R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

(a) Berechnen Sie $\frac{49}{8} \cdot \frac{4}{7/5}$, $3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{7}{6}}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ und $(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2})^3$.

(b) Berechnen Sie $\binom{21}{3}$ und $\binom{7}{3} - \frac{7!}{4!}$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq -5$ und $y^2 - y \neq 0$. Vereinfachen Sie:

$$\frac{(x+5)^2 - (x+1)(x+5)}{x+5} \cdot \frac{y(y-1) + y^2(2y^2 - 3y + 1)}{y^2 - y}.$$

Aufgabe P 2. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke beschreiben das Gleiche?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+3} a_{2k-5}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

(d) $\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1-(-1)^k}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) a_k$.

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion: Teleskopsummen*

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

(a) $\sum_{k=0}^{m} (a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) $\sum_{k=1}^{m} k a^{k-1} = \frac{1-(1+m)a^m + m a^{m+1}}{(1-a)^2}$ für alle $a > 0$, $a \neq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe P 4. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqq 2 \text{ gilt } \sum_{k=0}^{n} 2^n \binom{n}{k} = 4^n.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 24.10. – 30.10.) auf folgender Webseite (dieser Link wechselt jede Woche!)

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse ($<$st$******$@stud.uni-stuttgart.de$>$) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den ILIAS-Gruppen, um 24:00 Uhr.
Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$.

(b) $\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^{2}}}$.

(c) $\dfrac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}$ für $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ mit $x+y\neq 0,\ x-y\neq 0,\ |a+b|\neq 1,\ a+b\neq x-y$.

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Berechnen Sie

(a) $\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right)$.

(b) $\sum_{k=2}^{10}2^k$.

(c) $\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Teleskopsummenformel aus P3 (a).

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqq 2$ die Ungleichung $(n+1)^n\geqq 2^n n!$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit 1.3.5 aus der Vorlesung, dass $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqq 2$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Gilt die Ungleichung aus (a) für alle $n\in\mathbb{N}_0$?

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{i=1}^{n}A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen ausmultipliziert.

(a) Seien $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in\mathbb{R}$ so, dass $a_n\geqq 0$.
Zeigen Sie mit Induktion, dass $1+\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ gilt.

(b) Seien $b_k\in\mathbb{N}_0$ für $k\in\mathbb{N}$ sowie $P_n:=\prod_{k=1}^{n}(2b_k+1)$.

Zeigen Sie induktiv, dass zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $\tilde{b}=\tilde{b}(n)\in\mathbb{N}_0$ existiert mit $P_n=2\tilde{b}+1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sin(3x)+1$

(b) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 1-(x-1)^2$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^3 + x + 6 = 2x^2 + 6x$.

(b) Zeigen Sie, dass $x^2 + 10x + 27$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe P 6. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+2x-3} \geqq 0$.

Hinweis: Faktorisieren Sie den Nenner.

(b) $x^3 + 5 < x^2 + 5x < 0$.

(c) $x - 1 < |x-1||x+2|$.

Aufgabe P 7. *Mengen*

Seien

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\}, \\ M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqq 2\}, \\ M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y < -1\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen: M_1, M_2, M_3, $M_1 \setminus M_2$ und $M_1 \cap M_3$.

Aufgabe P 8. *Ungleichungen*

Seien $x_1, x_2, x_3 \geqq 0$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe von **1.5.11**, dass

$$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \leqq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}$$

gilt.

(b) Begründen Sie mit Hilfe von **1.5.12**, dass

$$8\sqrt{x_1 x_2 x_3} \leqq (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$$

gilt.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 31.10. – 06.11.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 6. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2-1)(x+3) = 2x^2+4x-6$.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$.

(c) Zeigen Sie, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)}$.

(b) $|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3|$.

(c) $|-3\cos(2x+10)|-|-5| > 0$.

Aufgabe H 8. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y, \quad y \geqq -1\}$

(b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y-x^2-1 \geqq 0\}$.

(c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+1)^2 \leqq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$.

(d) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1, \quad x > y^2\}$.

Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

(a) Für welche $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt $\dfrac{x}{y} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} \geqq 3$?

Hinweis: Ungleichung **1.5.12**.

(b) Sei $a > 1$. Folgern Sie aus **1.5.10**, dass $\sqrt[n]{a}-1 \leqq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Sei $x_1 = 2$ und definiere rekursiv $2x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$.
Zeigen Sie induktiv mit Hilfe von **1.5.12**, $x_n^2 \geqq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion dass

$$3\sum_{k=0}^{n-1} 5^{n-1-k}2^k = 5^n - 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Abbildungen*

(a) Es seien A die Menge der Teilnehmer einer Prüfung in Höherer Mathematik und B die Menge der möglichen Noten $\{1.0, 1.3, 1.7, ..., 5.0\}$. Weiterhin sei $g\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seine Note zuordnet. Beschreiben Sie Fälle, in denen g injektiv bzw. surjektiv ist.

(b) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe, die zwischen 2000 und 2004 geboren sind. Sei $B := \{2000, 2001, 2002, 2003, 2004\}$.

Sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer sein Geburtsjahr zuordnet. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

(c) Sei $h\colon (-1, +\infty) \to (0, +\infty)\colon x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Skizzieren Sie den Graphen von h. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Ist h bijektiv?

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - 1$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

Aufgabe P 10. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

(a) $z = \dfrac{2}{3 + 2\mathrm{i}}$,

(b) $z = 5 - \mathrm{i} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}\right)$,

(c) $z = |3 - 4\mathrm{i}|\,\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 2$,

(d) $\overline{w^2 - 2z}$ mit $w = 2\mathrm{i}$ und $z = \frac{1}{3} + 3\mathrm{i}$,

(e) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{5 + 2\mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}}\right) + \mathrm{Re}(\overline{1 + 2\mathrm{i}})\,\mathrm{i}$.

Aufgabe P 11. *Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen*

(a) Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^2.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung $z^2 = 3 + 4\mathrm{i}$.

Aufgabe P 12. *Mengen in $\mathbb{C}$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (z \neq 0) \ \wedge \ (\frac{\pi}{3} \leqq \arg(z) \leqq \frac{\pi}{2})\right\}$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1| \leqq 1\right\}$

(c) $D = B \smallsetminus A$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 7.11. – 13.11.) auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 11. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos(5x)\,,\, 2\sin(x))$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto 2x^2 + 1$

(c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\colon\ z \mapsto z(1+i) + \overline{z}(1-i)$

(d) $f_4\colon \mathbb{C} \setminus \{-2\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}\colon z \mapsto \frac{z}{z+2}$

Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil, Betrag und Kehrwert der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 = \dfrac{2-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$

(c) $z_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8$

(d) $z_4 = \dfrac{\left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|^2 - \operatorname{Re}(-2+5\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}}{\operatorname{Im}(5+2\mathrm{i})}$

Aufgabe H 13. *Gleichungen im Komplexen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\frac{1}{2}z^2 + (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0$?

Hinweis: Verwenden Sie quadratische Ergänzung!

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z^5 + z^3 - 30z = 0$?

Aufgabe H 14. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-2-\mathrm{i}| \geqq 1 \right\}$

(b) $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3\operatorname{Re}(z)^2 = 2\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z^2) \right\}$

(c) $C := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) \neq 0 \ \wedge\ 1 < \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \leqq 2 \right\}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha+1}$.

(b) $\frac{\alpha^3+4\alpha^2-49\alpha-196}{\alpha^2-49} - 3(\alpha+4)$.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Polarkoordinaten*

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{und} \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die komplexen Zahlenebene ein.

(a) z_1 **(c)** z_1^2 **(e)** $\frac{1}{\bar{z}_2}$

(b) z_2 **(d)** $\frac{1}{z_1}$ **(f)** $z_1^{10} z_2^5$

Aufgabe P 14. *Polarkoordinaten und komplexe Wurzeln*

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie alle n-ten komplexen Wurzeln von z und zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem:

(a) $z = 8\mathrm{i},\ n = 3$ **(b)** $z = 8,\ n = 6$ **(c)** $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i},\ n = 4$.

Aufgabe P 15. *Nullstellen von Polynomen*

(a) Finden Sie ein quadratisches Polynom mit den Nullstellen $4\mathrm{i} - 2$ und $3 - 2\mathrm{i}$.

(b) Finden Sie alle (komplexen) Nullstellen der folgenden Polynome.

(i) $p(X) = 4X^3 + 4X^2 + 3X + 3$

(ii) $q(X) = X^4 - (5 + 2\mathrm{i})X^3 + (8 + 7\mathrm{i})X^2 - (5 + 8\mathrm{i})X + 1 + 3\mathrm{i}$

Hinweis: Sind für ein Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ mit komplexen Koeffizienten sämtliche Real- und Imaginärteile der Koeffizienten ganzzahlig – d. h. $\mathrm{Re}(a_k), \mathrm{Im}(a_k) \in \mathbb{Z}$ für alle k – so folgt aus 1.8.10, dass jede ganzzahlige Nullstelle sowohl $\mathrm{Re}(a_0)$ als auch $\mathrm{Im}(a_0)$ teilt.

Aufgabe P 16. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke beziehungsweise beides.

(a) $\left(n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{1}{n}\cos(n\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.11. – 20.11.)
auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 16. *Polarkoordinaten*

Es sei die komplexe Zahl $z := \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt[4]{8}}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\arg(z)$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(i) Ist n durch 4 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ (d.h. der Imaginärteil von z^n verschwindet).

(ii) Ist n durch 8 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ und $z^n > 0$.

Aufgabe H 17. *Komplexe Wurzeln und Nullstellen*

Finden Sie alle komplexen Lösungen, w, der folgenden Gleichungen.

(a) $w^6 = -27\mathrm{i}$

(b) $w^3 + 32\sqrt{2}\mathrm{i} = 32\sqrt{2}$

(c) $w^2 - 2\mathrm{i}\sin(\vartheta)w - 1 = 0$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei.
Für welche ϑ ist $w \in \mathbb{R}$? Welche Werte kann w in diesem Fall annehmen?

Hinweis: Zur Berechnung komplexer Nullstellen dürfen Sie unser Zusatzmaterial verwenden.

Aufgabe H 18. *Faktorisierung reeller Polynome, Polynomdivision*

(a) Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^5 - 5X^4 + 15X^2 + 5X - 4$.
Schreiben Sie p als Produkt von Linearfaktoren.

(b) Zu reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Polynomfunktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f_{a,b}(X) = 3X^6 + 24X^4 + aX^3 - 33X^2 + b,$$

(i) Für die Polynome $f_{a,b}(X)$ und $g(X) = X^2 + 9$ bestimmen Sie die Polynome $p_{a,b}(X)$ und $r_{a,b}(X)$ mit $f_{a,b}(X) = p_{a,b}(X)g(X) + r_{a,b}(X)$, wobei $r_{a,b}(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

(ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das in (i) bestimmte Polynom $r_{a,b}(X) = 0$?

(iii) Schreiben Sie für die in (ii) gefundenen Werte von a und b das Polynom $f_{a,b}$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe H 19. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

(a) $\left(1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{3^n}{(n-1)!}\right)_{n\geqq 3}$ **(c)** $\left(\frac{n^2+2}{2^n+(-2)^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Mengen*

Skizzieren Sie die Menge

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<9\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+(y+1)^2\geqq\frac{1}{4}\right\}.$$

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere beziehungsweise untere Schranke an.

(a) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 18. *Häufungspunkte I*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $(5\cdot(1-(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left((-1)^n\frac{n^2(n+1)}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left((-1)^n\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 19. *Häufungspunkte II*

Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils alle Häufungspunkte sowie $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(b) $a_n = n^2(1-(-1)^n)$

(c) $a_n = \begin{cases} 1+(-1)^{n-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2-(-1)^{n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Aufgabe P 20. *Konvergenz*

Beweisen Sie, dass die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren. Geben Sie dazu jeweils für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.

(a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$;

(b) $a_n = \begin{cases} \frac{2n}{n^2+1} & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$.

Geben Sie $N(0.1)$ und $N(0.01)$ jeweils explizit an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.11. – 27.11.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 21. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $\left(n\left(\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\dfrac{2n+1}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 22. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder gegebenenfalls eine bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{11(n+1)}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2\mathrm{e}^n-3\mathrm{e}^{-n}}{3\mathrm{e}^n+4\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 23. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-18}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

(a) $a_n = 1000 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 999\left(\frac{1}{1000}\right)^k$ **(b)** $a_n = \dfrac{n^3-64}{27n^3}$

Hinweis: Teleskopsummen!

Aufgabe H 24. *Konvergenz*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{100n^3-25}{20n^2-10\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n\sqrt[n]{\dfrac{2n}{3^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = n^{\frac{1-n^2}{n}}\left(n^n-(n+1)^n\right)$

(d) $a_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} + \dfrac{2n+1}{\pi n}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Teleskopsummen*

(a) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{(k+2)^2}-\frac{1}{(k+3)^2}\right)$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right)$.

Wir erwarten nicht nur das Ergebnis sondern auch einen nachvollziehbaren Rechenweg, der die Teleskopsummenformel mit einbezieht.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

6. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 21. *Sandwichsatz*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\, 3^n}$

Aufgabe P 22. *Konvergenz mit Bolzano-Weierstraß*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Entscheiden Sie jeweils, ob die Folgen einen Häufungspunkt oder einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzen.

(a) $a_n = \frac{n+1}{3n}$

(b) $b_n = \frac{1}{n}\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})$

(c) $c_n = \frac{n!}{4^n}$

(d) d_n mit $d_1 = 10$ und $d_{n+1} = \frac{2}{3}d_n + 3$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $d_n \geqq 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe P 23. *Konvergenz mit Cauchy*

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\cos(k))^k}{3^k}\,.$$

Aufgabe P 24. *Partialsummen und Teleskopreihen*

Berechnen Sie jeweils die n-te Partialsumme S_n der nachstehenden Reihen für $n \in \{2,3\}$. Untersuchen Sie jeweils außerdem, ob die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3k^2 + 3k + 1$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4k+3}$

Hinweis zu (b): Bestimmen Sie zunächst $A, B \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{k^2+4k+3} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+3}$ gilt.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 28.11. – 04.12.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 26. *Sandwichsatz*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(a) $\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}^n+\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\left(1-\dfrac{1}{n^2-4n-5.1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\dfrac{n^2+5\sin(n)}{3n^2-4\cos(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3(n+1)^2+4k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis zu (b): Nutzen Sie für die untere Abschätzung Bernoulli.

Aufgabe H 27. *Teleskopreihen*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

Hinweis: Schreiben Sie die Folge der Partialsummen als Folge (ggf. mehrererer) Teleskopsummen.

Aufgabe H 28. *Geometrische Reihe*

Sei $x\in(1,\infty)$. Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{k+1}{4}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{3x-2}\right)^k$

Aufgabe H 29. *Folgen komplexer Zahlen*

Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z\in\mathbb{C}$ genau dann, wenn sowohl $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Re}z_n=\operatorname{Re}z$ als auch $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Im}z_n=\operatorname{Im}z$ gilt.Gibt es kein solches $z\in\mathbb{C}$, dann nennt man die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Sie können dabei ohne Beweis nutzen, dass 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.8.1 auch für komplexe Zahlenfolgen gelten.

(a) $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n$

(b) $b_n=\dfrac{n\mathrm{i}+2n^2}{(7n^2)\mathrm{i}-3}$

(c) $c_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^k$

(d) $d_n=\min\left\{\operatorname{Im}w\;\middle|\;w^n=3+3\sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$

Hinweis zu (d): Begründen Sie zunächst, dass für jedes n und jedes $\alpha_0\in\left[0,\frac{2\pi}{n}\right)$ ein $j\in\{0,1,2,...n-1\}$ mit $\alpha_0+j\frac{2\pi}{n}\in\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{2\pi}{n},\frac{3}{2}\pi+\frac{2\pi}{n}\right)$ existiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Komplexe Zahlen, Polarkoordinaten*

Ordnen Sie die Zahlen $\{6-5\mathrm{i},\ -8+5\mathrm{i},\ 3.1+4\mathrm{i}$ und $-8-3\mathrm{i}\}$ jeweils ihren näherungsweise angegebenen Argumenten und Beträgen zu:

$$\arg(z)\in\{0.290\pi\,,\ 0.822\pi\,,\ 1.114\pi\,,\ 1.779\pi\}$$
$$|z|\in\{5.06\,,\ 7.81\,,8.54\,,\ 9.43\}$$

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

7. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 25. *Untervektorräume*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Die Menge $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x-y+5z \geqq 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Die Gerade $g = P+\mathbb{R}v$ mit $P,v\in\mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Menge $\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \;\middle|\; cz_1+dz_2=0,\ c,d\in\mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe P 26. *Skalarprodukt*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $v,w\in V$.

(a) Berechnen Sie $\langle \alpha v+w \,|\, v+\beta w\rangle$ für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, falls $\langle v\,|\,v\rangle = 4$, $\langle v\,|\,w\rangle = 1$ und $\langle w\,|\,w\rangle = 3$ gelten.

(b) Berechnen Sie $|v-w|^2$, falls $\langle v\,|\,w\rangle = 2$ und $|v+w|^2 = 10$ gelten.

(c) Sei nun $V=\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie eine obere Schranke für $|v+w|^2$, falls $\langle v\,|\,v\rangle = 9$ und $\langle w\,|\,w\rangle = 4$ gelten.

Aufgabe P 27. *Geraden und Ebenen*

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$:

$$A=(1,-1,1)\,,\ B=(2,0,1)\,,\ C=(0,-1,2)\,.$$

(a) Geben Sie die Ebene, die A, B und C enthält, in Parameterdarstellung an.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt zwischen der in (b) gefundenen Ebene und der Geraden $g=P+\gamma v$, $\gamma\in\mathbb{R}$ mit $P=(-3,3,0)$ und $v=(1,-1,1)$.

Aufgabe P 28. *Lineare Unabhängigkeit und Basen*

Gegeben seien $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}8\\-1\\6\\0\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.$

Entscheiden Sie:

(a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(b) Sind v_1, $-v_1$ linear unabhängig? Sind v_1, v_2, v_1+v_3 linear unabhängig?

(c) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.12. – 11.12.)
auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 31. *Untervektorräume*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $U_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x < 2, y \leqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) $U_2 := \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

(c) $U_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, z\rangle = 0\right\}$ für festen Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(d) $U_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 0\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt*

Sei $\operatorname{Pol}_4\mathbb{R} := \left\{\sum_{j=0}^{4} \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $\operatorname{Pol}_4\mathbb{R}$:

$\langle p \,|\, q\rangle = \displaystyle\int_0^\beta p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $p, q \in \operatorname{Pol}_4\mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

Gegeben seien die folgende Polynome: $p_1(x) = x^2 - x - 1, \quad p_2(x) = 2x - 1$.

(a) Bestimmen Sie $|p_1|^2$, $|p_2|^2$ und $\langle p_1 \,|\, p_2\rangle$.

(b) Für welche β ist $\langle p_1 \,|\, p_2\rangle = 0$?

(c) Sei nun $\beta = 1$. Bestimmen Sie $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_0 \neq 0$ so, dass das Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1 x + c_0$ die Gleichung $|q - p_2|^2 = |q|^2 + |p_2|^2$ erfüllt.

Aufgabe H 33. *Ebenen und Geraden*

(a) Gegeben seien $g = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}, \quad h_\gamma = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\\gamma\\1\end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$

- **(i)** An welchem Punkt schneiden sich die Geraden? Bei welchem γ ist dies der Fall?
- **(ii)** Bestimmen Sie die Ebene , die die Geraden g und h_γ enthält.

(b) Gegeben seien die Punkte $A = (5,3,1)$, $B = (7,10,2)$, $C = (9,6,4)$. Berechnen Sie

- **(i)** den Umfang des Dreiecks ABC.
- **(ii)** den Kosinus jedes der Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe H 34. *Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*

(a) Sei $w_1 = (3,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (-10,3,6) \in \mathbb{R}^3$.

- **(i)** Sind w_1 und w_2 linear unabhängig?
- **(ii)** Zeigen Sie, dass $u = (-8,2,20) \in L(w_1,w_2)$ gilt, aber $v = (24,-8,3) \in L(w_1,w_2)$ gilt nicht.

(b) Gegeben seien $v_1 = (1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$, $v_2 = (1+3\mathrm{i}, 4+2\mathrm{i}, 5\mathrm{i})$, $v_3 = (2-\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 3) \in \mathbb{C}^3$. Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet?

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Summen*

Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\displaystyle\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2}\frac{n!\cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right)$.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Hülle, Erzeugendensystem und Basen*

Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie jeweils: Sind die Vektoren

(a) v_1, v_2, v_3 **(b)** v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 **(c)** v_1, v_5

- linear unabhängig?
- ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Welche Dimension hat die Lineare Hülle L?
- eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe P 30. *Orthonormalbasen*

(a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die ein Vielfaches des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ enthält.

(b) Handelt es sich bei der berechneten ONB um ein Links- oder Rechtssystem?

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die ein Vielfaches von $w = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ enthält.

Aufgabe P 31. *Vektorprodukt*

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $a \times b$, $(a + b) \times c$ und $\langle a + b \,|\, a \times b \rangle$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Aufgabe P 32. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB, $(C+D)A$, CD, DC, D^2, $D^{\mathsf{T}}D$, DD^{T}, $C^2 - D^2$ und $(C+D)(C-D)$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 12.12. – 18.12.) auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 36. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Polynome p mit Grad kleiner oder gleich 2.

(a) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol} \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind.

(c) Stellen Sie das Polynom $q(X) = X$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Aufgabe H 37. *Orthonormalsysteme*

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: u_1, u_2 ist ein Orthonormalsystem.

(b) Konstruieren Sie den Vektor $u_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $-u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

(c) Sei $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Hesse Normalform der Ebene, welche die Punkte P, Q sowie die Gerade $\left\{ P + \lambda u_3 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ enthält.

Aufgabe H 38. *Vektorprodukt*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $u, v, w, \xi \in \mathbb{R}^3$ korrekt sind.

(a) $\langle v \,|\, w \rangle \, u - \langle v \,|\, u \rangle \, w = v \times (u \times w)$

(b) $-\langle v \,|\, w \times w \rangle = \langle v \times u \,|\, w \rangle - \langle v \,|\, u \times w \rangle$

(c) $v \times (u \times w) = u \times (w \times v)$

(d) $\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle + \langle v \,|\, v \times \xi \rangle$

Aufgabe H 39. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Bestimmen Sie B^8.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Geometrische Reihe*

Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in der Mitte eines offenen Feldes. Sie gehen 16 Meter nach vorne, drehen sich nach rechts und gehen 8 Meter, drehen sich wieder nach rechts und gehen weitere 4 Meter, und so weiter. Dies geht unendlich weiter. Wenn Sie schließlich unendlich viele Wendungen gemacht haben, wie weit sind Sie dann vom ursprünglichen Ausgangspunkt entfernt?

Hinweis: Betrachten Sie die Wege in einem kartesischen Koordinatensystem und trennen Sie zunächst nach horizontaler und vertikaler Laufrichtung.

Präsenzübungen

Aufgabe P 33. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen $M_1 := \{(25, -10, 4, -3)\}$, $M_2 := \mathbb{R}\,(-1, 1, 1, -1)^\intercal$, $M_3 := (-1, 0, 2, 0)^\intercal + \mathbb{R}\,(0, 1, 0, 1)^\intercal$ und $M_4 := \{(-3+t, 4-2t, t, 0), t \in \mathbb{R}\}$ in der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -1 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie ferner die Lösungsmenge und entscheiden Sie, ob diese ein affiner Teilraum oder sogar ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe P 34. *Lineare Abbildungen*

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Abbildungen linear?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto a|x|^b,\ b > 0$

(c) $f_3 : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2,\ \varphi \mapsto (\varphi(ab), \varphi(a-b))^\intercal$

Aufgabe P 35. *Gauß-Algorithmus*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & \alpha & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{ x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_\alpha x = 0 \right\}$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe P 36. *Affine Unterräume*

Analog zu $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir eine Teilmenge M eines Vektorraumes V als affinen Unterraum, wenn es einen Untervektorraum $U \subsetneq V$ und ein $v \in V$ mit $M = v + U$ gibt.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Satz 1.8.7, dass die Teilmenge

$$M := \{p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \mid p(a) = b\} \subseteq \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$$

ein affiner Untervektorraum von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie seine affine Dimension.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.12.24 – 08.01.25) auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 41. *Neujahrspartygerichte*

Für eine Neujahrsparty möchten Sie verschiedene Gerichte zubereiten, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen:

- Gericht 1 (35 Port.): 1 kg Hähnchen, 120 g Mehl, 150 g Butter
- Gericht 2 (25 Port.): 2 kg Rindfleisch, 250 g Mehl, 125 g Butter, 125 g frische Kräuter
- Gericht 3 (30 Port.): 2 kg Hähnchen, 100 g Mehl, 100 g Butter

Ihre Vorräte zum 1. Januar 2025 sind 10 kg Hähnchen, 250 g frische Kräuter, 1250 g Butter, 1350 g Mehl, sowie reichlich von allen übrigen Zutaten. Wieviele ganzzahlige Portionen jedes Gerichts können Sie damit maximal zubereiten, wenn Sie Ihre gesamten Hähnchen- und Mehlvorräte aufbrauchen wollen?

Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Hähnchen und das Mehl ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Eliminieren Sie anschließend alle nicht realisierbaren Lösungen.

Aufgabe H 42. *Gauß -Algorithmus I*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 43. *Gauß -Algorithmus II*

Gibt es $\beta \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \beta+1 & \beta+2 & 3+2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) genau eine Lösung **(b)** keine Lösung **(c)** mehrere Lösungen

besitzt? Geben Sie bei positiver Antwort auf (a) oder (c) ferner die Lösungsmenge(n) an.

Aufgabe H 44. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die Basis $B : \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sowie die Standardbasis $E : \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), \ f\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{smallmatrix}\right), \ f\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$$

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von E unter der Abbildung f.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrizen ${}_Ef_E$ und ${}_Ef_B$ an.

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Skalarprodukt*

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach:

(a) $\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2$.

(b) Gilt $\langle u \,|\, u \rangle = \langle v \,|\, v \rangle$, so sind $u+v$ orthogonal zu $u-v$.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Linearität, Matrixbeschreibung*

Entscheiden Sie jeweils, ob φ eine lineare Abbildung ist. Geben Sie in in diesem Fall die beschreibende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis an.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ y+2z \\ 3x \end{pmatrix}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x-2y \end{pmatrix}$

Aufgabe P 38. *Matrixbeschreibung Polynome*

Es sei $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leqq 3$.
Wir definieren $\mathrm{e}_k := X^k$ und $b_k := \sum_{j=0}^{k} X^j$, für $0 \leqq k \leqq 3$. Dann sind $E\colon \mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ und $B\colon b_0, b_1, b_2, b_3$ Basen von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Koordinatentupel von b_k bezüglich E für $k = 0, 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_E$ sowie ${}_B\alpha_E$ für

$$\alpha\colon\ \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}\colon p \mapsto \alpha(p) = p'\,.$$

(c) Es sei α^2 die Komposition $\alpha \circ \alpha\colon\ \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}\colon q \mapsto (\alpha^2)(q) := \alpha(\alpha(q))$.
Bestimmen Sie sind die Koordinatentupel von $\alpha^2(\mathrm{e}_3)$ und $\alpha^2(b_3)$ bezüglich B.

Aufgabe P 39. *Rang, Invertieren*

Berechnen Sie jeweils den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie für die invertierbaren Matrizen jeweils die Inverse.

Aufgabe P 40. *Wahr oder falsch?*

Seien A und B zwei invertierbare reellwertige Matrizen. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Sätze wahr oder im Allgemeinen falsch sind:

(a) $A^T + B$ ist invertierbar.

(b) B^{-1} ist invertierbar.

(c) $A + AB$ ist invertierbar.

(d) $(1+\lambda^2)A$ ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.01.-15.01.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 46. *Linearität*

Entscheiden Sie jeweils, welche der nachfolgenden Abbildungen $\mathbb{K}$-linear sind.

(a) $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \mathrm{i}\bar{z}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(c) $\gamma : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(0) + 2p(1)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\varphi : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) - 2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*

Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie ferner eine Links- oder Rechtsinverse der Matrizen, falls diese existieren.

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha - 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha + 6 & -\alpha + 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ das Inverse von A.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon x \mapsto Ax$.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 2x-y \end{pmatrix}$ sowie die Basen $B\colon b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), b_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^2$ und $C\colon c_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$.

Ferner seien E_2 und E_3 die jeweiligen Standardbasen.

Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien $v := \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α.

Wie muss α gewählt werden, damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt?

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

11. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Determinanten*
Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 12 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \mathit{Neo} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(\mathit{Neo})$.
Bestimmen Sie auch die Determinanten von A^2, von $BB^\intercal$ und von $3\mathit{Neo}$.

Aufgabe P 42. *Determinanten*
Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Warum ist A invertierbar? Ist A orthogonal? Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}B$.

Aufgabe P 43. *Determinanten und Invertierbarkeit*
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1-t & 2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 44. *Determinanten*
Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ mit Matrizen A, B, C und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Des Weiteren sei D invertierbar.

(a) Berechnen Sie ML mit $L = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}$.

(b) Benutzen Sie die Determinante von ML zur Berechnung der Determinante von M.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.01.-22.01.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 51. *Determinante und Rang*

Wir betrachten die Abbildungen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & t \\ t & 4 & 4 & 4 \\ 4 & t & 4 & 4 \\ 4 & 4 & t & 4 \end{pmatrix}$,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A(x))$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N} : x \mapsto \operatorname{Rg}(A(x))$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von g.

Aufgabe H 52. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$, ohne den Gauß-Algorithmus zu verwenden.

Aufgabe H 53. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen V_1 des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen V_2 des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Sei α die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wie hängen die Determinante von A und die Änderung des orientierten Volumens eines Spats unter der Abbildung α zusammen?

Aufgabe H 54. *Determinanten*

Gegeben sei $x \in \mathbb{R}^+$ sowie die Matrix $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie:

(a) $\det(A_t)$, $\det({A_t}^6)$ und $\det(\sqrt{x}\,A_t)$.

(b) Alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Märchenzahlen*

Zeigen Sie induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren*

Bestimmen Sie nach dem Schmidtschen Verfahren Orthonormalbasen der folgenden Untervektorräume:

(a) $\mathrm{L}\left((1,2,3)^{\intercal},(4,5,6)^{\intercal},(7,8,9)^{\intercal}\right) \subsetneqq \mathbb{R}^3$.

(b) $\mathrm{L}\left((2,1,0,0)^{\intercal},(0,-1,4,2)^{\intercal},(1,0,2,-2)^{\intercal}\right) \subsetneqq \mathbb{R}^4$

Aufgabe P 46. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ sowie die Abbildungen $\alpha_1 \colon v \mapsto A_1 v$ und $\alpha_2 \colon v \mapsto A_2 v$.

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ den Drehwinkel.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ die Spiegelungsachse an.

Aufgabe P 47. *Koordinatenwechsel*

Die Punkte P, Q seien gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}P := (4,2)^{\intercal}$, ${}_{\mathbb{F}}Q := (4,2)^{\intercal}$ mit

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie:

(a) ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ **(b)** ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ **(c)** ${}_{\mathbb{F}}P$ **(d)** ${}_{\mathbb{E}}Q$.

Aufgabe P 48. *Spiegelung an einer Geraden*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, die durch die Gleichung

$$x_1 - 2x_2 + 2 = 0$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Geraden durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$ beschrieben wird. Handelt es sich um eine Isometrie? Ist diese eigentlich?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.01.-29.01.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 56. *Koordinatentransformation*

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$\begin{array}{llll} {}_{\mathbb{E}}P = (1\ \ 0\ \ -1)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}Q = (-3\ \ 4\ \ -2)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}R = (-7\ \ 2\ \ -1)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}S = (-5\ \ 4\ \ -1)^{\intercal} \\ {}_{\mathbb{G}}P = (0\ \ 0\ \ 0)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}Q = (1\ \ 0\ \ 1)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}R = (2\ \ 0\ \ 0)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}S = (1\ \ -1\ \ 1)^{\intercal}. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Aufgabe H 57. *Orthonormierung im Polynomraum*

Wir betrachten den Raum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich 2, versehen mit der Basis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ mit $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X - 1$ und $b_3(X) = X^2$. Ferner definieren wir ein Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_H$ und eine Norm $\| \cdot \|_H$ für stetig differenzierbare Funktionen $f, g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mittels

$$\langle f \mid g \rangle_H := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \|f\|_H := \sqrt{\langle f \mid f \rangle_H}$$

(a) Gewinnen Sie aus B eine Orthonormalbasis $U\colon\ u_1, u_2, u_3$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit: $\mathrm{L}\,(u_1) = \operatorname{Pol}_0 \mathbb{R}$ und $\mathrm{L}\,(u_1, u_2) = \operatorname{Pol}_1 \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ${}_{B}\mathrm{id}_{U}$ und ${}_{U}\mathrm{id}_{B}$ an.

Aufgabe H 58. *Spiegelung*

Eine Spiegelung an einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(b) Sei E die Ebene durch die Punkte $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \alpha(E) = \left\{\alpha(x) \,\middle|\, x \in E\right\}$ von E unter α in Hesse-Normalform.

(c) Seien $r_1 := (-2\ \ 1\ \ -2)^{\intercal}$ und $r_2 := (-2\ \ 4\ \ -2)^{\intercal}$. Für welche $j \in \{1, 2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Aufgabe H 59. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomen*

Schreiben Sie die folgenden Polynome als Produkte von Linearfaktoren:

(a) $p(X) = X^2 + \mathrm{i}\,X + 6$

(b) $q(X) = X^3 + X - 10$

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

13. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Koordinatentransformation*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien gegeben

$$ {}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$ und ${}_{\mathbb{G}}P$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

Aufgabe P 50. *Eigenwerte und Eigenräume*

Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und die Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} $$

Geben sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

Aufgabe P 51. *Eigenwerte, Spur und Determinante*

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. $$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte mit Hilfe der Spur und der Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Berechnen Sie die Spur und die Determinante mit Hilfe der Eigenwerte von B.

Aufgabe P 52. *symmetrische Matrizen*

Gegeben sei

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\mathsf{T} A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.01. – 05.02.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 61. *Eigenwerte*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix.

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von A^k für $k \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei A eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A ist.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe H 62. *Parameterabhängige Matrix*

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Aufgabe H 63. *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Überprüfen Sie, ob $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(c) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}(\alpha(x)) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor v so, dass ${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$ gilt.

Aufgabe H 64. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Gegeben sei die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ sowie A^4.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Summe*

Es seien $z_1 = \frac{\mathrm{i}}{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

Bestimmen Sie: **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_1^k$. **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{2 + z_2^2 + 2k} \right)$.

R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Definitheit*
Entscheiden Sie für jede der folgenden Matrizen, ob die dadurch gegebene quadratische Form positiv definit, negativ definit oder indefinit ist:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 54. *Hauptachsentransformation einer ebenen Quadrik*
In $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die folgende Quadrik gegeben:

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}\,x_1 + 6 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung für Q an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{H}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}$ und ${}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe P 55. *Matrixdarstellung von Quadriken*
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Beschreiben Sie die quadratische Form

$$q_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \mapsto 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\alpha x_1x_2 + 2x_2x_3$$

durch eine symmetrische Matrix A_α als $q_\alpha(x) = x^\intercal A_\alpha\, x$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist die quadratische Form q_α positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Aufgabe P 56. *Quadriken*
Gegeben sind die folgenden Quadriken

$$Q_1 := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \right\},$$

$$Q_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie für jede Quadrik die Matrixbeschreibung an.

(b) Entscheiden Sie, ob Q_i, $i = 1, 2$ eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.02. – 13.02.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 66. *Grobeinteilung von Quadriken*

Geben Sie zu den folgenden Quadriken jeweils die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie ihren Typ (kegelige Quadrik, Mittelpunktsquadrik oder parabolische Quadrik):

(a) $Q_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\right\}$,

(b) $Q_\beta := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\right\}$,

(c) $Q_\gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0\right\}$,

(d) $Q_\delta := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_3 + 1 = 0\right\}$.

Aufgabe H 67. *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A?

(d) Ist die quadratische Form $q_{A_3} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie (in den letzten beiden Fällen) einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

Aufgabe H 68. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_3 = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Aufgabe H 69. *Euklidische Normalform*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Hessesche Normalform*

Sei E die Ebene durch die Punkte $P_1 = (0,0,3)$, $P_2 = (0,3,0)$, $P_3 = (1,1,0)$.
Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E.