Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 1.

Es ist $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100k}$.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \{1, \ldots, 8\}$ die n-te Partialsumme S_n auf zwei Dezimalstellen genau.

(b) Ist die Reihe konvergent?

(c) Bestimmen Sie die Differenz zwischen der Partialsumme S_8 und dem Wert der Reihe.

Aufgabe P 2.

Skizzieren Sie den Graph der Funktionen f_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ und untersuchen Sie die Funktionen jeweils auf Stetigkeit.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^3 - 2x + 6$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{|\sin x|}\, x & \text{für } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

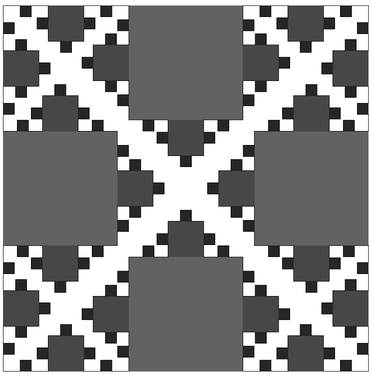
Aufgabe P 3. *Fliesenlegen*

Ein Quadrat Q mit Kantenlänge 1 soll durch kleinere Quadrate ausgefüllt werden und zwar nach folgendem Prinzip.

Es ist $q \in \mathbb{R}$ mit $q \geqq 0$ fixiert. Im n-ten Schritt wird dann in die Mitte einer jeden Kante ein Quadrat mit Kantenlänge q^n angelegt.

(a) Wie muss q gewählt werden, damit Überschneidungen der Quadrate vermieden werden?

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von q den von den Quadraten ausgelegten Flächeninhalt. Wie muss q gewählt werden, damit das Quadrat Q vollständig ausgefüllt wird?



Zusatz zum Knobeln: Wie verändert sich die Situation, wenn man nach folgendem Prinzip vorgeht?

Im n-ten Schritt wird in die Mitte einer Kante mit Kantenlänge a ein Quadrat mit Kantenlänge aq angelegt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\cos(\frac{1}{k})}$

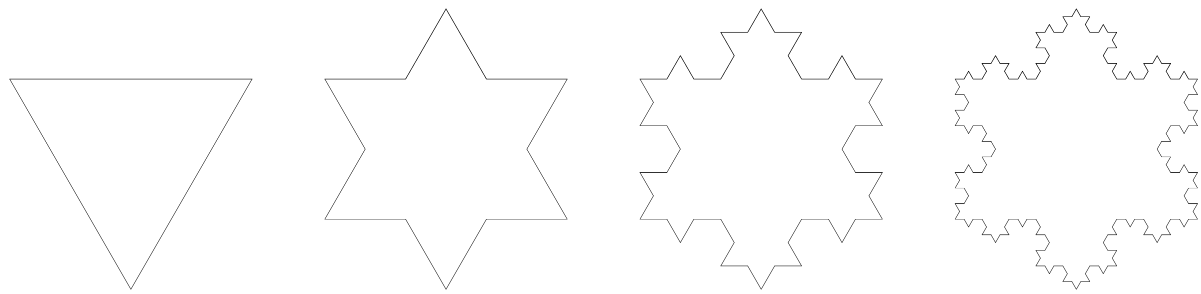
(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k-2)}$ Bestimmen Sie hier auch den Grenzwert.

Aufgabe H 2.

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion f in $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ stetig ist.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 42 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe H 3. *Koch-Schneeflocke*



Die Koch-Schneeflocke entsteht durch folgenden iterativen Prozess.

Ausgangsfigur ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. Im n-ten Iterationsschritt setzt man dann in die Mitte einer Kante mit Kantenlänge a ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ an.

(a) Bestimmen Sie den Umfang einer Koch-Schneeflocke.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer Koch-Schneeflocke.

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 4.
Bei einem Experiment werden Werte an Stellen $x \in [-1, 1]$ gemessen.

(a) Bei der ersten Messung wird für $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle $\frac{1}{n}$ der Wert $\frac{1}{2n}$ gemessen. Welchen Messwert erwarten Sie für die Messung an der Stelle 0?

(b) Bei der zweiten Messung wird für $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle $-\frac{1}{n}$ der Wert $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$ gemessen. Welchen Messwert erwarten Sie nun für die Messung an der Stelle 0?

(c) Eine theoretische Untersuchung zeigt, dass die bei dem Experiment zugrunde liegende Funktion die folgende Gestalt hat.

$$f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Wie stark weicht Ihre Erwartung bei **(a)** und **(b)** von dem theoretisch zu bestimmenden Wert ab?

(d) Eine weitere Messmethode ist mit dem Nachteil behaftet, dass die Stelle x_0, an der gemessen wird, nur bis auf die Abweichung d genau bestimmbar ist. Tasächlich wird also der Wert an einer Stelle $x \in U_d(x_0) = (x_0 - d, x_0 + d)$ gemessen. Sie wollen den Wert an der Stelle $x_0 = 0$ messen. Wie groß kann der Fehler sein (der Fehler ist die Abweichung zwischen Ihrem Messwert und dem durch f bestimmten Wert)?

Zusatz: In welchen Intervallen des Messbereichs können Sie mit einem vergleichsweise kleinen Fehler rechnen, in welchen Intervallen müssen sie einen vergleichsweise großen Fehler erwarten? Wie groß wird der Fehler maximal?

Versuchen Sie eine stetige Funktion $\tilde{f}$ zu finden, die das gemessene Phänomen möglichst gut beschreibt, bei der der maximale Fehler zwischen Messung und $\tilde{f}$ bei vorgegebener Toleranz d nur noch halb so groß ist im Vergleich zur Verwendung von f.

Aufgabe P 5.
Die Funktionen f und g sind definiert durch

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^3 + x^2}}.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen.

(b) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich.

(c) Wie sieht der Abschluss des Definitionsbereichs aus?

(d) Sind die Funktionen stetig?

(e) An welchen Punkten und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

Aufgabe P 6.
Es sind $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f + g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig.

(b) $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig.

Zusatz: Zusätzlich gelte $g(M) \subseteq M$. Zeigen Sie mit Hilfe konvergenter Folgen: Die Komposition $f \circ g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(g(x))$ ist stetig.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und Divergenz.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \tan \frac{1}{k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k}\right)^2$

Aufgabe H 5.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

(b) $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

(c) $\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x^2}$ und $\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(x \tan \frac{1}{x}\right)$

Aufgabe H 6.
Die Funktionen f und g sind definiert durch

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^3 - x}{|x|\,(x-1)}.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen.

(b) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich.

(c) Wie sieht der Abschluss des Definitionsbereichs aus?

(d) Sind die Funktionen stetig?

(e) An welchen Punkten und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 7.
Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{3}\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3x+1}{|3x+1|}(6x^2 - 23x + 20)$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 18x^3 - 9x^2 - 5x + 2$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode, falls möglich, jeweils eine Nullstelle im Intervall $[-1, 3]$ und im Intervall $[0, 2]$. Geben sie die Nullstellen x_n bis auf eine Genauigkeit von $0{,}2$ an, das heißt: Es gibt ein $x \in U_{0,2}(x_n)$ so, dass $f(x) = 0$ respektive $g(x) = 0$.

Zusatz: Bestimmen Sie *alle* Nullstellen von f und g bis auf eine Genauigkeit von $0{,}2$. Skizzieren Sie deren Graphen und bestimmen Sie deren Wertebereiche. Dazu reicht Ihr Wissen aus der Vorlesung und das Wissen, das Sie sich in der Schule zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife angeeignet haben.

Aufgabe P 8.
Gegeben ist die Folge $\left(\frac{1}{n} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Skizzieren Sie die Folgenglieder in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe P 9.
Bestimmen Sie die Konvergenzkreise der komplexen Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^k}{k!} z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (z - \mathrm{i})^{2k+1}.$$

Aufgabe P 10.
Die Hyperbelfunktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind durch die Zuordnungen

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert. Im Folgenden seien nur reelle Argumente betrachtet.

(a) Geben Sie von $\cosh$ und $\sinh$ den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(b) Untersuchen Sie die beiden hierdurch gewonnenen Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse ($f(x) = f(-x)$) und zum Ursprung ($f(x) = -f(-x)$).

(c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(d) Geben Sie die beiden Funktionen jeweils als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0 an und bestimmen deren Konvergenzradien.

(e) Beweisen Sie, dass unabhängig von x das folgende Additionstheorem gilt:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1\,.$$

Zusatz: Verallgemeinern Sie die Ergebnisse, indem Sie die Definitionsbereiche in $\mathbb{C}$ bestimmen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7.

Die reelle Funktion f sei durch die Zuordnung $x \mapsto e^{-x}$ gegeben.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f an.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihe von e^{-x} um den Entwicklungspunkt 0 und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(d) Berechnen Sie damit $\frac{1}{e}$ auf zwei Dezimalstellen genau. Verwenden Sie hierzu eine geeignete Fehlerabschätzung.

Aufgabe H 8.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden komplexen Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k z^k$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k z^k$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-k} z^k$

Aufgabe H 9.

(a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der *Formel von Euler und de Moivre*

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} .$$

(b) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$ das folgende Additionstheorem:

$$(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1 .$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 11.
Die Funktion $\ln$ ist die Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^x$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von $\ln$ an.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

(c) Berechnen Sie $\ln'$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(d) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\,.$$

Aufgabe P 12.
Gegeben sind die Funktionen

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x \qquad f_3\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 \qquad f_4\colon \mathbb{R} \smallsetminus \left\{k + \tfrac{1}{2} \in \mathbb{R} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\cos(\pi x)}{|\cos(\pi x)|}$$

(a) Verstehen Sie den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, für die Funktionen f_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils für das Intervall $[-1, 1]$ eine oder mehrere solche Zwischenstellen ξ aus der Formulierung des Satzes.

Aufgabe P 13.
Gegeben ist das folgenden Problem. Sie haben ein Rohr mit rechteckigem Querschnitt, das eine feste Querschnittsfläche A erhalten soll.

(a) Sie wollen eine möglichst geringe Oberfläche erzielen, indem Sie den Umfang der Querschnittsfläche minimieren.

(b) Sie wollen eine möglichst große Oberfläche erzielen, indem Sie den Umfang der Querschnittsfläche maximieren.

Lassen sich Ihre theoretisch gewonnenen Erkenntnisse vernünftig in die Praxis umsetzen?

Aufgabe P 14.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right|_{x=x_0}$$

und entscheiden Sie, für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ die Quadratwurzelfunktion differenzierbar ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10.
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2(x-1)^2$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$$
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{e^x}$$

Bilden Sie auf den jeweiligen gegebenenfalls noch zu bestimmenden Definitionsbereichen die Ableitungen von f, g, h, $f+g$, $g+h$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f\cdot h$, $\frac{g}{h}$, $f\circ h$ und $h\circ\frac{f}{g}$.

Aufgabe H 11.
In Aufgabe P10 wurden

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)\big|_{x=x_0}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)\big|_{x=x_0}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Schränken Sie $\sinh$ und $\cosh$ im Definitions- und Wertebereich auf geeignete Intervalle so ein, dass die beiden Umkehrfunktionen *Areacosinus Hyperbolicus* arcosh und *Areasinus Hyperbolicus* arsinh jeweils existieren und skizzieren Sie diese.

(c) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}(x)\big|_{x=x_0}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)\big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(d) Zeigen Sie, dass für alle x in den jeweiligen Definitionsbereichen gilt:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Hinweis: Substituieren Sie hierzu $\tilde{x} := e^x$ in der Definition von $\cosh$ und $\sinh$.

(e) Bestimmen Sie nun anhand dieser Formeln erneut die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}(x)\big|_{x=x_0}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)\big|_{x=x_0}$. Verifizieren Sie damit Ihr Ergebnis, das Sie über die Ableitung der Umkehrfunktion gewonnen haben.

Aufgabe H 12.
Konstruieren Sie eine zylindrische Dose mit einem fest vorgegebenen Volumen V.

(a) Sie wollen Ihre Dose so dimensionieren, dass die Oberfläche minimiert wird.

(b) Sie wollen Ihre Dose so dimensionieren, dass die Mantelfläche minimiert wird.

(c) Ihr Werkmeister erklärt Ihnen, dass die Deckel der Dose nur mit einem festen Versatz ε nach innen befestigt werden können. Wie verändert dies Ihr Optimierungsproblem?

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 15.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\ln x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(-\cos \pi x)}{\sin \pi x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

Aufgabe P 16.

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ ist das Intervall $I := [-2\pi k, 2\pi k]$ gegeben. Weiter ist auf I die Funktion $\sin\big|_I : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ definiert.

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\sin\big|_I$ die Voraussetzungen des Satzes von Taylor in dem Intervall I erfüllt.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_5(\sin\big|_I, x, 0)$.

(c) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_n(\sin\big|_I, x, 0)$ und das Restglied nach Lagrange $R_n(\sin\big|_I, x, 0)$. Bestimmen Sie für $x \in I$ eine Schranke für den Fehler der Approximation (das ist der Betrag der Differenz zwischen dem Funktionswert $\sin\big|_I(x)$ und dem Wert des Taylorpolynoms $T_n(\sin\big|_I, x, 0)$), indem Sie das Restglied betragsweise nach oben abschätzen.

(d) In anwendungsbezogenen Vorlesungen wird Ihnen häufig eine Aussage der Form „*für kleine Winkel können wir* $\sin(x)$ *durch* x *ersetzen*“ begegnen. Darf man das wirklich? Was sind „*kleine Winkel*“? Stellen Sie diese an sich gewagte Behauptung auf ein solides mathematisches Fundament.

Aufgabe P 17.

Es sei $f : D \to W \subseteq \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die $f^{-1} : W \to D$ existiert.

Bestimmen Sie für $y \in W$ die zweite Ableitung $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^2 f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)}$ der Umkehrfunktion.

Aufgabe P 18.

Es sei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$ und $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/x}$.

Berechnen Sie $\lim_{x\to 0+0} f_1(x)$ und $\lim_{x\to +\infty} f_2(x)$.

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst „$\lim \ln(f_i(x))$“.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13.

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Des weiteren sei f auf (a,b) zweimal stetig differenzierbar mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\big|_{x=x_0} \neq 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$ und f besitze einen echten Wendepunkt bei x_0 (d. h. $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x)\Big|_{x=x_0} = 0$ und $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x)\Big|_{x=x_0}$ hat einen Vorzeichenwechsel).

Zeigen Sie, dass dann auch die Umkehrfunktion f^{-1} bei $y_0 = f(x_0)$ einen Wendepunkt besitzt.

Hinweis: In der Präsenzübung P 17 haben Sie gezeigt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^2 f^{-1}(y)\Bigg|_{y=f(x_0)} = -\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x)\Big|_{x=x_0}}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\big|_{x=x_0}\right)^3}.$$

Aufgabe H 14.

Die Funktionen f und g sind durch ihre Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k so, dass die Differentialgleichungen $f'' = -f$ und $g'' = -g$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \qquad & f'(0) &= 1 \\ g(0) &= 1 \qquad & g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden.

Wie heißen die Funktionen f und g?

Aufgabe H 15.

Gegeben sind $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^{x^2-2x}$ und $g\colon \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

Bestimmen Sie $T_3(f,x,0)$ und $T_3(g,x,0)$.

Hinweis: Führen Sie das Problem auf bekannte Taylor- beziehungsweise Potenzreihen zurück.

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Zusatz-Angebot: Falls Sie über Pfingsten etwas mehr üben wollen

Wir sind gerne bereit, auch Lösungen zu diesen Aufgaben zu korrigieren.
Bearbeiten Sie aber zuerst *gewissenhaft* das Blatt 5.

Aufgabe H 16.

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktionen f, g, und h durch, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}\,, \qquad g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}\,, \qquad h(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$$

gegeben sind. Bearbeiten Sie dazu insbesondere die folgenden Schritte.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich.
- Testen Sie auf Symmetrien.
- Bestimmen Sie die Bereiche, in denen Stetigkeit vorliegt, und untersuchen Sie die Funktionen auf stetig hebbare Definitionslücken.
- Berechnen Sie Nullstellen der Funktionen.
- Prüfen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit.
- Berechenen Sie Extrema und Wendepunkte.
- Ermitteln Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches und bestimmen Sie damit senkrechte oder waagrechte Asymptoten.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen.

Höhere Mathematik II

Aufgabe P 19.
Es ist

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} - x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -\sqrt{-x} - x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

(a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Aufgabe P 20.

(a) Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$. Berechnen Sie

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \,\mathrm{d}x \,.$$

(b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_{3/5}^{4/5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \,, \qquad \int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} \,\mathrm{d}x \,, \qquad \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(x)} \,\mathrm{d}x \,.$$

Aufgabe P 21.
Zeigen Sie, daß für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b x f''(x) \,\mathrm{d}x = b f'(b) - f(b) + f(a) - a f'(a) \,.$$

Aufgabe P 22.
Die *Ortsfunktion* $s\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ordnet dem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ den Ort $s(t)$ zu. Die *Geschwindigkeit* ist definiert durch $v := s'$, die *Beschleunigung* durch $a := v'$. Gestartet wird zum Zeitpunkt 0 am Ort A, zum Zeitpunkt 1 soll der Ort B erreicht werden, also $s(0) \stackrel{!}{=} A$ und $s(1) \stackrel{!}{=} B$. Die Beschleunigung a soll durch ein quadratisches Polynom beschrieben werden.

(a) Bestimmen Sie die Ortsfunktion s so, dass $a(0) = a(1) = 0$ und $v(0) = 0$.

(b) Ist es in **(a)** möglich zusätzlich $v(1) = 0$ zu fordern? Welche Konsequenz hat das für die Bewegung?

(c) Erfüllen Sie nun die Forderung $v(0) = v(1) = 0$ und $a(0) = 0$. Wie wirkt sich das auf die Bewegung aus?

(d) Lassen sich die Vorgaben $v(0) = v(1) = 0$ und $a(0) = a(1) = 0$ bei Verwendung eines kubischen Polynoms für a verwirklichen?

(e) Bestimmen Sie in allen Fällen Maxima und Minima von Beschleunigung und Geschwindigkeit.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17.

Berechnen Sie durch geeignete Substitution die folgenden reellen Integrale:

(a) $\displaystyle\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \cos(x)e^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\big(\ln(x)\big)^n}{x}\,\mathrm{d}x$ mit $n \in \mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 18.

(a) Es ist $f\colon D \subseteqq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit partieller Integration

$$\int 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \big[xf(x)\big] - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Berechnen Sie damit die unbestimmten Integrale

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe H 19.

Berechnen Sie mit partieller Integration die folgenden reellen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 23.

Untersuchen Sie, welches der folgenden uneigentlichen Integrale konvergiert, und geben Sie gegebenenfalls dessen Wert an:

$$\int_0^\infty x e^{(-x^2)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe P 24.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*“ $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\big(u(x)\big)^2}{2}\,, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}\,, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(u(x)\big)^2}{1+\big(u(x)\big)^2}\,.$$

Hinweis: $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\cos(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

(b) Führen Sie damit folgende Integrale auf rationale Integranden zurück:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe P 25.

Der Schwerpunkt S_f einer Verteilungsfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$S_f := \frac{\int_a^b x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Querschnittfunktion am Einheitskreis.

(b) Ein Rotationskörper besitzt die Radiusverteilung $r\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon h \mapsto \frac{1}{h^2}$. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Querschnittsflächenverteilung.

(c) Ein Rotationskörper besitzt die Radiusverteilung $r\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon h \mapsto \frac{1}{h}$. Können Sie hier den Schwerpunkt der Querschnittsflächenverteilung bestimmen?

Aufgabe P 26.

Es sei $f\colon [a-b, a+b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die punktsymmetrisch zu a ist, das heißt für alle $c \in [0,b]$ gilt $f(a-c) = -f(a+c)$. Beweisen Sie, dass für alle $d \in [0,b]$ gilt:

$$\int_{a-d}^{a+d} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 20.
Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{12x^5}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 21.
Gegeben sind die Funktionen $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^2+2x$ und $g_\alpha\colon [0,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x+\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ so, dass für alle $\alpha \in I$ die Graphen von f und g_α mindestens einen Schnittpunkt haben, das heißt, dass für alle $\alpha \in I$ gilt:

$$\{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} \neq \emptyset.$$

Geben Sie für alle $\alpha \in I$ die Menge $\{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\}$ explizit an.

(b) Die Graphen von f und g_α für $\alpha \in I$ schließen die Fläche F_α ein. Bestimmen Sie die Fläche F_α.

(c) Für welche $\alpha \in I$ wird die Fläche F_α maximal, für welche minimal?

Aufgabe H 22.
Berechnen Sie mit Hilfe von P 24 folgende bestimmte Integrale:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 27.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\left(\left(\sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{k\,2^k}, \pi\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgabe P 28.

Die Funktionen f_1 und f_2 sind als reelle Potenzreihen gegeben durch

$$f_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad\qquad f_2(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\,.$$

(a) Berechnen Sie für $i \in \{1, 2\}$ den Konvergenzradius ρ_i der Potenzreihe von f_i.

(b) Bestimmen Sie zu den Funktionen f_i jeweils eine Stammfunktion F_i durch gliedweise Integration.

(c) Stellen Sie die Funktionen f_i in geschlossener Form dar.

(d) Berechnen Sie daraus erneut Stammfunktionen der Funktionen f_i. Was lässt sich über die Taylorreihen zum Entwicklungspunkt 0 dieser Stammfunktionen aussagen?

Aufgabe P 29.

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{2y}$$

$$g\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{-x^2y+y^3}{2y}$$

(a) Geben Sie Zähler und Nenner von f und g jeweils in Multiindexnotation an.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g. Verwenden Sie dazu als Hilfsmittel Niveaulinien und achsenparallele Schnitte.

(c) Sind f und g stetig? Lassen sich f und g stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 23.
Es sei $\alpha \in \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > 1\}$ ein fest gewählter Parameter.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

(c) Was lässt sich daraus für die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale herleiten?

$$\int_1^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}x \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}x$$

Aufgabe H 24.
Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \alpha \mapsto \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieses uneigentliche Integral in der Tat für alle $\alpha > 0$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie mit partieller Integration die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(b) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

(c) Leiten Sie damit für $n \in \mathbb{N}$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ her. Anschaulich bedeutet dies, dass die Gamma-Funktion eine Fortsetzung der Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n!$ auf $\mathbb{R}^+$ ist.

Aufgabe H 25.
Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < -1$ konvergiert (vgl. Aufgabe H 17 (c)):

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\ln(k)\right)^\alpha}{k}\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 30.
Die reellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 sind durch die folgenden Zuordnungsvorschriften gegeben:

$$f_1\colon (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad f_2\colon (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$f_3\colon (u,v) \mapsto e^{uv}, \qquad f_4\colon (r,\varphi) \mapsto r\sqrt{\cos(2\varphi)}.$$

(a) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3,4\}$ den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteqq \mathbb{R}^2$ der Funktion f_i.

(b) Berechnen Sie von den gegebenen Funktionen jeweils die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

Aufgabe P 31.
Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0,\ x \leqq 1-y^2\right\},$$
$$M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < \pi,\ |y| \leqq |\sin(x)|\right\},$$
$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}\right\},$$
$$M_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\beta^{2k}\right)\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie M_1, M_2, M_3, M_4.

(b) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3,4\}$ jeweils das Innere M_i°, den Rand ∂M_i und den Abschluss $\overline{M_i}$.

(c) Welche der Mengen M_i ist beschränkt, welche konvex?

Aufgabe P 32.
Gegeben ist die Funktion:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen:

$$G_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) = 0\right\}$$
$$G_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) > 0\right\}$$
$$G_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) < 0\right\}$$

(b) Skizzieren Sie für $c \in \mathbb{R}$ die Niveaulinie $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) = c\right\}$.

(c) Bestimmen Sie für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $f_x\big((x_0,y_0)\big)$, $f_y\big((x_0,y_0)\big)$, $f_{xy}\big((x_0,y_0)\big)$, $f_{yx}\big((x_0,y_0)\big)$, $f_{xx}\big((x_0,y_0)\big)$ und $f_{yy}\big((x_0,y_0)\big)$.

(d) Untersuchen Sie die Funktion f auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe P 33.
Sind gleichmäßig stetige Funktionen stetig?

Finden Sie Beispiele für stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 26.
Gegeben ist die Funktion

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3y - xy^3 - xy\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen:

$$G_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, p\big((x,y)\big) = 0\right\}$$
$$G_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, p\big((x,y)\big) > 0\right\}$$
$$G_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, p\big((x,y)\big) < 0\right\}$$

(b) Untersuchen Sie p auf Differenzierbarkeit.

(c) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ und $v_3 = (1,1)$. Bestimmen Sie in den Punkten $P_0 = (2,0)$, $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (0,1)$ jeweils die Ableitungen von p längs v_1, v_2 und v_3. Bestimmen Sie dort auch die Richtungsableitungen von p in die durch v_1, v_2 und v_3 vorgegebenen Richtungen.

Aufgabe H 27.
Gegeben ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Mengen:

$$G_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) = 0\right\}$$
$$G_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) > 0\right\}$$
$$G_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\big((x,y)\big) < 0\right\}$$

(b) Zeigen Sie, dass jeder Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ Teil einer Niveaulinie von f ist. Geben Sie eine Funktion $\nu\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon r \mapsto \nu(r)$ an, die dem Radius r des Kreises das zugehörige Niveau $\nu(r)$ des Kreises zuordnet.

(c) Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0,y_0) in Richtung der Tangente an die Niveaulinie durch (x_0,y_0).
Hinweis: Beschreibt $v \in \mathbb{R}^2$ einen Punkt auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$, dann ist die Tangente an den Kreis durch v stets senkrecht zu v.

Aufgabe H 28.
Die reellen Funktionen g und h sind gegeben durch die Zuordnungen:

$$g\colon (u,v) \mapsto \frac{u^3+uv}{u^2+2uv+v^2+2v}$$
$$h\colon (r,\varphi) \mapsto \ln\left|\frac{1}{r\varphi-1}\right|$$

(a) Bestimmen Sie für g und h jeweils den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}^2$.
Sowohl die Menge der Definitionslücken von g als auch die von h ist eine Quadrik: Bestimmen Sie jeweils den Typ.

(b) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von g und h und alle zweiten partiellen Ableitungen von h.

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 34.

Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2y - y^3$.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(g,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Zusatz: Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3\big(g,(x_0,y_0),(0,0)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3\big(g,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Aufgabe P 35.

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1\,.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x,y) = 0$, $f(x,y) > 0$ beziehungsweise $f(x,y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0,0)$.

(d) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d. h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

(f) Schränken Sie f auf den Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ bzw. die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ein und untersuchen Sie unter diesen Nebenbedingungen f erneut auf Extrema.

Aufgabe P 36.

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x(1-y^2)}{x^2+1}\,.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29.

Es sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die zugehörigen quadratischen Formen q_A, q_B und q_C auf Definitheit.

Aufgabe H 30.

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \sin(x + y)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an den Graph von f in den Punkten $(0, 0)$ und $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe H 31.

Es sei

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x, y, z) \mapsto z(x^2 + y - 1)(y^2 - 1)\,.$$

Weiter sei

$$\tilde{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto g(x, y, 1)\,.$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} g$ und $\mathrm{H}g$.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Mengen:

$$\widetilde{G}_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tilde{g}(x, y) = 0\right\}$$
$$G_0 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x, y, z) = 0\right\}$$

(c) Bestimmen und skizzieren Sie die Mengen:

$$\widetilde{G}_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tilde{g}(x, y) > 0\right\}$$
$$\widetilde{G}_- = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tilde{g}(x, y) < 0\right\}$$

(d) Untersuchen Sie die kritischen Punkte von $\tilde{g}$. Entscheiden Sie, ob Extrema oder Sattelpunkte vorliegen.

Zusatz: Bestimmen Sie die kritischen Punkte von g.
Bestimmen Sie die Mengen:

$$G_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x, y, z) > 0\right\}$$
$$G_- = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x, y, z) < 0\right\}$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 37.

Es sei die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \\ \frac{1}{zy}\sin(xz)e^y \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Menge $D \subsetneqq \mathbb{R}^3$ als Definitionsbereich gegeben.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}f(x,y,z)$.

Aufgabe P 38.

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1\,.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f sowohl

(a) unter der Nebenbedingung
$$x^2 + y^2 = 1\,,$$

(b) als auch unter der Nebenbedingung
$$x = y\,.$$

Verwenden Sie in beiden Fällen die Lagrange-Multiplikatoren-Methode. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe P 35.

Aufgabe P 39.

Gegeben ist die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von h.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} h(x,y)$.

(c) Veranschaulichen Sie die Funktion $\tilde{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \operatorname{grad} h(x,y)$ mittels einer Skizze.

(d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}\tilde{h}(x,y)$.

(e) Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ ist die *Rotation* $\operatorname{rot} f$ durch folgende Zuordnung definiert:

$$\operatorname{rot} f(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y)\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{rot} \tilde{h}(x,y)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 32.
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x) + y \\ yz \end{pmatrix}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} s^2 + t^2 \\ te^s \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f(x,y,z)$ und $\mathrm{J}g(s,t)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Komposition $\mathrm{J}(g \circ f)(x,y,z)$.

Aufgabe H 33.
Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x + y - z$. Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe H 34.
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\colon t \mapsto tv = \begin{pmatrix} tv_1 \\ \vdots \\ tv_n \end{pmatrix}$$

mit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t))\big|_{t=0}$.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\partial_v f(0)$, d. h. der Ableitung von f längs v im Punkt 0.

Dr. A. App
Dipl.-Math. S. Poppitz

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2006

Aufgabe P 40.
Gegeben ist das Vektorfeld:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ -x^2e^{-y}+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Untersuchen Sie, ob g ein Potential besitzt. Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential.

Aufgabe P 41. *Gefahrenpotential wackeliger Eselsbrücken*
Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist bekanntlich definiert als $a \bullet (b \times c)$. Aus der Beziehung $a \bullet (b \times c) = \det(a, b, c)$ ergibt sich:

$$a \bullet (b \times c) = c \bullet (a \times b) = -b \bullet (a \times c).$$

Es seien die beiden stetig differenzierbaren Vektorfelder $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben.

Unreflektiertes naives Einsetzen und unbedachte Verwendung der durch die „Nabla-Schreibweise“ gegebenen Eselsbrücken könnte nun zu der irrigen Annahme führen $\operatorname{div}(f \times g)$, $g \bullet \operatorname{rot} f$ und $-f \bullet \operatorname{rot} g$ stimmten überein, da ja scheinbar „ $\nabla \bullet (f \times g)$ “, „ $g \bullet (\nabla \times f)$ “ und „ $-f \bullet (\nabla \times g)$ “ übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{div}(f \times g) = (g \bullet \operatorname{rot} f) - (f \bullet \operatorname{rot} g).$$

Insbesondere bedeutet dies im Allgemeinen:

$$g \bullet \operatorname{rot} f \neq \operatorname{div}(f \times g) \neq -f \bullet \operatorname{rot} g.$$

Geben Sie hierzu ein konkretes Gegenbeispiel an und widerlegen Sie somit den aus der „Nabla-Schreibweise“ gewonnenen Trugschluss.

Diskutieren Sie die Frage, warum die *„Merkregeln“* mit der „Nabla-Schreibweise“ nicht zum Rechnen geeignet sind.

Aufgabe P 42.
Verifizieren Sie für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g, h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{grad}(g \bullet h) = (\mathrm{J}g)^\intercal h + (\mathrm{J}h)^\intercal g$

(c) $\operatorname{rot}(fg) = f \operatorname{rot} g - g \times \operatorname{grad} f$

Die obigen Identitäten gelten übrigens auch für ebene Vektorfelder, wenn man für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ definiert $a \times b := a_1b_2 - a_2b_1$.

Die folgenden Aufgaben behandeln Stoff, der zum Teil erst nach der letzten Gruppenübung in der Vorlesung behandelt wird, deswegen aber nicht unwichtig ist.

Aufgabe P 43.

Gegeben sind die Vektorfelder:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (-y,x)$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x,y)$$

(a) Veranschaulichen Sie die beiden Vektorfelder mittels einer Skizze.

(b) Bestimmen Sie von f und g jeweils die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation.

(c) Die geschlossene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$C\colon [0,2\pi] \to K\colon t \mapsto \big(\cos(t),\sin(t)\big)\,.$$

Bestimmen Sie von f und g jeweils Zirkulation längs K und Ausfluss durch K.

Aufgabe P 44.

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\dfrac{z}{x} \\ \dfrac{z}{y} \\ \ln(xy) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K die Parametrisierung

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^{(t^2)} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe P 45.

Zeigen Sie für zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G\big) = 0\,.$$

Hinweis: In Aufgabe P 41 haben Sie $\operatorname{div}(f \times g)$ bestimmt.