C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen. Bestimmen Sie für mindestens eine der Reihen den Grenzwert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ **(c)** $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Für welche der Reihen bekommt man eine Konvergenzaussage mit Hilfe von Lemma 1.9.1?

Aufgabe P 42. *Leibniz-Kriterium*

Betrachtet wird die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$.

(a) Konvergiert die gegebene Reihe?

(b) Bestimmen Sie für $n \in \{1,2,3\}$ jeweils die n-te Partialsumme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}\,.$$

Bis zu welchem $n \in \mathbb{N}$ muss summiert werden, damit S_n vom Wert der Reihe weniger als $\frac{1}{6}$ entfernt ist?

(c) Ist die Reihe absolut konvergent?

Aufgabe P 43. *Teleskopsumme*

Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots$$

Hinweis: Geben Sie die allgemeine Form der Summanden a_n an, finden Sie Konstanten b, $c \in \mathbb{R}$ so, dass $a_n = \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$ gilt, und rechnen Sie dann die Partialsummen explizit aus.

Aufgabe P 44. *Stetigkeit*

Betrachtet wird die Funktion $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Sei eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gegeben.

(a) Finden Sie ein $\delta_1 > 0$ in Abhängigkeit von ε so, dass gilt

$$\forall x \in [2, 2+\delta_1)\colon \quad |f(x) - f(2)| < \varepsilon\,.$$

Hinweis: Schreiben Sie x als $2+h$ mit $h \in [0, \delta_1)$.

(b) Finden Sie ein $\delta_2 > 0$ in Abhängigkeit von ε so, dass gilt

$$\forall x \in (2-\delta_2, 2]\colon \quad |f(x) - f(2)| < \varepsilon\,.$$

(c) Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ist

$$\forall x \in U_\delta(2)\colon \quad |f(x) - f(2)| < \varepsilon\ ?$$

Wie kann man hieraus über die Stetigkeit von f bei 2 entscheiden?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 56. *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{1-2\sqrt{n}}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$

Aufgabe H 57. *Grenzwerte von Reihen*
Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{5\cdot 2^{2n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{25}-\sqrt[n+1]{25})$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n)}{4^n}$

Aufgabe H 58. *Stetigkeit*
Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2\}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+8}{x^3-9x^2+26x-24} & \text{für } x \neq 2 \\ -1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteqq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2.

(b) Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2)\cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(2))$ ist.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0)\cap D_1) \subseteqq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

(d) Ist die Funktion f_1 stetig an der Stelle $x = 0$? Ist f_2 stetig an der Stelle $x = 2$?

Aufgabe H 59. *Grenzwerte*

Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \dfrac{(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

(a) Bestimmen Sie folgende Werte, falls existent.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ **(2)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ **(3)** $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ **(4)** $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ **(6)** $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ **(7)** $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(b) Aus welchen der Aufgabenteile unter **(a)** lässt sich eine Konvergenzaussage über die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ableiten?

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^7 - 5x^3 + x - 2}{9x^7 + 8x^6 - x^2 + 1}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5\cos(x^2)}{2x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-3})$

Aufgabe P 46. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

(a) $f_1\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{|x-3|}$ **(b)** $f_2\colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen. Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit. Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen. An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

Aufgabe P 47. *Gleichheitsproblem*

Werten Sie die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x^2 + x$$

an geeigneten Stellen im Intervall $[-2, 2]$ aus. Zeigen Sie hiermit, dass sich die Graphen von f und g in mindestens zwei Punkten schneiden.

Aufgabe P 48. *Umkehrfunktionen*

Bestimmen Sie für

(a) $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 + \alpha x$

(b) $f_\alpha\colon [\alpha, \alpha+1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x+1)^2$

die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die f_α eine Umkehrfunktion besitzt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 60. *Grenzwerte und Stetigkeit*

Sei $\alpha \geqq 0$ ein reeller Parameter. Sei

$$f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{\alpha x + 7} & \text{für } x \geqq 2 \\ \dfrac{4(x^3 - 2x^2 - 3x + 6)}{2 - x} & \text{für } x < 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$. Für welche α liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_α in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie α_0 so, dass f_{α_0} in $x_0 = 2$ stetig ist.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f_{α_0} auf dem Intervall $[-2, 20]$.

Aufgabe H 61. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 10x + 5}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$ **(b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-2} - \sqrt{7x+5}}{\sqrt{2x}}$ **(c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + \sin(x^2)}{x^2 + 1}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\tan(3x)} + \dfrac{2\tan(x)}{3x} \right)$

Aufgabe H 62. *Eigenschaften stetiger Funktionen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x^3 - 14x^2 + 30x - 19 \quad \text{und} \quad g\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{2}{(x-1)^3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(1, 2)$, in $(2, 3)$ und in $(3, 4)$ je mindestens eine Nullstelle besitzt. Wieviele reelle Nullstellen besitzt f insgesamt?

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens eine reelle Lösung $x > 1$ hat.

(c) An wievielen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist $f(2x)$ doppelt so groß wie $f(x)$?

(d) Nimmt $f + g$ auf $[2, 4)$ ein Minimum an? Nimmt g auf $(2, 3]$ ein Maximum an?

Aufgabe H 63. *Abschnittsweise definierte Umkehrfunktion*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} & \text{für } x \leqq -3 \\ \dfrac{2-x}{x+3} & \text{für } -3 < x < 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{für } x \geqq 2. \end{cases}$$

(a) Finden Sie ein Intervall $I = (-a, a)$ maximaler Länge so, dass die Einschränkung $g\colon I \to f(I)\colon x \mapsto f(x)$ von f auf I injektiv ist.

(b) Bestimmen Sie einen (abschnittsweise definierten) Funktionsterm für $g^{-1}\colon f(I) \to I$.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von g und g^{-1}.

C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Konvergenz von Potenzreihen*

(a) Skizzieren Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1+\mathrm{i})^n}{2^{2n-1}}$$

in der komplexen Zahlenebene.

(b) Untersuchen Sie, ob die Potenzreihe für $z=-2+3\mathrm{i}$, $z=3-\mathrm{i}$, $z=5-\mathrm{i}$ bzw. $z=4+\mathrm{i}$ konvergiert. Zeichnen Sie in allen Fällen, in denen Konvergenz vorliegt, die Punkte z und $f(z)$ in Ihre Skizze ein.

Aufgabe P 50. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-\mathrm{i})^n}{n!}$ **(c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Aufgabe P 51. *Konvergenzaussagen durch geometrische Überlegungen*

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \binom{2n}{n} (z-\mathrm{i})^n$ ist für $z=-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ divergent und für $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ konvergent. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe für $z=1+2\mathrm{i}$ und $z=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}$.

(b) Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und komplexer Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei für $z=4-2\mathrm{i}$ konvergent und für $z=3-\mathrm{i}$ divergent. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe für $z=1+\mathrm{i}$.

Aufgabe P 52. *Wie hängt ρ_{f+g} mit ρ_f und ρ_g zusammen?*

Finden Sie Potenzreihen f, g so, dass der Konvergenzradius ρ_{f+g} der Summenpotenzreihe

(a) gleich $\min(\rho_f, \rho_g)$ ist,

(b) echt größer ist als $\max(\rho_f, \rho_g)$.

Vergleichen Sie dies mit 1.14.11.1.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 64. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für:

(i) $a_n = n^{-n}$ **(ii)** $a_n = \left(\mathrm{i} - \frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z+\frac{\mathrm{i}}{2})^n}{n(n+1)}$

Aufgabe H 65. *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie f unter Verwendung der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$, wobei $a, b \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = \sin(x)^3$ **(c)** $f(x) = \sin(x)^4 \cos(2x)$

(b) $f(x) = \sin(5x)\cos(3x)^2$ **(d)** $f(x) = (\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x))^3$

Aufgabe H 66. *Wie hängt $\rho_{f\cdot g}$ mit ρ_f und ρ_g zusammen?*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} 4 & \text{für } n = 0 \\ -\frac{2}{3^n} & \text{für } n \geqq 1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{mit} \quad b_n := \begin{cases} 9 & \text{für } n = 0 \\ \frac{3}{2^n} & \text{für } n \geqq 1. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f, ρ_g von g und $\rho_{f\cdot g}$ von $f \cdot g$.

(b) Stellen Sie f, g und $f \cdot g$ als gebrochen rationale Funktionen von z dar.

Aufgabe H 67. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie den Konvergenzkreis K der Potenzreihe $f(z)$. Geben Sie für $f(z)$ einen geschlossenen Funktionsterm an. Bestimmen Sie die Partialsummen $S_1(z)$ und $S_2(z)$ der Potenzreihe $f(z)$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto S_1(x)$ und $x \mapsto S_2(x)$ für $x \in K \cap \mathbb{R}$ in dasselbe Koordinatensystem.

(a) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n!}$ **(b)** $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/3}{n} (2z-1)^n$

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f'. Berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{\cos(x)}$

(b) $f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$

(c) $f(x) = \frac{1+\cos(x)^2}{1+\sin(x)^2}$

(d) $f(x) = (\sqrt{x})^{(\sqrt{x})}$

Aufgabe P 54. *Ableitungsregeln*

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von $\sin(x)^2$ und von $\cos(x)^2$. Verwenden Sie diese, um die Ableitung von $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$ zu berechnen. Was fällt auf?

(b) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = -1, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = \frac{2}{3},$$

sowie

$$h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (g\circ f)(x) \quad \text{und} \quad h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)\,g(x)\sqrt{3 + (f(x))^2 + (g(x))^2}\,.$$

Berechnen Sie $h_1'(0)$ und $h_2'(1)$.

Aufgabe P 55. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^5 + x^3 - 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend ist. Zeigen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Was sagt das über die Existenz einer Umkehrfunktion?

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g^{-1}(y)$ an der Stelle $y = 1$.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(\mathbb{R}^+)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

(d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^+$.

(e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} mittels Satz 2.3.1.

(f) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt, also unter Verwendung von **(d)** und ohne Satz 2.3.1.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 68. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f' und von f''. Berechnen Sie f' und f''.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ **(b)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}$ **(d)** $f(x) = \ln(\tan(x)^2)$

Aufgabe H 69. *Differenzierbarkeit*

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + |x|\,|x-2|\ .$$

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ und g an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ differenzierbar ist.

(c) Finden Sie ein Polynom p so, dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \ln(2+|x|) & \text{für } x \leqq 0 \\ p(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Aufgabe H 70. *Mehrfaches Ableiten*

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (\sinh(ax) - \cosh(ax))$ **(b)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n x\mathrm{e}^x$, wobei $x > 0$

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n a^{-x}$, wobei $x > 0$ **(d)** $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{1}{a-bx}$, wobei $x \neq \frac{a}{b}$

Aufgabe H 71. *Differentiation der Umkehrfunktion*

(a) Überprüfen Sie, ob $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to \ln(4+\mathrm{e}^{2x})$ streng monoton ist. Bestimmen Sie den Wertebereich $f(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und bestimmen Sie damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y)$, ohne Verwendung von Satz 2.3.1. Bestimmen Sie abermals $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y)$, nun unter Verwendung von Satz 2.3.1. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(b) Sei $I := [-0{,}5\,,\ 4{,}5]$. Gegeben sei die differenzierbare und streng monotone Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1	3
1	2	0,5
2	2,3	0,2
3	3	1,5
4	6	4

Wir betrachten $f^{-1} : f(I) \to I$. Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(1)$ und $\left(f^{-1}\right)'(2)$. Skizzieren Sie die Graphen von f und von f^{-1} näherungsweise.

Präsenzübungen

Aufgabe P 56. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{(x^2)}}{x^2}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(5x)\tan(x)$

Aufgabe P 57. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_n(f,x,x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(2x),\quad n=2,\quad x_0=0$

(b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^2,\quad n=3,\quad x_0=-3$

Aufgabe P 58. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{1}{x}$.

(a) Leiten Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ her.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,1)$ und die Taylorreihe $T(f,x,1)$ von f an.

(c) Schätzen Sie den Fehler $\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-T_2\left(f,\frac{3}{2},1\right)\right|$ mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

(d) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_2\,(f,x,1)$ in ein Koordinatensystem.

Aufgabe P 59. *Mittelwertsatz*

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{1}{x}\,.$$

Bestimmen Sie für die Funktion f eine Zwischenstelle $\xi\in(1,3)$ so, dass $f'(\xi)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ ist.

Skizzieren Sie den Graphen von f, die Sekante durch die Punkte $(1,f(1))$ und $(3,f(3))$ sowie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $(\xi,f(\xi))$.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon t\mapsto \sqrt[3]{t}.$$

Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass zu jedem $x\in\mathbb{R}^+$ ein $\xi(x)\in(x,x+1)$ existiert mit $g'(\xi(x))=g(x+1)-g(x)$. Bestimmen Sie damit

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}).$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 72. *Differentialquotient und l'Hospital*

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{(-t^4)}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \mathrm{e}^{(-1/x^4)}$ für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ und $f(0) := 0$. Berechnen Sie $f'(0)$ mittels Differentialquotienten.

Hinweis: Verwenden Sie **(a)**.

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (x^2)^{(x^2)}$. Ist g stetig in $x=0$?
Bestimmen Sie $g'(0)$ mittels Differentialquotienten. Ist g' differenzierbar in $x=0$?

Aufgabe H 73. *Mittelwertsatz, Monotonie und Funktionsgrenzwerte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(a) Zeigen Sie, dass für $x\in\mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}\,.$$

Hinweis: Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $h\colon [x,x+1]\to\mathbb{R}\colon t\mapsto \ln(t)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

(c) Zeigen Sie mit **(a)** und **(b)**, dass f streng monoton wachsend ist.

(d) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ unter Verwendung von **(a)**.
Berechnen Sie damit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Aufgabe H 74. *Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x^2)}{x\ln(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{4^x-2^{x+3}+16}{(x-2)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\sin(2x))^2}{1-\cosh(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{(\mathrm{e}^x)}$

Aufgabe H 75. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x\mathrm{e}^{1-x}$ gegeben.

(a) Leiten Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ her.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom $T_3(f,x,1)$ und die Taylorreihe $T(f,x,1)$ an. Zeigen Sie durch Abschätzen des Restglieds, dass $T(f,x,1)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie ein $C>0$ so, dass

$$|f(x)-T_3(f,x,1)| \leqq C|x-1|^4 \quad \text{für alle } x\in[0,2] \text{ ist.}$$

(d) Bestimmen Sie ein $a\in(0,1)$ so, dass

$$|f(x)-T_3(f,x,1)| \leqq 10^{-4} \quad \text{für alle } x\in[1-a,1+a] \text{ ist.}$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 60. *Stammfunktion, Kurvendiskussion*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ sei

$$f_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \alpha x^2 \mathrm{e}^{2x} - \sqrt{\beta}.$$

Sei außerdem

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 6\mathrm{e}^{2x} x(x+1).$$

(a) Für welche Werte von α, β ist $f_{\alpha,\beta}$ eine Stammfunktion von g?

(b) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von g.
Argumentieren Sie mit Lemma 2.7.1.

(c) An welchen Stellen besitzt $f_{3,0}$ Wendepunkte?

Aufgabe P 61. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie durch geeignete Substitutionen die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int (\sin(x))^2 \cos(x) \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+2} \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}\, x$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x) \,\mathrm{d}\, x$

Machen Sie jeweils im Anschluss die Probe für die ermittelte Stammfunktion.

Aufgabe P 62. *Partielle Integration*

Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)\mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}\, x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}\, x$ **(c)** $\displaystyle\int (\sin(x))^2 \,\mathrm{d}\, x$

Machen Sie jeweils im Anschluss die Probe für die ermittelte Stammfunktion.
Vergleichen Sie die Resultate von **P 61 (c)** und **P 62 (b)**.

Aufgabe P 63. *Stammfunktion, Kurvendiskussion*

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

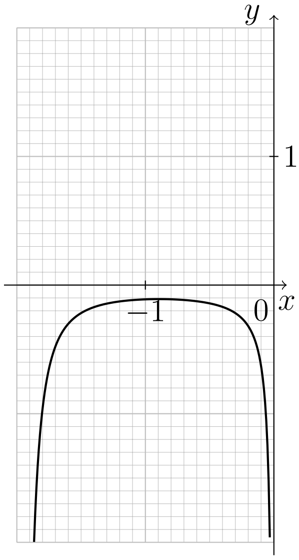
$$f \colon (-2, 0) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{1}{x(x^2-4)^2}$$

eine Stammfunktion von

$$g_{a,b} \colon (-2, 0) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{a+bx^2}{x^2(x^2-4)^3}$$

ist.

(b) Die nebenstehende Skizze zeigt den Graphen von f.
Skizzieren Sie den Graphen von $g_{4,-5}$ qualitativ dazu.



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 76. *Stammfunktion, Kurvendiskussion*

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos(3x))^2 - 1.$$

(a) Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema von f.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion G von F.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f, F und G in dasselbe Schaubild.

(d) An welchen Stellen besitzt F Wendepunkte?
An welchen Stellen besitzt G Wendepunkte?

Aufgabe H 77. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{3-x^6} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x) - \arctan(x)}{x^3 - x^2 + x - 1} \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{(\sin(s))^3 - \sin(s)}{\sqrt{5 - (\cos(s))^3}} \,\mathrm{d}\,s$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\tanh(x^2)} \,\mathrm{d}\,x$, wobei $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe H 78. *Partielle Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int (-2x^2 + 4x + 1)\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 79. *Potenzreihen*

(a) Sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(1-x)$. Bestimmen Sie

$$F\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

(b) Weiter sei die Funktion

$$g : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ und die Ableitungen g' und g''.

(c) Bestimmen Sie $f'(x)+g''(x)$. Bestimmen Sie $f(x)+g'(x)$. Bestimmen Sie $F(x)+g(x)$.
Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $g(x)$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 64. *Partialbruchzerlegung*

Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der folgenden Brüche auf.

(a) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ **(b)** $\dfrac{x+1}{x^2+4}$ **(c)** $\dfrac{x^4}{(x+1)^3(x+2)^2(x^2+x+2)^3}$

Hinweis: Es ist keine vollständige Rechnung verlangt. Insbesondere brauchen die Konstanten aus dem Ansatz nicht bestimmt zu werden.

Aufgabe P 65. *Integration (durch Partialbruchzerlegung)*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2+x+8}{x^2+9}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4-4}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \sin(5x)\cos(3x)^2\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Zu **(d)**: Siehe **H 65**.

Aufgabe P 66. *Obersumme und Untersumme*

Gegeben seien die Funktion

$$f\colon [1,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$$

und die Partition $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ des Intervalls $[1,3]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Stellen Sie Ober- und Untersumme von f zur Partition P graphisch als Flächeninhalt dar.

(b) Berechnen Sie die Ober- und Untersumme von f zur Partition P und bestimmen Sie damit reelle Konstanten A und B so, dass gilt:

$$A \leqq \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq B$$

(c) Berechnen Sie nun $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ und vergleichen Sie mit **(b)**.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 80. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^5}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{17x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 81. *Ober- und Untersummen*

Gegeben seien $f : [0,3] \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-2)^2+1$ sowie $I := \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von f zu den Partitionen

$$P := \{0,1,2,3\} \qquad \text{und} \qquad Q := \left\{0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, 3\right\}$$

jeweils eine obere und eine untere Schranke für I. Bestimmen Sie I.

(c) Finden Sie eine Partition $R = \{0,a,b,3\}$ so, dass $\underline{S}(f,R) > \underline{S}(f,Q)$ ist.

Aufgabe H 82. *Integrale und Flächeninhalte*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x - x^2$ und $g_\alpha\colon [0,3] \mapsto \mathbb{R}\colon x \mapsto x+\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie das Schaubild von f, g_{-1}, g_1 und g_3.

(b) Bestimmen Sie die Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Elemente α, für welche

$$\{x \in [0,3] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} \neq \emptyset$$

ist.

(c) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in I$ die Menge $\{x \in [0,3] \mid f(x) = g_\alpha(x)\}$.

(d) Für $\alpha \in I$ schließen die Graphen von f und g_α die Fläche F_α ein. Bestimmen Sie deren Inhalt.

Aufgabe H 83. *Integrale*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4x+26}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \sin(x)^4\,\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{8}{4+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: **(c)**: Siehe **H 65**.

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} 5^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 68. *Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren. Verwenden Sie jeweils eine Majorante, eine Minorante oder das Grenzwertkriterium.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3-3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-x-1}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 69. *Modell: Sattelfläche als Funktionsgraph (hyperbolisches Paraboloid)*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto x_2^2 - x_1^2$. Das vorliegende Modell ist ein Ausschnitt des Graphen von f. Dargestellt ist der Bereich $(x_1, x_2) \in [-1,1] \times [-1,1]$.

(a) Bei welchen der farbigen Linien handelt es sich um achsenparallele Schnitte? Welche entsprechen Niveaulinien?

(b) Die dargestellten Niveaulinien sind Quadriken. Welche Gestalt haben diese jeweils? Kann es eine Niveaulinie von einer weiteren Gestalt geben?

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $N_t := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = t\}$ die Niveaumenge von f zum Niveau t. Für welche Werte t ist N_t im Modell dargestellt?

(d) Skizzieren Sie fünf verschiedene Niveaumengen N_t zu Niveaus $t \in [-2, 2]$ in ein ebenes Koordinatensystem.

Aufgabe P 70. *Integration von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$.

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x)$.
Hinweis: Schreiben Sie $n = (n+1) - 1$ und verwenden Sie Beispiel 3.8.8.

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 84. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t$ in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe H 85. *Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2-x-1}{x^3-4x^2+5x-2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos(x)|+|\sin(x)|}{|x|+1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 86. *Integralkriterium*

Untersuchen Sie das Integral $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\;\mathrm{d}\,x$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ für

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{2\pi x\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)}{x^2}$

auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Werte.

Aufgabe H 87. *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*

Für $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $f_{r,s}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto rx_1^2 + sx_2^2$.
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $N_t(r,s)$ die Niveaumenge von $f_{r,s}$ zum Niveau t.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f_{-1,1}$ dar. Dargestellt ist der Bereich $(x_1,x_2) \in [-1,1] \times [-1,1]$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Zeichnen Sie für $(r,s) \in \{(1,0),(-4,1),(1,4)\}$ jeweils die Niveaumengen $N_t(r,s)$ für $t \in \{-4,0,4\}$.

(b) Bestimmen Sie die Gestalt des Graphen $\Gamma(f_{r,s})$ in Abhängigkeit von $(r,s) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f_{r,s}$ folgenden achsenparallelen Schnitt besitzt:
$\big\{(1,x_2,f_{r,s}(1,x_2)) \;\big|\; x_2 \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(1,u-1,u^2-2u+3) \;\big|\; u \in \mathbb{R}\big\}$.

C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 71. *Partielle Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \cos(x_1 + 3x_2 + x_3^2 x_4)$$

die folgenden partiellen Ableitungen.

(a) $f_{x_3}(x)$ **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_1} f(x)$ **(c)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$ **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,0,1)} \left(\mathrm{D}^{(0,1,1,0)} f\right)(x)$

Aufgabe P 72. *Taylorpolynom*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x y$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x,y), (0,0))$.

Aufgabe P 73. *Stetigkeit*

Zeigen Sie, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^4}$$

sich in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzen lässt.

Aufgabe P 74. *Mengen*

Betrachten Sie die Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$M_1 := \{0,1\}, \quad M_2 := (0,1), \quad M_3 := M_1 \cup M_2,$$

sowie die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$M_4 := M_1 \times M_2, \quad M_5 := M_1 \times M_3, \quad M_6 := M_2 \times M_2.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 in $\mathbb{R}$.
Skizzieren Sie die Mengen M_4, M_5 und M_6 in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie für all diese Mengen die inneren Punkte und die Randpunkte.
Argumentieren Sie mithilfe der Definitionen 4.2.14.

(c) Welche dieser Mengen sind offen?

(d) Welche dieser Mengen sind kompakt?

(e) Welche dieser Mengen sind konvex?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 88. *Stetigkeit*

Lässt sich die Funktion f im Ursprung stetig fortsetzen?

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y)^2}{x^2+y^2}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^4}{x^2+2y^2}$

Hinweis: Ist $f(x,y) \leqq x^2+y^2$? Falls für $\varepsilon > 0$ sich $|(x,y)-(0,0)| < \sqrt{\varepsilon}$ ergibt, ist dann $|f(x,y)-0| < \varepsilon$?

Aufgabe H 89. *Ableitungen*

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$, die Hessematrix $\mathrm{H}f(P)$ und die Richtungsableitung $\partial_v f(P)$.

(a) $f(x,y,z) = x^3 + \mathrm{e}^{-z^3-y^3}$, $\quad P = (1,0,-1)$, $\quad v = \frac{1}{3}(1,-2,2)$

(b) $f(x,y,z) = \exp(\ln((z+y)^2+1)+x-1)$, $\quad P = (1,1,1)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$

Aufgabe H 90. *Lokale Extremstellen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto ((x-2)^2+(y-2)^2-1)(y-x)(y+x-4)$.

(a) Bestimmen Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0.

(b) Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

$$M_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 1\right\},\quad M_2 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > x\right\},$$
$$M_3 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq x\right\},\quad M_4 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq 4-x\right\},$$
$$M_5 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < 4-x\right\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen

$$N_1 := M_1 \cap M_2 \cap M_4,\quad N_2 := M_1 \cap M_2 \cap M_5,$$
$$N_3 := M_1 \cap M_3 \cap M_4,\quad N_4 := M_1 \cap M_3 \cap M_5.$$

Welche dieser Mengen M_i und N_j sind kompakt?

(c) Welches Vorzeichen hat f auf N_i° für $i \in \{1,2,3,4\}$?

(d) Hat die eingeschränkte Funktion $f|_{N_3}\colon N_3 \to \mathbb{R}$ ein Maximum? Wird dieses Maximum auf ∂N_3 oder auf N_3° angenommen?
Hat die eingeschränkte Funktion $f|_{N_3}\colon N_3 \to \mathbb{R}$ ein Minimum? Wird dieses Minimum auf ∂N_3 oder auf N_3° angenommen?

Aufgabe H 91. *Taylorpolynome*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(xy)$.
Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y),(0,0))$ und $T_2(f,(x,y),(0,0))$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(t,t)$, $T_1(f,(t,t),(0,0))$ und $T_2(f,(t,t),(0,0))$ auf $t \in [-2,2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem.

(b) Sei $D := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y\right\}$. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{x-y}$.
Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y),(-1,1))$ und $T_2(f,(x,y),(-1,1))$.
Skizzieren Sie die Graphen der durch $f(-1,t)$, $T_1(f,(-1,t),(-1,1))$ und $T_2(f,(-1,t),(-1,1))$ auf $t \in [0,2]$ definierten Funktionen in ein Koordinatensystem.

C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2016

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 75. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ; das heißt, entscheiden Sie, welche lokale Maximalstellen, welche lokale Minimalstellen und welche Sattelpunkte sind.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 6y$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^3$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -x^2 - y^4$

Aufgabe P 76. *Modell: Extrema, auch unter Nebenbedingungen*

Das Modell stellt den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$$

im Ausschnitt $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leqq \frac{6}{5}\right\}$ dar.

(Vergleiche *www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06*)

(a) Welche der braunen Achsen ist die x- und welche die y-Achse?

(b) Wir betrachten die Funktion f ohne Nebenbedingungen. Besitzt f kritische Stellen? Besitzt f lokale Extrema? An welchen Stellen hilft hierbei die Hesse-Matrix? Besitzt f globale Extrema?

(c) Wir betrachten die Funktion f nur auf dem (blauen) Einheitskreis. Welche Punkte liefert die Methode nach Lagrange als Kandidaten für Extrema von f unter dieser Nebenbedingung? Welche davon sind globale Extremstellen? Welche davon sind lokale Extremstellen?

(d) Wir betrachten die Funktion f nur auf der (magentafarbenen) Parabel, die durch $y = x^2$ beschrieben wird. Welche Punkte liefert die Methode nach Lagrange als Kandidaten für Extrema von f unter dieser Nebenbedingung? Wie kann man die Parabel parametrisieren? Wie kann man diese Parametrisierung dazu verwenden, um zu entscheiden, welche der Kandidaten tatsächlich lokale Extrema sind?

(e) Man löse die vorstehende Teilaufgabe stattdessen für die (lilafarbene) Parabel, die durch $x = y^2$ beschrieben wird.

Aufgabe P 77. *Nullstellenmenge, kritische Stellen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2).$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(c) Bestimmen Sie den Typ jeder kritischen Stelle.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 92. *Schmiegquadrik und Minimalstelle*

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^{y} + 3\mathrm{e}^{y} + x^3 - 3x^2 + 3x.$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\mathrm{H}f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und deren Typ.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene und die Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt $(2,0)$.

(d) Ist der Punkt $(2,0)$ eine globale Minimalstelle von f?

Aufgabe H 93. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2 + 2y^2 - 2x)^2$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge N und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie $\det(\mathrm{H}f(x,y)) - 96f(x,y)$. Für welche $P \in N$ ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$?

(d) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Aufgabe H 94. *Minimierung mit Nebenbedingung*

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ Parameter mit $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.
Sei $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = d\right\}$.

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ hat ein Minimum auf der Ebene E. Bestimmen Sie dieses mit der Methode von Lagrange.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E. Bestimmen Sie damit den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

(c) Bestimmen Sie den Punkt auf E mit minimalem Abstand vom Ursprung unter Verwendung von **(a)**. Bestimmen Sie hiermit abermals den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

Aufgabe H 95. *Abstand zweier Mengen*

Die Gerade G und die Ellipse E sind gegeben durch

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 3y = 12\right\} \qquad \text{und} \qquad E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4u^2 + 9v^2 = 36\right\}.$$

(a) Zeichnen Sie G und E in ein Koordinatensystem.

(b) Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Bestimmung der Extrema des Quadrats des Abstands $(x-u)^2 + (y-v)^2$ unter den beiden Nebenbedingungen $(x,y) \in G$ und $(u,v) \in E$.

(c) Es gibt ein Punktepaar $((x,y),(u,v)) \in G \times E$ mit minimalem Abstand voneinander. Bestimmen Sie dieses Paar mittels **(b)**. Zeichnen Sie dieses Punktepaar in die Zeichnung aus **(a)** ein.

C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

24. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 78. *Jacobi–Matrizen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^{x_1}}{1+x_2^2}$. Sei $a = (0,-1)^\intercal$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(a)$, $\mathrm{J}f(a)$, $\mathrm{J}(\operatorname{grad} f)(a)$ und $\mathrm{H}f(a)$.

(b) Sei außerdem eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (g_1(t), g_2(t))^\intercal$ mit

$$g(1) = (0,-1)^\intercal, \quad g_1'(0) = 5, \quad g_1'(1) = -2, \quad g_2'(-1) = -3 \quad \text{und} \quad g_2'(1) = 4$$

gegeben. Berechnen Sie $\mathrm{J}h(a)$ für $h = g \circ f$.

Aufgabe P 79. *Lineare Approximation*

Geben Sie die lineare Approximation der Funktion

$$f\colon (-2,2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ \sin(\pi x_2) \\ \ln(4 - x_1^2) \end{pmatrix}$$

im Punkt $a = (1,1)^\intercal$ an. Mit anderen Worten, bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}^3$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass $f(x) = b + B(x-a) + o(|x-a|)$ für alle $x = (x_1, x_2)^\intercal \in (-2,2) \times \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe P 80. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_2^3 + x_1^2 x_2$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E an den Graphen

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

von f im Punkt $P = (1, 0, f(1,0))$.

(b) Geben Sie die Tangente im Punkt $(1,0)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 1 an.

(c) Bestimmen Sie $E \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$. Vergleichen Sie mit **(b)**.

(d) In welche Richtung wird ein Ball auf $\Gamma(f)$ rollen, wenn man ihn in P loslässt?

Links zur Lehrevaluation:

Vorlesung und Vortragsübung:
https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=2RAAJ

Gruppenübungen:
https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=AG6RZ

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 96. *Jacobi–Matrizen*

Die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2y+z} - 1 \\ \arctan(xz) - y - z \\ x - 2\cos(2+yz) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 3\ln(5 + v^2w^2) \\ uw\sqrt{3+v^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{J}f(x,y,z)$, $\mathrm{J}g(u,v,w)$, $\mathrm{J}(g \circ f)(0,-1,2)$ und $\mathrm{J}(f \circ f \circ f)(0,1,-2)$.

Aufgabe H 97. *Lineare Approximation*

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2,x_3)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + (x_2+x_3)^2 - x_3 \\ (x_1+1)^2 - 4x_2 + \frac{2}{x_3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die lineare Approximation $L_{f,a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ von f im Punkt $a = (1,0,2)^\intercal$.

(b) Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ so, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ und alle $x = (x_1,x_2,x_3)^\intercal \in U_\varepsilon(a)$ die Abschätzung $|f(x) - L_{f,a}(x)| < c\varepsilon^2$ gilt.

Aufgabe H 98. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 - y^2 - 4z^2$ und die Ebene $E : x = -2$.

(a) Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich bei der Niveaumenge

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = -4\}\ ?$$

Sind $(0,0,1)$ und $(-2,2,-1)$ in N enthalten?

(b) Berechnen Sie die Tangentialebenen an N in den Punkten $(0,0,1)$ und $(-2,2,-1)$.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an $E \cap N$ im Punkt $(-2,2,-1)$.

Aufgabe H 99. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x(x^2+y^2-1)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge

$$N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}.$$

(b) Berechnen Sie die Tangenten an N_0 in den Punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Fügen Sie diese Tangenten und die Gradienten in diesen Punkten zur Skizze aus **(a)** hinzu.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ in den Punkten $(0,-1)$ und $(0,1)$. Was lässt sich über die Tangenten an N_0 in diesen Punkten sagen?

(d) Sei $N_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 6\}$. Liegen $(\sqrt[3]{6}, 1)$, $(\sqrt[3]{6}, -1)$ und $(2,0)$ in N_6? Berechnen und skizzieren Sie die Tangenten an N_6 in diesen Punkten. Bestimmen Sie alle $y \in \mathbb{R}$ mit $(\frac{3}{2}, y) \in N_6$ und fügen Sie diese Punkte der Skizze hinzu. Skizzieren Sie nun N_6 im Bereich $[\frac{3}{2}, 2] \times [-2,2]$ näherungsweise.

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. *Modell: Wendelfläche, Potentialtheorie*

Die Wendelfläche ist in gelb gegeben als Graph der Funktion

$$p\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 < 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0 \\ \pi & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 > 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{3\pi}{2} & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

(Vergleiche *www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/07*)

Ebenfalls im Modell enthalten ist, als die grüne Fläche, der Graph der Funktion

$$q\colon \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 < 0\right\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Dargestellt ist jeweils nur der Bereich über der Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqq \pi^2\right\}$.
Weiter finden sich auf diesen Flächen Projektionen eines Kreises, einer Geraden, eines Dreiecks und eines Kreisflächenausschnitts. Der Kreis ist dabei $K = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 4\right\}$.
Die Gerade ist dabei $G = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = -\sqrt{3}x_2\right\}$. Das Dreieck hat die Eckpunkte $\left(\begin{smallmatrix}-3\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}-2\\-2\end{smallmatrix}\right)$.
Der Kreisflächenausschnitt hat die äußeren Eckpunkte $\begin{pmatrix}3\cos(\frac{\pi}{6})\\3\sin(\frac{\pi}{6})\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\cos(\frac{\pi}{3})\\3\sin(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}$, sowie die inneren Eckpunkte $\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{6})\\\sin(\frac{\pi}{6})\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{3})\\\sin(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}$, die Kreise haben dabei den Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Wo verläuft die x_1-Achse? Wo verläuft die x_2-Achse?

(b) Welche Werte nimmt die Funktion p auf G an? (Den Ursprung selbst muss man ausnehmen, da dort p nicht definiert ist.)

(c) Parametrisieren Sie die Kreislinie K, das Dreieck D und den Rand R des Kreisflächenausschnitts.

(d) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(\begin{smallmatrix}-x_2\\x_1\end{smallmatrix}\right)$.
Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_R g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(e) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$. Ist p ein Potential von g? Wie kann man dies im Modell erkennen? Ist p ein Potential von g auf einem geeignet eingeschränkten Definitionsbereich?

(f) Hat g ein Potential? Ist g ein Gradientenfeld?

(g) Kann man zu der Berechnung der Integrale in **(d)** die Funktion p verwenden?

(h) Kann man zur Berechnung von $\int_D g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ auch q verwenden? Geht diese Berechnung schneller als eine Berechnung unter Verwendung der Definition?

(i) Parametrisieren Sie die die Kurve

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = p(x_1, x_2),\ \pi^2/4 \leqq x_1^2 + x_2^2 \leqq \pi^2,\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\right\} .$$

mit Anfangspunkt $(\pi/2, 0, \pi/2)$ und Endpunkt $(0, \pi, \pi)$.
Wo verläuft die Kurve S im Modell?

(j) Sei

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\int_S h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 100. *Parametrisierung, Potential, Kurvenintegral*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\mathsf{T} \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}, \frac{x_1}{3} + 1)^\mathsf{T}$.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von g. Hat g ein Potential?
Falls ja, geben Sie ein Potential U an. Ist U eine harmonische Funktion?

(b) Wir betrachten folgende Kurven von $(0,-1)$ nach $(0,1)$.
Sei $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 \geqq 0\}$.
Sei $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1,\ x_1 \leqq 0\}$.
Sei $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2^2 - 1,\ x_1 \leqq 0\}$.
Skizzieren und parametrisieren Sie diese Kurven.

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von g längs der Kurven aus **(b)** mittels der Parametrisierungen aus **(b)**.

(d) Verwenden Sie das Potential U, um die Kurvenintegrale aus **(c)** erneut zu berechnen.

Aufgabe H 101. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien die Vektorfelder

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\mathsf{T} \mapsto (x_1^2, x_2^2)^\mathsf{T}$$
$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + x_2^2, \mathrm{e}^{x_2} + x_3^2, \mathrm{e}^{x_3} + x_1^2)^\mathsf{T}$$
$$h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon (x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T} \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + x_2^2, \mathrm{e}^{x_2} + x_3^2, \mathrm{e}^{x_3} + x_1^2, 0)^\mathsf{T}.$$

Sei die Kurve K_1 parametrisiert durch $C_1\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (1, \mathrm{e}^t)^\mathsf{T}$. Sei die Kurve K_2 parametrisiert durch $C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t, t^2, t^3)^\mathsf{T}$. Sei die Kurve K_3 parametrisiert durch $C_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^4\colon t \mapsto (t, t^2, t^3, \mathrm{e}^{3t}\cos(t))^\mathsf{T}$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\displaystyle\int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{K_3} h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$

(d) Welches dieser Integrale lässt sich auch ohne Parametrisierung berechnen?
Führen Sie auch diese Berechnung durch.

Aufgabe H 102. *Parametrisierung, Kurvenintegral*

Gegeben seien die Menge $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = x_3^2\}$,
die Ebene $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_2 + 4x_3 - 6 \\ 4x_1^2 + 3x_2 + 4x_2^2 + 8 \\ -4x_1^2 - 3x_2 - 4x_2^2 + 8x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Parametrisieren Sie die Kurve $K = M \cap E$.
Sei ferner K^* die Kurve K, nur rückwärts durchlaufen. Parametrisieren Sie K^*.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$. Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{K^*} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 103. *Potential*

Berechnen Sie jeweils das Potential U von f, das $U(0,0,0) = 17$ erfüllt.

(a) $$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} -y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} \\ (z\cos(xy) - x\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz} + z \\ y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + y + 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\mathsf{T} \mapsto \mathrm{e}^{xyz} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x+y+z) + yz\sin(x+y+z) \\ \cos(x+y+z) + xz\sin(x+y+z) \\ \cos(x+y+z) + xy\sin(x+y+z) \end{pmatrix}$$

C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2016

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 82. *Parametrisierungen, Kurvenintegrale*

(a) Parametrisieren Sie die Strecke S, die den Punkt $(-3,1)$ mit dem Punkt $(7,7)$ verbindet.

(b) Parametrisieren Sie die untere Hälfte H eines Kreises mit Mittelpunkt $(-1,1)$ und Radius 2.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x+y$. Berechnen Sie $\int_S f(s)\,\mathrm{d}\,s$ und $\int_H f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

Aufgabe P 83. *Längen von Kurven*

Skizzieren Sie die durch

(a) $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(3+\cos(t), \sin(t)\big)^\intercal$

(b) $C\colon [0,\sqrt{\pi}\,] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(4\cos(t^2), 4\sin(t^2)\big)^\intercal$

(c) $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t), t/\pi\big)^\intercal$

parametrisierten Kurven und berechnen Sie jeweils ihre Länge.

Aufgabe P 84. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben seien die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, y-x)^\intercal\,.$$

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung C von K an.

(c) Bestimmen Sie die Zirkulation von g längs K und den Ausfluss von g durch K.

Aufgabe P 85. *Potential durch Hakenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u+uv^2 \\ u^2v+3v^2 \end{pmatrix}\,.$$

Wir verwenden die von $a,\, b \in \mathbb{R}$ abhängigen Parametrisierungen

$$H_a\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{a,b}\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix}\,.$$

Sei $K_{a,b}$ die Kurve, die sich als Zusammensetzung der durch H_a und $V_{a,b}$ parametrisierten Kurven ergibt und die $(0,0)^\intercal$ als Anfangspunkt hat.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von g.

(b) Skizzieren Sie $K_{2,3}$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $U(a,b) := \int_{K_{a,b}} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ von g längs $K_{a,b}$.

(d) Vergleichen Sie $\operatorname{grad} U(u,v)$ und $g(u,v)$. Bestimmen Sie ein Potential von g.

Hausübungen (Abgabe bis spätestens Freitag, den 22.07.2016):

Aufgabe H 104. *Kurvenintegrale*

(a) Skizzieren Sie die durch $C\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 3t \\ 1 - t - t^2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_K |f(s)| \,\mathrm{d}\,s$ für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4x - 2y + 9 \\ 2x + y + 20 \end{pmatrix} .$$

(b) Berechnen Sie $L(K)$ sowie $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ und $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 2z^2 - y - 3x$$

und die durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) \\ \mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

Aufgabe H 105. *Hyperbel und Hyperbelfunktionen*

Gegeben sei die Kurve $K \subseteqq \mathbb{R}^2$ mit der Parametrisierung

$$C\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(\cosh(t), \sinh(t)\big)^\intercal .$$

(a) Ist K ist eine Teilmenge der Hyperbel $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$?

(b) Ist C regulär und doppelpunktfrei?

(c) Skizzieren Sie H und K in dasselbe Koordinatensystem.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral der Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 6xy$ längs K.

Aufgabe H 106. *Lagrange*

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir betrachten das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\} .$$

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader mit Ecken auf E mit größtem Volumen.

Aufgabe H 107. *Ausgleichsgerade*

Gegeben sind die Punkte $(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, wobei $n \geqq 2$.

(a) Seien $s_1 := \sum_{j=1}^n x_j$ und $s_2 := \sum_{j=1}^n x_j^2$. Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal$ und $(1, 1, \ldots, 1)^\intercal$ in Abhängigkeit von s_1 und s_2 .

Folgern Sie, dass $s_1^2 < n s_2$ ist. Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & n \end{pmatrix}$.

(b) Für $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $G_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax + b$ und die Summe der Fehlerquadrate

$$E(a,b) \;:=\; \sum_{j=1}^n (G_{a,b}(x_j) - y_j)^2 \;=\; \sum_{j=1}^n (a x_j + b - y_j)^2 .$$

Bestimmen Sie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $E(a,b)$ minimal wird. Diesenfalls heißt der Graph von $G_{a,b}$ die Ausgleichsgerade der genannten Punkte.

(c) Zeichnen Sie die Punkte $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$ und ihre Ausgleichsgerade in dasselbe Koordinatensystem.