O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**1. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 1.** *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen und bestimmen Sie für mindestens eine der Reihen auch den Grenzwert.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ , **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ , **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ , **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ , **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$ .

**Aufgabe P 2.** *Leibniz-Kriterium*

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1/n + (-1)^n/\sqrt[3]{n}$ eine alternierende Folge mit Grenzwert $0$ ist, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. Warum kann man hier das Leibniz-Kriterium nicht anwenden?

*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass die Summe einer divergenten und einer konvergenten Reihe divergent ist.

**Aufgabe P 3.** *Stetigkeit*

Betrachtet wird die Funktion $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$.

**(a)** Berechnen Sie für jede Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ eine passende Schranke $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\forall x \in [1, 1+\delta): \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

**(b)** Finden Sie für jeden Punkt $x_0 \in [1,4]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass die Bedingung

$$\forall x \in [1,4]\colon\ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.

**(c)** Betrachtet wird nun die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Können Sie auch hier für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta$ wie in **(b)** finden?

**(d)** Was hat das Ganze mit Stetigkeit zu tun?

**Aufgabe P 4.** *Teleskopsumme*

Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots$$

*Hinweis:* Geben Sie die allgemeine Form der Summanden $a_n$ an, finden Sie Konstanten $b$, $c \in \mathbb{R}$ so, dass $a_n = \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$ gilt, und rechnen Sie dann die Partialsummen explizit aus.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 1.** *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\,3^n}{(5+(-1)^n)^n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+1}{n^3+2n}$

**Aufgabe H 2.** *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+\cos(n\pi))^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^{\ln n}}$

*Hinweis:* Beachten Sie für Aufgabenteil **(d)**, dass $e^2 \leqq 9$ gilt.

**Aufgabe H 3.** *Grenzwerte von Reihen*

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{11^n}$ , **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{9^n}$ , **(c)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(x))^{2n}$ konvergiert und geben Sie den Wert der Reihe an.

**(d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+1)\,(n+2)}$

*Hinweis:* Finden Sie Konstanten $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{2}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ gilt.

**Aufgabe H 4.** *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, 4$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x\cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-x}, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

**(a)** Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteqq \mathbb{R}$, für den die angegebene Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_j$.

**(b)** Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$f_3(U_\delta(1) \cap D_3) \subseteqq U_\varepsilon(f_3(1)).$$

**(c)** Untersuchen Sie, ob zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $f_2(U_\delta(0) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(0))$ gilt.

**(d)** Untersuchen Sie die Funktionen $f_j$ auf Stetigkeit in jedem Punkt von $D_j$.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**2. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 5.** *Nullstellen*

Sei ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$ gegeben.

**(a)** Zeigen Sie: Ist $n$ ungerade, so hat $p$ mindestens eine reelle Nullstelle.

**(b)** Zeigen Sie: Ist $n$ gerade und haben $a_n$ und $a_0$ verschiedene Vorzeichen, so hat $p$ mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

**(c)** Wie viele reelle Nullstellen hat das Polynom $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 5$? Untersuchen Sie dazu die Vorzeichenwechsel von $p$.

**Aufgabe P 6.** *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

**(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$ , **(b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,

**(c)** $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$ für festes $a > 0$, **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{x}{\sin(3x)} - \frac{\sin(x)}{x} \right)$.

**Aufgabe P 7.** *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

**(a)** $f_1 \colon x \mapsto \dfrac{x-1}{|x-3|}$ **(b)** $f_2 \colon x \mapsto \ln\big(\ln(1 + x^2)\big)$ **(c)** $f_3 \colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit, und bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen. An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 5.** *Stetigkeit*

Gegeben ist die Menge

$$L := \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

und die folgenden Abbildungen:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{\sin(2x)} \qquad g\colon \mathbb{R} \setminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}\cos(x)$$

$$h\colon \mathbb{R} \setminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left( \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} + 1 \right) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

**(a)** Skizzieren Sie die Graphen der gegebenen Funktionen.

**(b)** Untersuchen Sie die Funktionen auf Stetigkeit.

**(c)** Untersuchen Sie für $f$, $g$ und $h$ an allen Stellen $x_0 \in L$ die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte.

**(d)** An welchen Stellen $x_0 \in L$ lassen sich $f$, $g$ und $h$ linksseitig stetig ergänzen, wo rechtsseitig? An welchen Stellen kann man sie stetig ergänzen?

**Aufgabe H 6.** *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte, ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden:

**(a)** $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{x+1}{x^3-3x-2}$ **(b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{x^2}{2-x^2} - (\pi - e)^x + 2^{\frac{1}{x}} \right)$

**(c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$ **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(2x)^2}$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen aus (a) und (c).

**Aufgabe H 7.** *Gleichheitsproblem*

**(a)** Besitzt die Gleichung $2^x = 5x$ mehrere reelle Lösungen?

**(b)** Seien die Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := (x-2)(2-x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g(x) := 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(0, \infty)$ mindestens drei Lösungen hat. Sie dürfen dabei benutzen, dass $\ln$ stetig ist auf $(0, \infty)$.

**Aufgabe H 8.** *Zwischenwertsatz beim Zugfahren*

Ein Zug benötigt für 500 km genau 10 Stunden, fährt also mit 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit. Auf der Strecke fährt er mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass es mindestens einen Zeitraum von einer Stunde gibt, in dem der Zug genau 50 km zurücklegt.

*Hinweis:* Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt $t$ zurückgelegte Strecke. Betrachten Sie $f(t+1) - f(t)$ für $t \in [0, 9]$.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**3. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 8.** *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-1+2\mathrm{i})^n$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{(2n)!}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-\mathrm{i})^n}{n!}$

**(e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n}\, z^n$

**(f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

**Aufgabe P 9.** *Exponentialfunktion*

**(a)** Berechnen Sie unter Verwendung der Potenzreihe der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

**(b)** Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie mithilfe des Differenzenquotienten die Ableitung von

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \mathrm{e}^{ax}.$$

**(c)** Die hyperbolischen Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \quad \text{sowie} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Berechnen Sie die Ableitungen von $\cosh$ und $\sinh$.

**Aufgabe P 10.** *Wie hängt $\rho_{f+g}$ mit $\rho_f$ und $\rho_g$ zusammen?*

Finden Sie Potenzreihen $f$, $g$ so, dass der Konvergenzradius $\rho_{f+g}$ der Summenpotenzreihe

**(a)** gleich $\min\{\rho_f, \rho_g\}$ ist,

**(b)** echt größer ist als $\max\{\rho_f, \rho_g\}$.

Vergleichen Sie dies mit Satz 1.14.11.

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 9.** *Konvergenzradien von Potenzreihen*

**(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

**(i)** $a_n = (1 - 2/n)^{n^2}$

**(ii)** $a_n = n^{-n}$

**(b)** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

**(i)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$,

**(ii)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(7z)^n}{n(n+1)}$

**Aufgabe H 10.** *Summe und Produkte von Potenzreihen*

**(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} \frac{1}{1+n^2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{3^n+n}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

**(b)** Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \quad \text{und} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien $\rho_f$ von $f$ und $\rho_g$ von $g$. Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an. Was hat diese Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \left\{1, \frac{1}{3}\right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{1}{1 - 4z + 3z^2} \quad ?$$

**Aufgabe H 11.** *Wie hängt $\rho_{f\cdot g}$ mit $\rho_f$ und $\rho_g$ zusammen?*

Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} & \text{für } n \geqq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} 2 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n \geqq 1 \end{cases}.$$

**(a)** Berechnen Sie die Konvergenzradien $\rho_f$ von $f$, $\rho_g$ von $g$ und $\rho_{f\cdot g}$ von $f \cdot g$.

**(b)** Schreiben Sie $f$ und $g$ als Quotient von Polynomen.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**4. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 11.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f'$. Berechnen Sie $f'$.

**(a)** $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}$

**(b)** $f(x) = x^x$

**(c)** $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+1})$

**(d)** $f(x) = \frac{1+\sin(x)^2}{1+\cos(x)^2}$

**Aufgabe P 12.** *Differenzierbarkeit*

Setzen Sie die Funktionen $f$ und $g$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fort. Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden fortgesetzten Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$
$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

**Aufgabe P 13.** *Leibnizformel*

Seien $f$ und $g$ jeweils $n$-mal differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Formel für die $n$-te Ableitung von $fg$.

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Bestimmen Sie damit die 100-te Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 \exp(x)$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 12.** *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f'$ und von $f''$. Berechnen Sie $f'$ und $f''$.

**(a)** $f(x) = x^{(x^2)}$ **(b)** $f(x) = \ln(\tan(x))$ **(c)** $f(x) = \left(\ln(\sqrt{x})\right)^2$ **(d)** $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$

**Aufgabe H 13.** *Ableitungen*

**(a)** Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktion in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$. Erstellen Sie Skizzen für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$.

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^n & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

**(b)** Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten: Ist die Funktion $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar? Ist die Funktion $g$ an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar? Skizzen!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & \text{für } x \geqq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x|x| + |x-1|$$

**Aufgabe H 14.** *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie $f$ mithilfe der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$, wobei $a, b \in \mathbb{N}_0$.

**(a)** $f(x) = \cos(x)^3$

**(b)** $f(x) = \sin(5x)\cos(2x)$

**(c)** $f(x) = \sin(x)^6\cos(x)$

**Aufgabe H 15.** *Komplexe Wurzeln*

Gegeben sei die Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $z$ auf diejenige komplexe Quadratwurzel von $z$ abbildet, deren Argument kleiner als $\pi$ ist.

**(a)** Berechnen Sie $w(z)$ für die Stellen $z \in \{0, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

**(b)** Suchen Sie in der komplexen Zahlenebene zu jedem $\delta > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < \delta$ und $|w(z) - w(1)| > 1$.

**(c)** Ist $w$ stetig?

*Hinweis:* Eine interaktive Darstellung des komplexen Wurzelziehens finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**5. Gruppenübung zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik 2**

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 14.** *Differentiation von Umkehrfunktionen*
Gegeben sei die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1-x}{1+x} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 + x + 1.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $g$ streng monoton wachsend ist. Was sagt das über die Existenz einer Umkehrfunktion?

**(b)** Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g^{-1}(y)$ an der Stelle $y = 1$.

**(c)** Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(\mathbb{R}^+)$ und skizzieren Sie den Graphen von $f$.

**(d)** Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^+$.

**(e)** Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ wie in Satz 2.3.1.

**(f)** Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ direkt.

**Aufgabe P 15.** *Differentiation von Umkehrfunktionen*

**(a)** Bergünden Sie, dass für die Funktion $f\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos x)^3$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f\left([0,\pi]\right) \to [0,\pi]$ existiert.

**(b)** Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\, f^{-1}(y)}{\mathrm{d}\, y}$ mit Hilfe von Satz 2.3.1 und der Formel $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

**Aufgabe P 16.** *Mittelwertsatz*

**(a)** Gegeben sind die Funktionen

$$f_1\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad\qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$$

Bestimmen Sie für beide Funktionen $f_j$ je eine Zwischenstelle $\xi \in (1,3)$ so, dass $f_j'(\xi) = \frac{f_j(3)-f_j(1)}{3-1}$ ist.

**(b)** Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Grenzwerte:

**(i)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$

**(ii)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\mathrm{e}^{((x+1)^2)} - \mathrm{e}^{(x^2)})$.

*Hinweis:* Es gilt

$$f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}.$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 16.** *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Es sei

$$f\colon\ [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \operatorname{arcosh}(x)$$

die Umkehrfunktion von

$$g\colon\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cosh(x)\,.$$

**(a)** Skizzieren Sie die Graphen von $f$ und von $g$.

**(b)** Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ unter Verwendung von Satz 2.3.1.

**(c)** Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right) \quad \text{für } x \geqq 1\,.$$

**(d)** Berechnen Sie nochmals die Ableitung von $f$, indem Sie Teil (c) verwenden, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (b).

**Aufgabe H 17.** *Differentialquotient und Mittelwertsatz*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und genüge für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $f(x-y) = f(x) - f(y)$.

**(a)** Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- **(i)** $f(0) = 0$
- **(ii)** $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- **(iii)** $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
- **(iv)** $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

**(b)** Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass $f'$ konstant ist.

**(c)** Verwenden Sie den Mittelwertsatz um zu zeigen, dass eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe H 18.** *Monotonie via Ableitung*

Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten. Skizze!

**(a)** $\ln(x) \geqq 1 - \frac{1}{x}$ für $x \in (0, +\infty)$

**(b)** $(x+1)\ln(x) \geqq 2x - 2$ für $x \in [1, +\infty)$

**(c)** $(x+1)\ln(x) \leqq 2x - 2$ für $x \in (0, 1]$

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**6. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 17.** *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(-\cos(\pi x))}{\sin(\pi x)} \qquad \lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x$$

**Aufgabe P 18.** *Taylorentwicklung*
Gegeben sind die Funktionen

$$g(x)=\sin(\pi\mathrm{e}^x), \quad h(x)=\frac{1}{x}.$$

**(a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe $n$ in $x_0$ für
  **(i)** $g(x)$, $n=2$, $x_0=0$,
  **(ii)** $h(x)$, $n=25$, $x_0=1$.

  *Hinweis:* Aufgabenteil (ii) kann auch ohne 25-maliges Ableiten gelöst werden.

**(b)** Schätzen Sie den Fehler

$$\left|h\left(\frac{3}{2}\right)-T_2\left(h,\frac{3}{2},1\right)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

**Aufgabe P 19.** *Differentiation von Potenzreihen*
Die Funktionen $f$ ist durch ihre Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_k$ so, dass die Differentialgleichung $f''=-f$ mit den Anfangsbedingungen

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=0$$

erfüllt ist.
Wie heißt die Funktion $f$?

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 19.** *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

**(a)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

**(b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{\pi}{x \sin(x)} - \dfrac{\pi}{x^2} \right)$

**(c)** $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{x\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - 2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}{x^3} \right)$

**(d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x^2) + x^2}{x^2 + \mathrm{e}^{(-x^2)}}$

**(e)** $\lim\limits_{x \to 1-0} \ln(x) \ln(1-x)$

**Aufgabe H 20.** *Taylorentwicklung*

Gegeben ist die Funktion

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x^2)$$

**(a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $h$ der Stufe $2$ im Entwicklungspunkt $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

**(b)** Finden Sie eine reelle Zahl $a$ so, dass

$$\left| h\left(x\right) - T_2\left(h, x, x_0\right) \right| \leqq a \left| x - x_0 \right|^3$$

für alle $x \in [0, 2]$ gilt.

**(c)** Bestimmen Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Aufgabe H 21.** *Taylorreihen*

Sei $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die für $x \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $h''(x) = 4h(x)$ und die Anfangsbedingungen $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$ erfüllt.

**(a)** Berechnen Sie die Taylorreihe $T(h, x, 0)$ von $h$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

**(b)** Überprüfen Sie, ob $T(h, x, 0) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
*Hinweis:* Vergleichen Sie mit 2.6.11 .

**(c)** Bestimmen Sie reelle Konstanten $a, b, c$ und $d$ so, dass $h(x) = a \sinh(bx) + c \cosh(dx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**7. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 20.** *partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int 3x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x$

**(b)** $\displaystyle\int \ln(x) \,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos(x) \,\mathrm{d}\,x$

**Aufgabe P 21.** *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

**(a)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (4x-3)^5$, **(b)** $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$,

und berechnen Sie die folgenden Integrale

**(c)** $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{(x^2)} \,\mathrm{d}\,x$, **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3(x)}{1-\sin(x)} \,\mathrm{d}\,x$.

**Aufgabe P 22.**

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\ (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} x^{n+1}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius $\rho$.

**(b)** Bestimmen Sie die Ableitung von $f$.

**(c)** Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe, um einen geschlossenen Ausdruck (ohne unendliche Summe) für $f'$ zu finden.

**(d)** Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f$.

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 22.** *Kurvendiskussion*

Die Funktion $f$ sei gegeben durch die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \ln(3 \cdot 10^{-4} x^2 + 2 \cdot 10^{-2} x + 1).$$

**(a)** Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f$ in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

**(b)** Untersuchen Sie den Graphen von $f$ auf Symmetrie und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2\ln(x))$.

**(c)** Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$.

**(d)** Bestimmen Sie die Extremalstellen von $f$, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

**(e)** Bestimmen Sie die Wendepunkte von $f$.

**(f)** Skizzieren Sie den Graphen von $f$.

**Aufgabe H 23.** *partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int 3x^2 \cos(2x) \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\displaystyle\int (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}\, x$

**(c)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x} \cos(3x) \,\mathrm{d}\, x$ **(d)** $\displaystyle\int \arctan(x) \,\mathrm{d}\, x$

**Aufgabe H 24.** *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

**(a)** $f\colon\ (0, \sqrt{\pi}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\cot(x^2)$

**(b)** $f\colon\ (0, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{a^x + a^{-x}}, \quad a > 0,\ a \neq 0$

und berechnen Sie die folgenden Integrale

**(c)** $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}\, x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}} \,\mathrm{d}\, x$ **(e)** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x.$

*Hinweis:* $x(t) = \sinh(t)$

**Aufgabe H 25.**

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\ (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n} x^n\,.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius $\rho$ und die zweite Ableitung von $f$.

**(b)** Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe, um einen geschlossenen Ausdruck (ohne unendliche Summe) für $f''$ zu finden.

**(c)** Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f$.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**8. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 23.** *Integration durch Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $$\int \frac{x-1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$$ **(b)** $$\int \frac{x^2+x+8}{x^2+9}\,\mathrm{d}\,x$$

**(c)** $$\int \frac{x^3-x^2+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

**Aufgabe P 24.** *Obersumme und Untersumme*
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{(-x^2)}$$

und die Partition $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ des Intervalls $[1,3]$. Skizze!

**(a)** Berechnen Sie die Ober-und Untersumme von $f$ zu dieser Partition und bestimmen Sie damit reelle Konstanten $A$ und $B$ so, dass gilt:

$$A \leqq \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq B$$

**(b)** Verfeinern Sie die Partition $P$ so, dass die Ober- und Untersumme zur verfeinerten Partition eine Abschätzung

$$C \leqq \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq D \quad \text{mit} \quad D - C \leqq \frac{1}{10}$$

liefert. Genügen $2$ weitere Teilungspunkte?

*Hinweis:* Zur Bestimmung von Funktionswerten können Sie elektronische Hilfsmittel einsetzen. Muss jeweils auf- oder abgerundet werden?

**Aufgabe P 25.** *Summation durch Integration*
Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\,,$$

indem Sie die Obersumme $\overline{S}(f,P)$ und Untersumme $\underline{S}(f,P)$ zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$$

bezüglich der Partition $P := \left\{1 + \frac{k}{n} \;\middle|\; 0 \leqq k \leqq n\right\}$ des Intervalls $[1,2]$ bestimmen.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 26.** *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale

**(a)** $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^7}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$ *Hinweis:* Substitution.

**Aufgabe H 27.** *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

**(a)** Rechnen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*" $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\big(u(x)\big)^2}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(u(x)\big)^2}{1+\big(u(x)\big)^2}.$$

**(b)** Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Teilaufgabe (a), um folgende Integrale zu berechnen:

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)^2\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

**Aufgabe H 28.** *Approximation von Integralen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\left(-x^2\right)}.$$

**(a)** Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, indem Sie $\int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x$ berechnen.

**(b)** Berechnen Sie mit Hilfe des Restglieds eine obere Schranke für den Fehler

$$\left|\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x\right|.$$

**(c)** Verbessern Sie Ihren Näherungswert aus Teil (a), indem Sie das Intervall in 2 gleich große Teilintervalle zerlegen und in den beiden Teilstücken jeweils $f$ durch das Taylorpolynom der Stufe 2 ersetzen, das die Teilintervallmitte als Entwicklungspunkt hat. Berechnen Sie mit Hilfe von Restgliedern eine obere Schranke für den Fehler. Vergleichen Sie mit P 24 (b).

*Hinweis:* Zur Bestimmung von Funktionswerten können Sie elektronische Hilfsmittel einsetzen.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**9. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 26.** *Graph einer Funktion*

Skizzieren Sie für die folgende Funktion die Niveaulinien zu den Niveaus $-1, 0, 1$ und $2$.

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2+y^2).$$

Wo befinden sich die Minima/Maxima der Funktion $g$? Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen mit der Ebene $y=0$. Untersuchen Sie $g$ bezüglich Symmetrie. Skizzieren Sie den Graphen von $g$.

**Aufgabe P 27.** *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

**(a)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}\,x$

**(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$

Entscheiden Sie, ob das folgende Integral existiert.

**(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

**Aufgabe P 28.** *Folgen*

Es seien die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2+y^2)$$

sowie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_n := \left(\frac{1}{n}\sin(n), \frac{1}{n}\cos(n)\right)$ und $b_n := \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}+\sqrt{\pi}\right)$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Bestimmen Sie eine Potenzreihe für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_0^x f(y,y)\,\mathrm{d}\,y\,.$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 29.** *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

**(a)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

**Aufgabe H 30.** *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

**(a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^3+x+11}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

**Aufgabe H 31.** *$\Gamma$-Funktion und Stirling-Formel*

Die $\Gamma$-Funktion (siehe 3.7.12) ist definiert durch $\Gamma\colon\ (0,+\infty) : \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $\Gamma$ für alle $x \in (1,+\infty)$ die Gleichung $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ erfüllt.

**(b)** Folgern Sie, dass für jede natürliche Zahl $n$ die Gleichung $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt. Skizzieren Sie den Graphen von $\Gamma$.

**(c)** Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt:

$$\int_2^n \ln(x-1)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqq \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$$

**(d)** Verifizieren Sie, dass für jede natürliche Zahl $n$ gilt: $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqq n! \leqq \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$

*Hinweis:* Dies ist eine (leicht vereinfachte) Version der sogenannten Stirling-Formel, die oft in der Form $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ auftaucht.

**Aufgabe H 32.** *Graph einer Funktion*

Wir betrachten $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sqrt{4-2x^2-y^2}$.

**(a)** Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}^2$ und den Wertebereich $W$ von $f$.

**(b)** Zeichnen Sie die achsenparallelen Schnitte für $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, sowie die Niveaulinien zur Höhe $c$ für $c \in \{0, 1/2, 1, 2\}$.

**(c)** Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$ und markieren Sie die Menge

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ (x,y) \in D,\ y=-x,\ 0 \leqq z \leqq f(x,y)\}\ .$$

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**10. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 29.** *Taylorpolynom*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^x \sin(y)\,.$$

Berechnen Sie die Taylorpolynome der Stufe $1$ und $2$ um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

**Aufgabe P 30.** *Topologie*

**(a)** Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + 3y^2 < 1\}$$

und

$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + 3y^2 \leqq 1\}\ .$$

Skizzieren Sie $M_1$ und $M_2$ und untersuchen Sie die beiden Mengen darauf, ob sie offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

**(b)** Begründen Sie: Der Schnitt zweier offener Mengen ist wieder offen.

**(c)** Gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die weder offen noch abgeschlossen sind?

**(d)** Gibt es eine nicht konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, deren Abschluss konvex ist?

**Aufgabe P 31.** *Nullstellenmenge*
Bestimmen Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung der Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x\,y\ (y-\alpha)\ \left(-4 + 4x^2 + y^2\right)$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Wieviele lokale Extrema treten mindestens auf?

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 33.** *Differenzierbarkeit*

**(a)** Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

auf Stetigkeit sowie partielle und totale Differenzierbarkeit.

**(b)** Sei die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+4y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie $\lim\limits_{y\to 0} g(y^3, y)$. Wo ist $g$ stetig? Wo ist $g$ partiell differenzierbar? Berechnen Sie dort den Gradienten von $g$.

**Aufgabe H 34.** *Existenz von Extremstellen*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x + \mathrm{e}^y - 5$. Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid xy = 1\} \subseteqq \mathbb{R}^2$.

**(a)** Ist $M$ abgeschlossen? Ist $M$ kompakt? Ist $M$ konvex? Ist $(1,1) \in M^\circ$? Skizze!

**(b)** Hat $f$ auf $M$ ein Maximum? Hat $f$ auf $M$ ein Minimum?

**(c)** Sei $v$ ein Vektor der Länge $1$ in Richtung der Tangente an $M$ in $(1,1)$. Bestimmen Sie $\nabla f(1,1)$, $\partial_v f(1,1)$ und $\partial_{-v} f(1,1)$. Hat $f$ auf $M$ bei $(1,1)$ ein Minimum?

**Aufgabe H 35.** *Taylorpolynom*

**(a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2 \sin\left(\frac{xy}{2}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $(1,\pi)^\intercal$.

**(b)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto 2x^2 + xy - y^2 + x + y + 1$$

um den Punkt $(-1,1)^\intercal$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet. Schreiben Sie $g$ in der Form

$$g(x,y) = a + b_0(x+1) + b_1(y-1) + \sum_{j=0}^{2} c_j (x+1)^j (y-1)^{2-j}, \qquad \text{mit } a, b_0, b_1, c_j \in \mathbb{R}.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie 4.4.19 .

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**11. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 32.** *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$ und von $g$. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$

**(b)** $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^2 - 3x + 2y$.

**Aufgabe P 33.** *Extrema unter Nebenbedingungen, vergleiche Modulprüfung vom 25.02.2013*

Gegeben seien zwei positive reelle Zahlen $x$ und $y$. Für welche Werte von $x$ und $y$ ist

**(a)** das Produkt von $x$ und $y$

**(b)** das Produkt von $x$ mit dem Quadrat von $y$

am größten, wenn man voraussetzt, dass die Summe der Quadrate von $x$ und $y$ konstant 4 ist?

**Aufgabe P 34.** *Lineare Approximation*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_3^2 \\ -6x_2 - 5x_3 \\ -x_3 + x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

**(a)** Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass

$$f(x) = Ax + o(|x|)$$

ist.

**(b)** Geben Sie ein $r \in \mathbb{R}^+$ so an, dass für alle $x \in U_r(0)$ gilt

$$|f(x) - Ax| < |x|.$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 36.** *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von $f$. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

**(a)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2 + xy)$.

**(b)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto yx^2(4 - x - y)$.

**(c)** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

**Aufgabe H 37.** *Jacobi-Matrix*

Seien

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2x \end{pmatrix} \\ h &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 3 \\ xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

**(a)** Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von $f$, von $h$ und von $g := f \circ h$ bei $(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$.

**(b)** Bestimmen Sie $\mathrm{J}g(x, y) - \mathrm{J}f(h(x, y)) \cdot \mathrm{J}h(x, y)$.

**(c)** Bestimmen Sie $u := f \circ f \circ f$. Berechnen Sie $\mathrm{J}u(1, 1)$.

**Aufgabe H 38.** *Multiplikatormethode nach Lagrange*

**(a)** Konstruieren Sie einen quaderförmigen Karton ohne oberen Deckel, der bei vorgegebenem Volumen eine minimale Oberfläche besitzt.

**(b)** Konstruieren Sie eine Flasche, die aus einem Zylinder mit einem aufgesetzten Kegel mit Öffnungswinkel $\frac{\pi}{2}$ besteht, so, dass diese Flasche bei vorgegebener Oberfläche maximales Volumen besitzt.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**12. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 35.** *Rotation*

**(a)** Berechnen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder. Welche dieser Felder besitzen ein Potential?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} \\ x\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

**(b)** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$h_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} 3y^2 + 4\cos(x+y) \\ \alpha yx + 4\cos(x+y) \end{pmatrix}$$

ein Potential?

**Aufgabe P 36.** *Potential*

Berechnen Sie ein Potential der folgenden Vektorfelder.

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix}$

**(b)** $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} \\ x\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$

**Aufgabe P 37.** *Rotation*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierberes Vektorfeld. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(g)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} g) - \begin{pmatrix} \operatorname{div}(\operatorname{grad} g_1) \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} g_2) \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} g_3) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{rot} g - g \times \operatorname{grad} f$$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 39.** *Vektorfelder*

**(a)** Berechnen Sie die Rotation und Divergenz der folgenden Vektorfelder. Welche dieser Felder besitzen ein Potential?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix}2x\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - x^2y^2\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right)\\ -2x^2y\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right)\end{pmatrix}$$

**(b)** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$h_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y)^\intercal \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1+x^2z^4}\begin{pmatrix}2x+\alpha xz^4\\ \alpha y\\ 4x^2z^3\end{pmatrix}$$

ein Potential?

**Aufgabe H 40.** *Potential*

Berechnen Sie ein Potential der folgenden Vektorfelder.

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix}y\mathrm{e}^{xy}+z\mathrm{e}^{xz}\\ x\mathrm{e}^{xy}+z\mathrm{e}^{yz}\\ y\mathrm{e}^{yz}+x\mathrm{e}^{xz}\end{pmatrix}$

**(b)** $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix}y\cos(xy)\cos(yz)\\ x\cos(xy)\cos(yz) - z\sin(xy)\sin(yz)+2y\\ -y\sin(xy)\sin(yz)+6z\end{pmatrix}$

**Aufgabe H 41.** *Tangentialräume*

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \quad (x,y,z)^\intercal \mapsto x^3+y^2+z^2-3\,,\\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \quad (x,y,z)^\intercal \mapsto x^2+y^3+z^2-3\,,\end{aligned}$$

sowie die Mengen

$$N_f := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z)=0\right\}$$

und

$$N_g := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; g(x,y,z)=0\right\}\,.$$

Berechnen Sie die Tangentialebenen von $N_f$ und $N_g$ im Punkt $(1,1,1)$. Berechnen Sie die Tangente von $N_f \cap N_g$ im Punkt $(1,1,1)$.

O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

**13. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 38.** *Parametrisierung*

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven.

**(a)** Eine Strecke, die den Punkt $(-3,1)$ mit dem Punkt $(7,7)$ verbindet.

**(b)** Die untere Hälfte eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,1)$ und Radius $2$, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

**(c)** Der Graph der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

zwischen den Punkten $(-2, f(-2))$ und $(3, f(3))$.

**(d)** Ein achsenparalleles Quadrat mit Mittelpunkt $(2,2)$ und Seitenlänge $2$, das im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

**Aufgabe P 39.** *Kurvenintegrale*

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

**(a)**

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{mit} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y, x+1)^\intercal ,$$

wobei $K$ die Strecke von $(0,1)$ nach $(1,0)$ ist.

**(b)**

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{mit} \quad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+1, -y)^\intercal ,$$

wobei $K$ Anfangspunkt $(-1,0)$ hat und die obere Hälfte der Ellipse durchläuft, welche den Mittelpunkt $(0,0)$ hat und die Punkte $(-1,0)$, $(0,2)$ und $(1,0)$ enthält.

**Aufgabe P 40.** *Länge von Kurven*

Berechnen Sie die Länge folgender Kurven. Skizzieren Sie die Kurven.

**(a)** $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

**(b)** $C\colon [0, (2\pi)^{1/2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$

**(c)** $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 42.** *Kurvenintegrale*

Die Kurve $C\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t), t^2\big)^\intercal$ beschreibt einen Spiraldraht. Skizzieren Sie diesen. Sei $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto \sqrt{w}$ die Temperaturverteilung.
Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur

$$T_m := \frac{1}{L} \int_{C([0,3\pi])} T(s)\,\mathrm{d}\,s$$

im Draht. Dabei ist $L$ die Länge des Drahts.

**Aufgabe H 43.** *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

**(a)** Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \sqrt{1-x^2}$ und die Ellipse $E$ mit der Gleichung $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Skizzieren Sie den Graphen der Einschränkung von $f$ auf $E$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von $f$ längs $E$. Begründen Sie anhand der Skizze, dass dieses Kurvenintegral positiv ist.

**(b)** Durch $C\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\big)^\intercal$ sei ein Draht $D$ parametrisiert. Er besitze die Massendichte $\varrho(C(t)) = \sin(t)\cos(t)$. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes, die durch $\displaystyle\int_D \varrho(s)\,\mathrm{d}\,s$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Länge von $D$. Skizzieren Sie $D$.

**Aufgabe H 44.** *Kurvenintegrale*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Umlaufintegrale

$$\oint_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \oint_K g_2(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,,$$

wobei $K$ das Rechteck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(4,0,0)$, $(4,3,0)$ und $(0,3,0)$ ist.

Welches der beiden Integrale lässt sich ohne Parametrisierung berechnen?