A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 40. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Teil (d) in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}^+$).

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{-n^2+8^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} + \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\ln(n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{(n^2)}$

Aufgabe P 41. *Partialsummen und Teleskopreihen*

Berechnen Sie jeweils die n-te Partialsumme S_n der Reihe für $n \in \{2,3\}$.
Konvergiert die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k+1)^3 - k^3$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k}$

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$.

Hinweis zu (b): Schreiben Sie $\frac{1}{k^2+k} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

Aufgabe P 42. *Häufungspunkte, Konvergenz von Folgen und Reihen*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Häufungspunkte. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $a_n = n^{((-1)^n)}$

(b) $a_n = \left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

(c) $a_n = \left|\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right| \cdot \mathrm{e}^{\left(n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(-1)^{n+1}\right)\right)}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 40. *Häufungspunkte, Konvergenz von Folgen und Reihen*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) $a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ **(b)** $a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n^2+2n}{2n+4}\cdot\pi\right)$

Aufgabe H 41. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Teil (b) in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}^+$).

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} + \frac{n^{12}}{7^n}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ **(d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{\cosh(2n)}$

Aufgabe H 42. *Geometrische Reihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{-3^{k+1}}{2^{2k}}$ **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}\sqrt{(2\mathrm{e})^k}$

Aufgabe H 43. *Teleskopreihen*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k!}$ **(b)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen (wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie / und $*$) dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email (an Ihre studentische Emailadresse) erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 43. *Potenzreihen*

Bringen Sie jeweils f in die Form $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)(-z+1)^n$

(b) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z\mathrm{i} + z + 3\mathrm{i})^n}{n!}$

Aufgabe P 44. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für } x \leqq 1 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Sei $1 > \varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(-1)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-1-\delta, -1+\delta)$. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = -1$ stetig ist.

(c) Wählen Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (a_n) mit Grenzwert 1 so, dass $|f(a_n) - f(1)| \geqq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

Aufgabe P 45. *Nullstellensatz von Bolzano*

Sei $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x^2 + x) + x^2$.

(a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wächst, d.h. für $0 < x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) Finden Sie ein $x_- \in (0, +\infty)$ mit $f(x_-) < 0$ und ein $x_+ \in (0, +\infty)$ mit $f(x_+) > 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{4\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2\mathrm{e}} \leqq \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt.

(c) Begründen Sie, warum f genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe P 46. *Grenzwerte von Funktionen*

Untersuchen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen für $x \to +\infty$ und $x \to 0+0$.

(a) $f(x) = \frac{2x^3 + \sin(x) + x^2}{x^3 + 5x}$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 44. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sig}(x) \cdot x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{sig}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f im Punkt 0 stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 unstetig ist.

Aufgabe H 45. *Stetigkeit*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter. Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1} & \text{für } x < -1 \\[2ex] \dfrac{ax^3+1}{x^2+1} & \text{für } x \geqq -1 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2 \mathrm{e}^x}}{b-x} & \text{für } x < b \\[2ex] -\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) & \text{für } x \geqq b \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to -1-0} f(x), \quad \lim_{x\to -1+0} f(x), \quad \lim_{x\to 0-0} g(x), \quad \lim_{x\to 0+0} g(x)$$

(für die Funktion g in Abhängigkeit vom Parameter b).

(b) Für welche Werte des Parameters a ist f an der Stelle -1 stetig?

(c) Für welche Werte des Parameters b ist g an der Stelle 0 stetig?

Aufgabe H 46. *Grenzwerte von Funktionen*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{\tan(3x)+x^2}{2x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4+5x^2+x^7-1}{x^4-7x^7+x} + x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)+2}}{\ln(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x}}$.

Aufgabe H 47. *Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x/3} + \sin(x)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(c) Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall $I = [a, b]$, das diese Nullstelle enthält und $b - a < 0{,}4$ erfüllt.

Hinweis: Funktionswerte dürfen mit einem Taschenrechner näherungsweise bestimmt werden.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 26.4.–2.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 48. *Konvergenz von Potenzreihen*

Schreiben Sie $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius von $f(z)$.
Untersuchen Sie die Potenzreihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz in $z = \mathrm{i}$.

(a) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (5z-\mathrm{i})^{2k}$ **(b)** $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n}(\mathrm{i}z+2\mathrm{i}+1)^n$

Aufgabe H 49. *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie $f(x)$ jeweils als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = (\cos(3x))^4 \sin(6x)$

(b) $f(x) = \cos(2x)\,(\sin(x))^2 + (\cos(5x))^3 + (\cos(x))^2\cos(2x)$

Aufgabe H 50. *Ableitungen*

(a) Sei $a \in (0,+\infty)$. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-a)\ln(x)$$

an der Stelle $x_0 = a$ mittels des Differenzenquotienten.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen jeweils ein maximales Intervall auf dem sie durch die gegebenen Terme definiert sind.
Berechnen Sie die Ableitungen mittels der Regeln aus **2.2.1**, **2.2.3** und **2.2.5**:

(i) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x^2\right)$ **(ii)** $h(x) = (x+5)^x$ **(iii)** $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)\cos(x)+1}$

Aufgabe H 51. *Kettenregel*

(a) Differenzieren Sie $\left((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\right)\left(\exp\left(\sin\left(x^3 - 17x^2 + \cos(9x)\right)\right)\right)$.

(b) Es bezeichnen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktionen $g(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 2$ und $h(x) = x^5 + 2x^3 + x$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung von $h \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto h(g(x))$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 3.5.–9.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

17. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 47. *Ableitungen der Umkehrfunktion*

Sei $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty) : x \mapsto x^{\ln(x)}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

(c) Warum ist f^{-1} im Intervall $(1, +\infty)$ differenzierbar? Bestimmen Sie die Ableitung von f^{-1} einmal unter Verwendung des Satzes 2.3.1, sowie einmal über die ermittelte Umkehrfunktion aus **(b)** (ohne Satz 2.3.1) und vergleichen Sie die Resultate.

Aufgabe P 48. *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Sei $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ ein Parameterpaar. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leqq \frac{1}{2} \\ mx + p & \text{für } x > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(m, p) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (2, 0)\right\}$.

(b) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle $\frac{1}{2}$ stetig?

(c) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle $\frac{1}{2}$ differenzierbar?

Aufgabe P 49. *Ableitungen*

Bestimmen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung von f:

(a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{2x - 2}{\sinh(x)}$

(b) $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

Aufgabe P 50. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x - 1}{x + 1}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 52. *Ableitungen*
Sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \arctan(x)\ln(x)$.

(a) Bestimmen Sie die maximale Teilmenge $D \subseteqq \mathbb{R}$, auf der f durch diesen Funktionsterm definiert werden kann.

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Berechnen Sie f' und f''.

Aufgabe H 53. *Ableitungen einer Funktionsschar*
Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + d}$ mit $d > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von h.

(b) Bestimmen Sie das Verhalten von h und h' für x gegen $\pm\infty$.

(c) Bestimmen Sie für h' die Bereiche mit positiven bzw. negativen Funktionswerten.

Aufgabe H 54. *Differenzierbarkeit und Tangente*
Sei $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ ein Parameterpaar mit $p \in (-2, 2)$.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + m & \text{für } x \leqq 0 \\ \dfrac{2}{x^2 + px + 1} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(m, p) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$.

(b) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle 0 stetig?

(c) Für welche Parameterpaare (m, p) ist f an der Stelle 0 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie für den in **(c)** bestimmten Wert von (m, p) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0. Skizzieren Sie diese Tangente an den Graphen.

Aufgabe H 55. *Ableitung der Umkehrfunktion*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\cosh(x))^{\sin(x)}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst und bestimmen Sie damit ein Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ so, dass $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to I$ bijektiv ist.

(c) Nach Aufgabenteil **(b)** gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1} : I \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zu f. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangenten an den Graphen von f^{-1} im Punkt $\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right)$.

Gibt es eine Tangente an den Graphen von f^{-1} im Punkt $(1, 0)$?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 10.5.–16.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

18. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 51. *Die Regel von l'Hospital*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(2x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \bigl(x\,\ln(2^{1/x}+1)\bigr)$

Aufgabe P 52. *Mehr Grenzwerte*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\tan(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sinh(x))^2}{\mathrm{e}^{2x}}$

Aufgabe P 53. *Taylorreihen und Tangenten*
Sei die Funktion $f(x) = x^3 + 1$.

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 1)$.

(c) Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem den Graphen $\Gamma(f)$ von f auf dem Intervall $I = [-1, 2]$ und die beiden Tangenten t_0 und t_1 an $\Gamma(f)$ in $(0, f(0))$ bzw. $(1, f(1))$.

(d) Entscheiden Sie jeweils, ob $\Gamma(f)$ ober- oder unterhalb der Tangente t_0 bzw. t_1 verläuft. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe der Taylorreihe.

Aufgabe P 54. *Taylorreihe und Polynome*
Durch

$$f(x) = -\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} + 4x^2 - 5x + 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \exp(-x^2)$$

sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 1)$.

(b) Bestimmen Sie eine Abschätzung von $R_2(f, x, 1)$ für $x = 0$.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(g, x, 0)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 56. *Die Regel von l'Hospital*

Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^3 \mathrm{e}^{-x}}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{ax^2 + \ln(x)}$

Aufgabe H 57. *Mehr Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1-\mathrm{e}^x)}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$

Aufgabe H 58. *Taylorpolynome*

Wir betrachten die durch $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie alle im Folgenden verlangten Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f^{(j)}(x)$ für $j \in \{0,1,2,3,4\}$ und skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f,x,0)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_4(f,x,0)$ auf dem Intervall $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_1(f,x,1)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_1(f,x,1)$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,2)$ und skizzieren Sie den Graphen von $T_2(f,x,2)$ auf dem Intervall $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Aufgabe H 59. *Taylorreihen*

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f und g.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihen $T(f,x,1)$ und $T(g,x,0)$.

(c) Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(g,x,0)$ und $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 55. *Unbestimmte Integrale*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 56. *Eigenschaften von Integralen*

Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion von f, dass $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Falls f ungerade ist, berechnen Sie $\displaystyle\int_{-b}^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Hinweis zu (b): Benutzen Sie die Substitution $u=-x$.

Aufgabe P 57. *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(x^5-3x)\cos(x^2)+x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x$

Berechnen Sie das Integral in **(a)** auf zwei Arten: sowohl mit Substitution als auch mit partieller Integration.

Aufgabe P 58. *Extrema und Wendepunkte*

Wie betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto -8x\mathrm{e}^{-2x^2}$.

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f, die an der Stelle 0 gleich 2 ist.
Bestimmen Sie die Grenzwerte von $F(x)$ für x gegen $\pm\infty$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von F.
Bestimmen Sie die Wendepunkte von F.

(c) Für jedes in **(b)** bestimmte Extremum und jeden Wendepunkt, bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von F an diesem Punkt.

(d) Skizzieren Sie den Graph von F und die in **(c)** bestimmten Tangenten.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 60. *Unbestimmte Integrale*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int 6x^8 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 61. *Partielle Integration*

Sei

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^n \,\mathrm{d}\,x.$$

Drücken Sie I_n durch I_{n-2} aus und berechnen Sie I_6 und I_7.

Aufgabe H 62. *Extrema und Wendepunkte*

Wie betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 15\,x^2\,(x^2-4)$.

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f, die an der Stelle 1 gleich -17 ist.
Bestimmen Sie die Nullstellen von F.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von F.
Bestimmen Sie die Wendepunkte von F.

(c) Für jeden der in **(b)** bestimmten Extremal- und Wendepunkte, bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von F an diesem Punkt.

(d) Skizzieren Sie den Graph von F und die in **(c)** bestimmten Tangenten.

Aufgabe H 63. *Partielle Integration, Substitution*

Wie betrachten die folgende Funktion.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(\sin(x))^2$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f.

(c) Überprüfen Sie, ob

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{3}(\sin(x))^2 + 5$$

auch eine Stammfunktion von f ist.

(d) Sei F die Stammfunktion von f, die an der Stelle 0 gleich 0 ist. Finden Sie eine lokale Extremstelle von F.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 59. *Partialbruchzerlegung: Ansatz*

Geben Sie **nur den Ansatz** für die reelle Partialbruchzerlegung an (gegebenenfalls nach Polynomdivision). Die unbekannten Konstanten sollen **nicht** ermittelt werden.

(a) $\dfrac{x-10}{x^2+x-12}$ **(b)** $\dfrac{x^2}{(x-2)^3}$ **(c)** $\dfrac{x^4+3x^3-x^2+3x+1}{x^3+x^2}$

Aufgabe P 60. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten der Partialbruchzerlegung der Funktion von Teil (c) der vorangegangenen Aufgabe und bestimmen Sie eine Stammfunktion dieser Funktion.

Aufgabe P 61. *Integrale und Flächeninhalte*

Wir betrachten $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 5-x^2$ und $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x-1$.

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g und skizzieren Sie diese Graphen.

(b) Skizzieren Sie das krummlinig berandete Viereck, das von den Graphen von f und g und von den beiden Achsen eingeschlossen wird und bestimmen Sie seinen Inhalt.

Aufgabe P 62. *Obersumme und Untersumme*

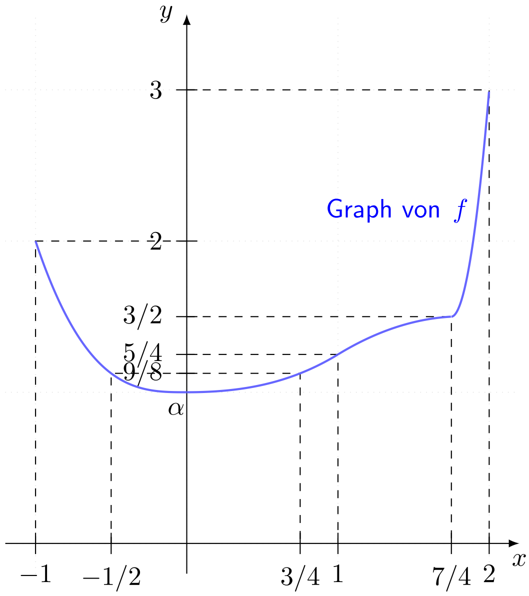
Die Skizze zeigt den Graph einer Funktion f. Diese Funktion nimmt ihr Minimum $\alpha \in \left(0, \frac{9}{8}\right)$ an der Stelle $x=0$ an. In den Fragen (a), (b) und (c) nehmen wir an, dass $\alpha = 1$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von f zur Partition $P := \{-1,0,1,2\}$ eine obere und eine untere Schranke für $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Finden Sie eine Partition $Q = \{-1,a,b,2\}$ so, dass $\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < 2$ gilt.

(c) Stellen Sie die Obersumme von f zur Partition Q graphisch als Flächeninhalt dar.

(d) Sei Q die in (b) bestimmte Partition. Finden Sie eine Minorante für α so, dass die in (b) verlangte Ungleichung noch gültig bleibt.



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 64. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Sei
$$f(x) = \frac{x^5 + 11x^3 + 2x^2 + 17x - 21}{x^3 - x^2 + 9x - 9}.$$

(a) Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von f aus (notfalls nach Polynomdivision mit Rest).

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Aufgabe H 65. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}\,x.$

Aufgabe H 66. *Obersumme und Untersumme*

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{8-x^3}{1+x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' und finden Sie das Maximum von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Wir betrachten die Partition $Q = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ des Intervalls $[-1,1]$.
Stellen Sie die Obersumme $\overline{S}(f,Q)$ graphisch als Flächeninhalt dar.
Berechnen Sie $\underline{S}(f,Q)$ und $\overline{S}(f,Q)$.

(d) Schließen Sie daraus eine obere und eine untere Schranke für den Wert von π.

Aufgabe H 67. *Integrale und Flächeninhalte*

Die Funktionen $f, g, h\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch
$$f(x) = 2\,, \qquad g(x) = |3-x| \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sqrt{|x-1|}.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen.

(b) Skizzieren Sie die Graphen.

(c) Skizzieren Sie die Fläche, die von den Graphen von f und g, von der Geraden $x=2$ und von der Geraden $x=4$ eingeschlossen wird.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. Begründen Sie das Resultat durch eine geometrische Überlegung.

(d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des krummlinig berandeten Vielecks, das von den Graphen von g und h und von der y-Achse eingeschlossen wird.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

21. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 63. *Uneigentliche Integrale*
Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-5}^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x} + x\cdot 3^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 64. *Grenzwertkriterium und Integralvergleichskriterium*

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Grenzwertkriteriums, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{\tan(x)}$ um ihr Ergebnis zu bestätigen.

(c) Untersuchen Sie die Integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{k}\right)$ auf Konvergenz.

Aufgabe P 65. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 66. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitungen von

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 68. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{\arctan(2x)}{4x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 69. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{4}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 70. *Majoranten, Grenzwert und Vergleichskriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2+3}{x^5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(\cos(\pi x)+1)\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}\,x$

(d) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$ auf Konvergenz.

Aufgabe H 71. *Potenzreihen: geschlossene Darstellung*

Wir betrachten die durch Potenzreihen gegebenen Funktionen

$$f\colon(-\rho,\rho)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{und} \qquad g\colon(-\rho',\rho')\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien ρ und ρ' und Reihendarstellungen für die Stammfunktionen F von f bzw. G von g, die $F(0)=0=G(0)$ erfüllen.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für F.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Ermitteln Sie daraus eine geschlossene Darstellung für G und dann für g.
Hinweis: $x^n = x\cdot x^{n-1}$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Folgen in $\mathbb{R}^n$*

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k^2+\sin(k)}{k^2}\right) \in \mathbb{R}^2$

(b) $b_k = \big(\cos(k), \mathrm{e}^{-k}, \sin(k)\big) \in \mathbb{R}^3$

Aufgabe P 68. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \\ \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x, \lambda x)$ stetig?

(b) Ist f stetig?

Aufgabe P 69. *Modell: Funktion in mehreren Veränderlichen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Das Modell stellt den Graphen von f für $(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$ im $\mathbb{R}^3$ dar.
Die Werte von f sind dabei in Richtung der z-Achse aufgetragen.

(a) Skizzieren Sie in ein ebenes Koordinatensystem die Niveaulinie N_0 von f zum Niveau 0. Welche farbigen Linien des Modells stellen N_0 dar? Markieren Sie auf Ihrer Skizze die Bereiche mit positiven Werten von f mit $+$ und die mit negativen Werten von f mit $-$. Entscheiden Sie, welche Achse des Modells die x-Achse ist und welche die y-Achse ist.

(b) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t \in \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$.
Welche farbigen Linien des Modells stellen N_{-1}, $N_{1/2}$ und N_1 dar?

(c) Die Schnitte des Graphen von f mit den Ebenen $E_1 : y = x$, $E_2 : y = 6x$ und $E_3 : y = x/6$ sind auch als farbige Linien auf dem Modell dargestellt. Entscheiden Sie, welche Linie welchen Schnitt darstellt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 72. *Potenzreihen: geschlossene Darstellung*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f\colon (3-\rho, 3+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(2x-6)^k.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung f' von f.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe H 73. *Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \neq -y\right\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

(a) Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t \in \{-4,-2,2,4\}$.

(b) Bestimmen Sie den achsenparallelen Schnitt $\left\{(x, \frac{1}{2}, f(x,\frac{1}{2})) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{1}{2}\right\}$ von f.

(c) Skizzieren Sie diesen Schnitt.

Aufgabe H 74. *Modell: Unstetigkeit*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69**.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Das in der Präsenzübung benutzte Modell des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/04

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x, \lambda x)$ stetig?

(b) Sei $a_n = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$. Ist f bei $(0,0)$ stetig?

Aufgabe H 75. *Modell: Funktion in mehreren Veränderlichen*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69** und **Aufgabe H 74** und dazu die Funktionenschar $g_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x,r)$ (mit $r \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$). Den Graphen von g_r kann man jeweils sehen als den Schnitt der Ebene $E\colon y = r$ mit dem Graphen von f.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von g_2.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von g_r und deren Funktionswerte in Abhängigkeit von r.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} g_r(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g_r(x)$.

(d) Bestimmen Sie jeweils den größten und kleinsten Wert, den f auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 70. *Richtungsableitung, Ableitung längs eines Vektors*
Gegeben ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 3xy\mathrm{e}^z + x^3 z - 2xyz.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $\partial_{(-1,1,3)} f(1,2,0)$ längs $v = (-1,1,3)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_u f(1,2,0)$ längs $u = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,1,3)$.

(d) Finden Sie alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\partial_w f(1,2,0) = 0$.

Aufgabe P 71. *Modell: Schmiegquadriken*
Sei $f\colon (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das Modell stellt den Graphen von f dar.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f. Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_1 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(d) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_1 sowie deren Gestalt.

Aufgabe P 72. *Topologische Eigenschaften*
Betrachten Sie die Teilmengen $M_1 = [0,1]$ und $M_2 = M_1^\circ$ von $\mathbb{R}$, sowie die Teilmenge $M_3 = M_1 \times M_2$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 und M_2 in $\mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Menge M_3 in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie für die Mengen M_2 und M_3 die inneren Punkte und die Randpunkte. Argumentieren Sie mit Hilfe der Definitionen 4.2.14.

(c) Für welche $k \in \{1,2,3\}$ ist M_k abgeschlossen?
Welche dieser Mengen sind weder abgeschlossen noch offen?

(d) Welche dieser Mengen sind beschränkt? Welche sind kompakt?

(e) Welche dieser Mengen sind konvex?

Aufgabe P 73. *Satz von Schwarz*
Gegeben ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{xy^3 - x^3 y}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x,y)$ und $\partial_y f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie $\partial_{xy} f(0,0)$ und $\partial_{yx} f(0,0)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Ableitung als Differentialquotient.

(c) Warum steht das Ergebnis aus (b) nicht im Widerspruch zum Satz von Schwarz?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 76. *Partielle Ableitungen*
Bestimmen Sie für die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 \sin(x_1^2 + x_2 x_3)$$

die folgenden partiellen Ableitungen.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ **(b)** $f_{x_3 x_2}(x)$ **(c)** $\mathrm{D}^{(1,2,1)} f(x)$ **(d)** $\mathrm{D}^{(0,1,1)}\, \mathrm{D}^{(1,1,0)} f(x)$

Aufgabe H 77. *Topologische Eigenschaften*
Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$M_1 = [-1,1] \times [1,2), \quad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 < 4\right\},$$

$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq |x|\right\}, \quad M_4 = M_1 \cap M_3, \quad M_5 = M_2 \cap M_3.$$

(a) Skizzieren sie die Teilmengen M_1, M_2 und M_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(b) Bestimmen Sie für M_1, M_2 und M_3 die inneren Punkte und die Randpunkte.
(c) Welche der Mengen M_1, M_3, M_4 und M_5 ist
(i) abgeschlossen?
(ii) beschränkt?
(iii) kompakt?
(iv) konvex?

Aufgabe H 78. *Modell: Schmiegquadriken*
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/05
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.
(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_2 = (0,0)$.
(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_3 = (\frac{\pi}{2}, 0)$.
(c) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_2 und P_3 sowie die Gestalt dieser Quadriken.
(d) Ist die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_2 beschränkt? Ist sie konvex?

Aufgabe H 79. *Richtungsableitung, Ableitung längs eines Vektors*
Bestimmen Sie jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$ und die Ableitung $\partial_v f(P)$ längs v.
(a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$, $P = (\pi, -\pi)$, $v = (1,-1)$.
(b) $f(x,y,z) = xy\,\mathrm{e}^{-yz^3}$, $P = (1,2,0)$, $v = (1,1,0)$.
(c) $f(x,y,z) = xy\,\mathrm{e}^{-yz^3}$, $P = (1,2,0)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.
(d) $f(x,y,z) = \dfrac{\ln(2 + x^2 + y^2\cos(x))}{1 + z^2}$, $P = (\pi, 1, 2)$, $v = (3,2,1)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

24. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 74. *Kritische Stellen und ihr Typ*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1-y^2}{x^2+1} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3+y^3$$
$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4-1 \qquad j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4+2$$

Führen Sie für die Funktionen f, g, h und j jeweils die Schritte **(a)** bis **(d)** durch:

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-2,2] \times [-2,2] \subseteqq \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ. Bei welchen kann hierbei die Vorzeichenverteilung verwenden werden? Bei welchen die Hesse-Matrix?

Aufgabe P 75. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$. Das Modell zeigt den Graphen von f im Bereich $U_{6/5}(0)$.

(a) Welche der Achsen ist die x- und welche die y-Achse? Durch welche farbigen Linien werden jeweils die Nebenbedingung $x^2+y^2-1=0$ und $y-x^2=0$ beschrieben?

(b) Stellen Sie jeweils für die Nebenbedingungen aus **(a)** das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode von Lagrange auf und lösen Sie es. Welche Werte nimmt f an den berechneten Stellen an?

(c) Bei welchen Stellen hilft der Satz vom Minimum und Maximum zur Typbestimmung? Bei welchen die Vorzeichenverteilung?

Aufgabe P 76. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y-1)^2(x^2-y)$ und $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2-2$. Gehen Sie wie folgt vor, um die Extremwerte von f auf M zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-2,2] \times [-1,4] \subseteqq \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und deren Typ.

(c) Verwenden Sie die Methode von Lagrange, um die Extremwerte von f auf dem Rand $\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = 0\right\}$ zu finden.

(d) Bestimmen Sie mittels der Aufgabenteile **(b)** und **(c)** die Extremwerte von f auf M.
Hinweis: Verwenden Sie $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Aufgabe P 77. *Differentiation vektorwertiger Funktionen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z+\sin(xy) \\ x^2\cos(yz) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{J}f\,(2,0,1)$

(b) Bestimmen Sie die lineare Approximation zu f im Punkt $(2,0,1)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 80. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2 - x^2 - 1)\,(x^2 + (y-1)^2 - 4)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-3,3] \times [-2,4]$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Aufgabe H 81. *Extremwerte unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2y^2 - 3y^2 + z^2 + z$ und $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0\right\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode nach Lagrange auf.

(b) Bestimmen Sie damit die Kandidaten für die Extremstellen von f auf M.

(c) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f in M.

(d) Sei $N := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x,y,z) = 0 = h(x,y,z)\right\} \subseteqq M$ mit $h(x,y,z) = y^2$. Bestimmen Sie den maximalen Wert, den f auf N annimmt.

Aufgabe H 82. *Extremwertesuche auf einem Kompaktum*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2 + y^2)$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2 + y^2$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N_0 von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Bereich $U_3(0)$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein. Bestimmen Sie jeweils den Typ.

(c) Bestimmen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren das Maximum und das Minimum von f auf $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = \frac{3\pi}{2}\right\}$.

(d) Bestimmen Sie die Extremwerte, die f auf der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) \leqq \frac{3\pi}{2}\right\}$ annimmt und geben Sie jeweils eine zugehörige Stelle $(x,y) \in M$ an.

Aufgabe H 83. *Modell: Extrema unter Nebenbedingungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$, sowie $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y^2 = 0\right\}$ und $N := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06/

(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$.

(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Parametrisieren Sie M durch eine Funktion $c\colon \mathbb{R} \to M$. Prüfen Sie die Existenz von Extremwerten von f auf M, indem Sie die Funktion $f \circ c$ untersuchen.

(d) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N und ermitteln sie jeweils deren Typ.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.7.–11.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

25. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 78. *Divergenz, Rotation und Jacobi-Matrix*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^z \cos(xy) \\ \mathrm{e}^z \sin(xy) \\ xyz \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x^2+y^2)z \\ xy\sin(z) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und g.

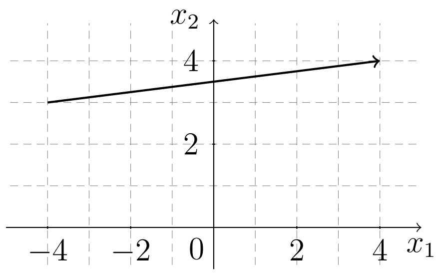
(b) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von f.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{J}(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}, 1, 0\right)$.

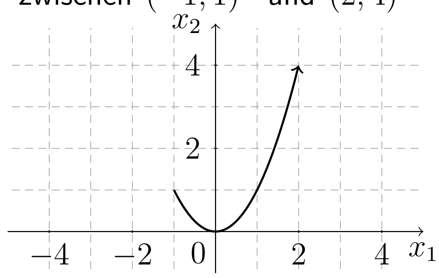
Aufgabe P 79. *Parametrisierung von Kurven*

Geben Sie jeweils eine reguläre Parametrisierung der abgebildeten Kurven an.

Strecke von $(-4,3)^\intercal$ nach $(4,4)^\intercal$



Graph von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ zwischen $(-1,1)^\intercal$ und $(2,4)^\intercal$



Aufgabe P 80. *Potential*

Bestimmen Sie jeweils ein Potential für die folgenden Gradientenfelder.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+2y \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$

(c) $h\colon D \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yz^x\ln(z) + x \\ z^x + 3y^2\cos(z) \\ xyz^{x-1} - y^3\sin(z) \end{pmatrix}$ für $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z > 0\right\}$

Aufgabe P 81. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_2^3 + x_1^2 x_2$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E an den Graphen

$$\Gamma(f) = \{(x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \mid (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

von f im Punkt $P = (1,0,f(1,0))$.

(b) Geben Sie die Tangente im Punkt $(1,0)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 1 an.

(c) Bestimmen Sie $E \cap \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$. Vergleichen Sie mit **(b)**.

(d) In welche Richtung wird ein Ball auf $\Gamma(f)$ rollen, wenn man ihn in P loslässt?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 84. *Rotation und Potentiale*

Berechnen Sie jeweils die Rotation der folgenden Vektorfelder. Welche besitzen ein Potential?

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x^3y - y^2z + z^2 \\ x^4 - 2xyz \\ 2xz - xy^2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\,\mathrm{e}^x \sin(y) \\ z\,\mathrm{e}^x \cos(y) \\ \mathrm{e}^x \sin(y) \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \colon D \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{xy}{z} \\ x\ln(z) \\ x^2 z \end{pmatrix}$ für $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z > 0\right\}$

Aufgabe H 85. *Divergenz, Rotation und Jacobi-Matrix*

Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\sin(y^2) \\ xz\cos(y) \\ x\,\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}$ und $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^y + z \\ y^2\cos(z) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und g.

(b) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation von f.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{J}(g \circ f)\,(\pi, 0, 1)$.

Aufgabe H 86. *Laplace-Operator*

Welche der folgenden Abbildungen sind harmonisch?

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto x^3y - xy^3$.

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon (x,y,z) \mapsto x^2 - 2z^2 + \cos^2(x) + 2y^2\sin^2(x)$.

(c) $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x\sin(y) + \mathrm{e}^y\cos(z)$.

Aufgabe H 87. *Parametrisierung von Kurven*

Bestimmen Sie eine stückweise reguläre Parametrisierung der folgenden Kurven.

(a) Der Streckenzug von $(0,0)^\intercal$ über $(-3,-2)^\intercal$ und $(-1,-4)^\intercal$ nach $(0,0)^\intercal$.

(b) Das Stück eines (im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen) Kreises um $(3,2)^\intercal$ von $(3,-1)^\intercal$ nach $(6,2)^\intercal$.

(c) Das Stück eines (im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn durchlaufenen) Kreises um $(3,2)^\intercal$ von $(6,2)^\intercal$ nach $(3,-1)^\intercal$.

(d) Die Kurve $K = \left\{(x,y,z) \in Q \,\middle|\, x = y,\, z \geqq 0\right\}$ von $(1,1,0)^\intercal$ nach $(-1,-1,0)^\intercal$, wobei $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z = 2\right\}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Geyer
S. Nitsche
M. Pressland
A.L. Thiel

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Apl. Prof. M. Stroppel

Sommersemester 2018

Präsenzübungen

Aufgabe P 82. *Kurvenintegrale*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ und sei K der Rand des Quadrats mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert.

(a) Berechnen Sie $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

(b) Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$, für das Vektorfeld $g = \operatorname{grad} f$.

Aufgabe P 83. *Potential durch Hakenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u + uv^2 \\ u^2 v + 3v^2 \end{pmatrix} .$$

Wir verwenden die Parametrisierungen

$$H_a\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{a,b}\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} ,$$

abhängig von a, $b \in \mathbb{R}$. Sei $K_{a,b}$ die Kurve, die sich als Zusammensetzung der Kurven ergibt, die von H_a und $V_{a,b}$ parametrisiert werden, und die als Anfangspunkt $(0,0)^\intercal$ hat.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und begründen Sie, warum g ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $U(a,b) := \int_{K_{a,b}} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ von g längs $K_{a,b}$.

(c) Vergleichen Sie $\operatorname{grad} U(u,v)$ und $g(u,v)$. Geben Sie ein Potential von g an.

Aufgabe P 84. *Kurvenintegrale und Potential*

Gegeben seien die Vektorfelder

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto (-x_2, x_1 - 1)^\intercal$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal \mapsto (x_1 - 1, -x_2)^\intercal$.

Weiterhin sind die Kurven

K parametrisiert durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (2 - 2\cos(t), 1 - 2\sin(t))^\intercal$ und
M parametrisiert durch $D\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (4t, 1)^\intercal$

von $(0,1)^\intercal$ nach $(4,1)^\intercal$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie ein Potential des Gradientenfeldes h.

(b) Verwenden Sie Satz 5.3.10, um das Kurvenintegral $\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ zu bestimmen.

(c) Verwenden Sie Definition 5.3.1, um die Kurvenintegrale $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ zu bestimmen.

(d) Bestimmen Sie die Kurvenintegrale $\int_M g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_M h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teil (b) und (c). Entscheiden Sie, ob ein Potential für g existieren kann.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 88. *Kurvenintegrale von Vektorfeldern*

Sei $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y^2 = z^2,\ 0 \leqq z \leqq 2,\ y \geqq 0\right\}$.
Berechnen Sie die Kurvenintegrale der folgenden Vektorfelder längs der Kurve K von $(0,0,0)$ nach $(4,2,2)$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x^2y \\ -5xyz \\ y\,\mathrm{e}^z \end{pmatrix}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$.

(*Hinweis:* Vergleichen Sie mit Aufgabe P80.)

Aufgabe H 89. *Länge einer Kurve und Kurvenintegral*

Sei K die Kurve $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \cosh(x),\ 0 \leqq x \leqq 2\right\}$.

(a) Bestimmen Sie die Länge von K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y\cosh(x)$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} + (\alpha-1)x_2 \\ x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + \alpha(x_2-1) \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K durch $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Umlaufintegral $\displaystyle\oint_K g_\alpha(x)\bullet\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 91. *Zirkulation und Ausfluss*

Für ein Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine geschlossene Kurve K in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise regulärer Parametrisierung $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$, nennen wir

$$Z(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

die *Zirkulation* von f längs K und

$$A(f,K) = \int_a^b f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t$$

den *Ausfluss* von f durch K.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6xy \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ und sei K der Rand des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, im mathematisch positiven Sinn orientiert. Berechnen Sie

(a) die Zirkulation $Z(f,K)$ von f längs K.

(b) den Ausfluss $A(f,K)$ von f durch K.