

(c) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, die $AA^\intercal = \mathbf{0}$ erfüllen.

(d) aller $A \in \mathbb{C}^{2\times2}$, die $AA^\intercal = \mathbf{0}$ erfüllen.

Aufgabe H 18. *Dimension von Untervektorräumen*

Seien Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$U := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

und

$$W := \left\{v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von U, W und $U \cap W$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times4}$ mit $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0 \right\}$.

Aufgabe H 19. *Matrizen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Menge

$$\left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times2} \,\middle|\, A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \right\}$$

enthält mindestens zwei Elemente.

(b) Für jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times2} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt es eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mit $CD = \mathrm{E}_2$.

(c) Sei $F \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mit $F^2 = \mathrm{E}_2$. Dann ist $F \in \{-\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_2\}$.

(d) Es gibt eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mit $G^2 = -\mathrm{E}_2$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Lineares Gleichungssystem*

(a) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um. Verwenden Sie dies zur Ermittlung der Lösungsmenge.

(b) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform.

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in die in Satz 3.7.2 angegebene Form. Geben Sie eine spezielle Lösung an. Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese Ergebnisse zur Ermittlung der Lösungsmenge.

Aufgabe P 25. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E\varphi_E$ von φ bezüglich der Standardbasis E an.

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ.

(c) Geben Sie $({}_E\varphi_E)^2$ an. Geben Sie ${}_E(\varphi^2)_E$ an.

Aufgabe P 26. *Einschränkung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$.

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

(a) Geben Sie eine Basis von U an.

(b) Ist $f(U) \subseteqq U$?

Aufgabe P 27. *Matrixmultiplikation*

Bestimmen Sie die Menge $\left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; AB = BA \quad \text{für alle} \quad B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 20. *Lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S \;:\; \left\{ \begin{array}{rcr} -x_2 - 2x_3 + 11x_4 - 3x_5 &=& 15 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 &=& -3 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 &=& -1 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 - 10x_4 - 3x_5 &=& -21 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 19x_4 + 6x_5 &=& -25 \end{array} \right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu (b).

(d) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung -25 durch -24 und bestimmen Sie nun die Lösungsmenge.

Aufgabe H 21. *Die komplexen Zahlen als reeller Vektorraum*

Wir können $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen. Dieser hat die Basis $B : 1, \mathrm{i}$.
Für $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\alpha_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto zw$.

(a) Bestimmen Sie ${}_B(\alpha_{1+3\mathrm{i}})_B$.

(b) Finden Sie für jedes $w \in \mathbb{C}$ ein $u \in \mathbb{C}$ mit $({}_B(\alpha_w)_B)^2 = {}_B(\alpha_u)_B$.

(c) Finden Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $({}_B(\alpha_w)_B)^3 = -2\,\mathrm{E}_2$.

(d) Beschreiben Sie die Abbildung α_i in der Zahlenebene geometrisch. Liegt eine Spiegelung vor?

Aufgabe H 22. *Einschränkung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$.

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\} \subseteqq \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie zwei Basen B und C von U.

(b) Weisen Sie nach, dass $f(U) \subseteqq U$ ist.

(c) Sei $g\colon U \to U\colon x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B g_B$ und ${}_B g_C$.

(d) Ist g bijektiv?

Präsenzübungen

Aufgabe P 28. *Determinante*

Berechnen Sie

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 29. *Lineare Abbildung*

Es seien die Basen $B\colon b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E\colon \mathrm{e}_1$, e_2 des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Sei $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $\mathrm{L}(b_1)$.

(a) Zeichnen Sie die Vektoren e_1, e_2, b_1, b_2, $\sigma(b_1)$, $\sigma(b_2)$, $\sigma(\mathrm{e}_1)$ und $\sigma(\mathrm{e}_2)$ in ein Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\sigma(b_1)$ und ${}_B\sigma(b_2)$.

(c) Geben Sie damit die Matrix ${}_B\sigma_B$ an.

(d) Berechnen Sie ${}_B\mathrm{e}_1$ und ${}_B\mathrm{e}_2$.

(e) Berechnen Sie ${}_B\sigma(\mathrm{e}_1)$ und ${}_B\sigma(\mathrm{e}_2)$ mit Hilfe der Ergebnisse aus (c) und (d).

(f) Berechnen Sie nun ${}_E\sigma(\mathrm{e}_1)$ und ${}_E\sigma(\mathrm{e}_2)$.

(g) Geben Sie hiermit nun die Matrix ${}_E\sigma_E$ an.

(h) Geben Sie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$ an. Berechnen Sie daraus ${}_B\mathrm{id}_E$.
Berechnen Sie ${}_E\mathrm{id}_B\,{}_B\sigma_B\,{}_B\mathrm{id}_E$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit (d) und (g).

Aufgabe P 30. *Dimensionsformel*

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$ und die Dimension von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

Aufgabe P 31. *Invertieren*

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 23. *Parameterabhängiges LGS*

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha \\ -2 & -\alpha & -4-\alpha \\ 1 & 2\alpha & 2+\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix},$$

die die lineare Abbildung $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_\alpha x$ beschreibt.

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Bild von φ_α und seine Dimension, sowie den Kern von φ_α und seine Dimension.

(c) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$, wobei

$$b_\alpha := (2+2\alpha, -2-\alpha, 1+3\alpha)^\intercal.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt dieses LGS

(i) genau eine Lösung? Bestimmen Sie diese.

(ii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(iii) keine Lösung?

Aufgabe H 24. *einseitige Inverse*

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge $\left\{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, AX = \mathrm{E}_3\right\}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\left\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \,\middle|\, BX = \mathrm{E}_2\right\}$.

(c) Bestimmen Sie die Menge $\left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, CX = \mathrm{E}_2\right\}$.

(d) Welche der Matrizen A, B, C sind invertierbar?
Geben Sie, falls möglich, die Inverse an.

Aufgabe H 25. *Lineare Abbildung*

Sei F die Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung, auf welcher der Vektor $b = (1,1,1)^\intercal$ senkrecht steht. Sei $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene F.

(a) Bestimmen Sie eine Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass b_1 und b_2 in F enthalten sind und b_3 auf F senkrecht steht.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\sigma_B$.

(c) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$, wobei $E\colon \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie ${}_E\sigma_E$ unter Verwendung von (b) und (c). Berechnen Sie $\left({}_E\sigma_E\right)^2$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*
Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1,0,1)^\intercal, \qquad v_2 = (2,-1,0)^\intercal, \qquad v_3 = (1,3,1)^\intercal$$

eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(f_1)$, $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

Aufgabe P 33. *Rechnen mit Determinanten*
Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Warum ist A invertierbar? Ist A orthogonal? Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}B$.

Aufgabe P 34. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t$ die Spiegelung an der Geraden $(1,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((0,1)^\intercal\right)$ beschreibt. Ist f eine Isometrie? Ist f eine eigentliche Isometrie?

(b) Bestimmen Sie eine Matrix B und einen Vektor r so, dass die affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Bx + r$ die Spiegelung an der Geraden $(2,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((0,1)^\intercal\right)$ beschreibt.

(c) Berechnen Sie jeweils den linearen Anteil und den Translationsanteil der Umkehrabbildung f^{-1} und des Kompositums $f \circ g$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 26. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ unter f.

(c) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu f.

(d) Existiert eine affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}?$$

Wie kann die Antwort allein mit der Geradentreue begründet werden?

Aufgabe H 27. *Determinanten und lineare Abbildungen*

Gegeben sei die Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass s eine lineare Abbildung ist. Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E s_E$ an. Bestimmen Sie Kern und Bild von s. Ist s injektiv? Ist s surjektiv?

Aufgabe H 28. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1, 0, -1)^\intercal$, $v_2 = (1, 1, -1)^\intercal$ und $v_3 = (-1, 3, -2)^\intercal$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal? Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ eigentlich orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\mathrm{id}_F$.

Aufgabe H 29. *Determinanten*

Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie $\det(A)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A)$. Bestimmen Sie $\det(A + A^\intercal)$. Bestimmen Sie $\det(A - A^\intercal)$. Wie kann man im letzten Fall eine Rechnung vermeiden?

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Koordinatentransformation*

Es seien in der Ebene das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Sei P der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$.

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

(d) Bestimmen Sie mit (c) nun ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(e) Bestimmen Sie mit (c) und (d) nun ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(f) Bestimmen Sie mit (b) und (e) nun ${}_{\mathbb{G}}P$.

(g) Bestimmen Sie mit (f) und (c) nun ${}_{\mathbb{E}}P$ und vergleichen Sie mit dem Ausgangsvektor.

Aufgabe P 36. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\alpha_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto A_1 v\ , \quad \alpha_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto A_2 v \quad .$$

Sei $\beta := \alpha_1 \circ \alpha_2$. Sei $\gamma := \alpha_2 \circ \alpha_1$.

(a) Welche der Abbildungen α_1 , α_2 , β und γ sind Isometrien? Welche davon sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Bestimmen Sie für alle eigentlichen Isometrien aus der Menge $\{\alpha_1 , \alpha_2 , \beta , \gamma\}$ den Drehwinkel.

(c) Geben Sie für alle uneigentlichen Isometrien aus der Menge $\{\alpha_1 , \alpha_2 , \beta , \gamma\}$ die Spiegelachse an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 30. *Koordinatentransformation*

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P\,; \overrightarrow{PQ_1}\,, \overrightarrow{PQ_2}\,, \overrightarrow{PQ_3})$ und das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.

(a) Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

(b) Bestimmen Sie die $\mathbb{F}$-Koordinaten der Punkte

$$R_1 = (0,5,2)^\intercal, \quad R_2 = (-3,4,-3)^\intercal, \quad R_3 = (-1,1,-2)^\intercal.$$

(c) Mit den Bezeichnungen aus (b) gelte für die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\alpha(P) = P\,, \quad \alpha(Q_1) = R_1\,, \quad \alpha(Q_2) = R_2\,, \quad \alpha(Q_3) = R_3\,.$$

Bestimmen Sie sowohl die Darstellung von α bezüglich $\mathbb{F}$ als auch die bezüglich $\mathbb{E}$.

Aufgabe H 31. *Drehungen und Spiegelungen*

Die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \alpha & \alpha \\ \sqrt{2} & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung durch $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_\alpha\, x$.

(a) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, für das A_α eigentlich orthogonal ist. In diesem Fall beschreibt φ_α eine Drehung. Berechnen Sie die Drehachse und den Drehwinkel.

(b) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, für das A_α uneigentlich orthogonal ist. In diesem Fall beschreibt φ_α eine Drehspiegelung. Finden Sie eine Spiegelung σ und eine Drehung δ so, dass $\varphi_\alpha = \delta \circ \sigma$ ist.

Aufgabe H 32. *Drehungen und Spiegelungen*

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_1-Achse, die $(0,1,0)^\intercal$ auf $(0,0,1)^\intercal$ abbildet.
Sei $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_2-Achse, die $(1,0,0)^\intercal$ auf $(0,0,1)^\intercal$ abbildet.
Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\beta \circ \alpha$. Liegt eine Drehung vor? Falls ja, bestimmen Sie Drehachse und -winkel.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\alpha \circ \beta$. Liegt eine Drehung vor? Falls ja, bestimmen Sie Drehachse und -winkel.

(c) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\alpha \circ \gamma$. Liegt eine uneigentliche Isometrie vor? Liegt eine Spiegelung vor? Falls ja, bestimmen Sie die Spiegelebene.

(d) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\beta \circ \alpha \circ \gamma$. Liegt eine uneigentliche Isometrie vor? Liegt eine Spiegelung vor? Falls ja, bestimmen Sie die Spiegelebene.

B. Chen, M. Jedlitschky,
B. Krinn, M. Kutter,
M. Werth

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2013/2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Diagonalisieren*

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.
Ist A diagonalisierbar? Geben Sie diesenfalls eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D an mit $T^{-1}AT = D$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe P 38. *Orthogonales Diagonalisieren, Definitheit*

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ist A diagonalisierbar? Ist A orthogonal diagonalisierbar? Geben Sie diesenfalls eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D an mit $T^{\mathsf{T}}AT = D$.

Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $q_A(x) > 0$. Bestimmen Sie ein $y \in \mathbb{R}^2$ mit $q_A(y) < 0$.
Ist A indefinit?

Aufgabe P 39. *Eigenräume*

Bestimmen Sie eine Matrix, die den Eigenraum $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ zum Eigenwert 2 und den Eigenraum $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ zum Eigenwert 5 besitzt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33. *Diagonalisieren*

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^{-1}AT = D$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^\intercal A\,T = D$.

Gibt es ein $x \in \mathbb{R}^4$ mit $x^\intercal A\,x < 0$?

Aufgabe H 34. *Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A_4 .

(b) Berechnen Sie für jedes α die Eigenwerte von A_α , sowie deren jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Für welche α ist A_α diagonalisierbar? Bestimmen Sie ein α, für welches A_α orthogonal diagonalisierbar ist.

(d) Bestimmen Sie die Menge aller α, für die $\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_α ist.

Aufgabe H 35. *Eigenräume*

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A, die

- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((1,1,1)^\intercal\right)$ zum Eigenwert 1,
- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((1,0,1)^\intercal\right)$ zum Eigenwert 2 und
- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((-1,1,0)^\intercal\right)$ zum Eigenwert -1

besitzt.

(b) Gibt es eine reelle symmetrische Matrix mit den in (a) genannten Eigenschaften?

(c) Geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $A = TDT^{-1}$ an. Bestimmen Sie D^k und A^k für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Gibt es eine Matrix mit einem Eigenwert λ, für welchen $d_\lambda = 2$ und $e_\lambda = 3$ ist?

Präsenzübungen

Aufgabe P 40. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dessen die Quadrik diese Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadriken.

- $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 3 = 0 \right\}$
- $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2 = 0 \right\}$
- $\mathcal{Q}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1x_2 + 2x_1 = 0 \right\}$

Aufgabe P 41. *Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Schneiden Sie die Quadrik $\mathcal{Q}$ mit den Ebenen $x_3 = 0$, $x_3 = -2$, $x_3 = -4$, $x_2 = 0$. Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Schnitt und die Gestalt des Schnitts an. Skizzieren Sie jeweils den Schnitt.

(b) Skizzieren Sie nun die Quadrik $\mathcal{Q}$. Welcher Typ liegt vor?

Aufgabe P 42. *Grobeinteilung von Quadriken*

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 + 4\,\alpha\, x_2\, x_3 + 2\,\alpha\,(\alpha - 1)\, x_3 + \alpha\,(\alpha - 1) = 0 \right\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 36. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{18}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{18}x_3^2 + \frac{1}{9}x_1x_3 + \frac{\sqrt{2}}{3}x_1 + 4x_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Skizzieren Sie $\mathcal{Q}$ und $\mathbb{F}$ in das Ausgangskoordinatensystem $\mathbb{E}$.

Aufgabe H 37. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} \; = \; \left\{ (x_1\,, x_2\,, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \right\} \; .$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} \;\; = \;\; \{(x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid -4x_3^2 + 2x_1x_2 + 1 = 0\} \; .$$

(a) Betrachten Sie die ebenen Schnitte der Quadrik mit den Koordinatenebenen $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, sowie mit den Ebenen $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = 1$. Geben Sie jeweils eine euklidische Normalform der Schnittquadrik an und bestimmen Sie deren Gestalt. Skizzieren Sie die Schnitte.

(b) Sei $b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^\intercal$ und $b_2 := (0, 0, 1)^\intercal$. Sei $E := \mathrm{L}(b_1\,, b_2)$.
Beschreiben Sie die Quadrik $\mathcal{Q} \cap E$ bezüglich des Koordinatensystems $(0\,;\, b_1\,, b_2)$ in E. Skizzieren Sie $\mathcal{Q} \cap E$.
Hinweis: Einsetzen von $x = s_1 b_1 + s_2 b_2$ in die Gleichung von $\mathcal{Q}$, wobei $(s_1\,, s_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $\mathcal{Q}$ und geben Sie an, welche Gestalt sie hat. Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese euklidische Normalform hat.

(d) Skizzieren Sie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem (per Hand oder mit Hilfe geeigneter Software). Heben Sie in Ihrer Skizze außerdem

- die Schnitte aus (a) und (b),
- das Koordinatensystem $\mathbb{F}$

hervor.

Präsenzübungen

Aufgabe P 43. *Monotonie und Beschränktheit von Folgen*

Gegeben seien die reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_n := \frac{n^2+3n-4}{n^2+8n+16} \qquad b_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad c_n := \frac{1}{2}n^2 - 20n + 1$$

definiert sind.
Untersuchen Sie diese Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.
Falls eine obere Schranke existiert, so geben Sie zwei verschiedene obere Schranken an.
Falls eine untere Schranke existiert, so geben Sie zwei verschiedene untere Schranken an.

Aufgabe P 44. *Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A\, x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 4\,.$$

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$. Welche Gestalt hat $\mathcal{Q}$? Welchen Typ hat $\mathcal{Q}$?

(b) Fertigen Sie eine Skizze an, in der die Quadrik $\mathcal{Q}$, das Standardkoordinatensystem sowie ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ euklidische Normalform hat, zu sehen sind.

Aufgabe P 45. *Eigenschaften von Folgen*

Entscheiden Sie jeweils, ob eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den angegebenen Eigenschaften existiert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend und beschränkt.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und monoton fallend.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend und monoton fallend.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierend und beschränkt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 39. *Quadriken*

(a) Gegeben seien die beiden Ellipsen

$$E = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 = 8 \right\},$$
$$E' = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 2)^2 = 4 \right\}.$$

Skizzieren Sie die beiden Ellipsen in das Ausgangskoordinatensystem.
Geben Sie eine eigentliche Isometrie an, die E auf E' abbildet. Geben Sie eine uneigentliche Isometrie an, die E' auf E abbildet. Geben Sie eine affine Abbildung an, die E auf den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung abbildet.

(b) Sei $\mathcal{Q} : x_1^2 + 4x_2 + 2x_3 = 0$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$. Sei

$$\mathbb{H} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) .$$

Geben Sie die Gleichung von $\mathcal{Q}$ in Koordinaten bezüglich $\mathbb{H}$ an.
Welche Gestalt hat $\mathcal{Q}$?

Aufgabe H 40. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$f_1 := 0\,, \quad f_2 := 1\,, \quad f_{n+1} := f_n + 6f_{n-1} \text{ für } n \geqq 2 \,.$$

Außerdem sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geqq 1$ die Gleichungen

$$A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

gelten.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt. Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n anzugeben.

(d) Untersuchen Sie die Folge $(1/f_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Aufgabe H 41. *Eigenschaften von Folgen*

Entscheiden Sie jeweils, ob eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den angegebenen Eigenschaften existiert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und nicht beschränkt.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und nicht streng monoton steigend.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und nicht nach unten beschränkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierend und nicht beschränkt.

Präsenzübungen

Aufgabe P 46. *Konvergenz von Folgen*

Untersuchen Sie die jeweilige Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Geben Sie den Grenzwert an, falls dieser in $\mathbb{R}$ oder in $\{-\infty, +\infty\}$ existiert.

(a) $a_n = \sqrt{n+1}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(c) $a_n = \dfrac{2n-1}{(n+1)^2} \sin\Big(\dfrac{n\pi}{2}\Big)$

(d) $a_n = \sin(\frac{1}{n^2})$
Hinweis: Es ist $\sin(x) \leqq x$ für $x \geqq 0$.

Aufgabe P 47. *Häufungspunkte*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Folge. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie den Limes superior $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und den Limes inferior $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent? Bestimmen Sie ferner das Supremum $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(a) $a_n = 5(-1)^n$ **(b)** $a_n = -2n$ **(c)** $a_n = \sin\big(\frac{n\pi}{2}\big)$

Aufgabe P 48. *Produktfolge*

Finden Sie jeweils Folgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und die Produktfolge $\big(a_nb_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen einen reellen Grenzwert konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Hausübungen (Abgabe in der ersten Gruppenübung im Sommersemester 2014):

Aufgabe H 42. *Konvergenz von Folgen*

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Folge. Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ oder in $\{-\infty,+\infty\}$ existiert.

(a) $a_n = \dfrac{3n^4-1}{1-3n^3}$ **(b)** $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3\sqrt{n}}$ **(c)** $a_n = \sqrt{n^2+\dfrac{n}{3}} - n$

(d) $a_n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[n]{2}\right)$ **(e)** $a_n = \left(\dfrac{2+2(-1)^n}{5}\right)^n$

Hinweis: Es darf $\lim_{n\to\infty}\sqrt{b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} b_n}$ verwendet werden, sofern $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen ist.

(2) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ gegeben. Bestimmen Sie den Grenzwert a dieser Folge. Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε derart, dass für alle $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe H 43. *Geometrische Reihen*

Berechnen Sie jeweils den Wert der Reihe, falls sie konvergiert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{5^k}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^k$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2^{3-k}$

Aufgabe H 44. *Häufungspunkte*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Folge. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent? Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, so bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{n}}{n!}$ **(b)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ **(c)** $a_n = n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ **(d)** $a_n = -n^{((-1)^n)}$

Aufgabe H 45. *Rekursive Definition von Folgen, Heron-Verfahren (ca. 1750 v. Chr.)*

Zu $c \in \mathbb{R}^+$ soll eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$ konstruiert werden. Wir wählen einen beliebigen Startwert $a_1 \in \mathbb{R}^+$. Wir setzen rekursiv $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeichnen Sie für $c = 2$ und $a_1 = 1$ die Werte $\sqrt{c}$, a_1, $\frac{c}{a_1}$, a_2, $\frac{c}{a_2}$ und a_3 auf dem Zahlenstrahl ein.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegen a_{n+1}, $\frac{c}{a_{n+1}}$ und $\sqrt{c}$ zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$.

(c) Zeigen Sie die Ungleichung $|a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2}|a_n - \frac{c}{a_n}|$ und leiten Sie daraus und aus (b) die Ungleichungen $|a_{n+1} - \sqrt{c}| \leqq |a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2^n}|a_1 - \frac{c}{a_1}|$ ab. Folgern Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

(d) Wenden Sie (c) an, um für $c = 2$ und $a_1 = 1$ ein n so zu bestimmen, dass a_n und $\sqrt{2}$ in den ersten 6 Nachkommastellen übereinstimmen.