A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 54. *Geometrische Reihen*

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{6^n}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{15}{7^{2n-1}}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 7^n-19\cdot 3^n}{14\cdot 21^n}$,

(d) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

Aufgabe P 55. *Teleskopreihen*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a.

(a) Berechnen Sie die Partialsummen $\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)$ für $N=1,2,3,4,5,1000$.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+4}-a_n)$.

Aufgabe P 56. *Alternierende Reihen ohne Leibnizkriterium*

Gegeben seien die Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{3+(-1)^n}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{, falls } n \text{ gerade,}\\ \frac{1}{2^n} & \text{, falls } n \text{ ungerade.}\end{cases}$

Wieso darf man jeweils nicht das Leibnizkriterium anwenden?
Untersuchen Sie die Reihen jeweils auf Konvergenz.

Aufgabe P 57. *Konvergenz und absolute Konvergenz*

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n$,

(b) $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^n}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 57. *Potenzreihe*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}(\alpha - 4)^n$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man eine Aussage über das Konvergenzverhalten mit Hilfe des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums treffen, für welche nicht?

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe für $\alpha \in \left\{\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right\}$.

Aufgabe H 58. *Konvergenzkriterien*

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

(a) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie eine geeignete konvergente Majorante angeben.

(b) Weisen Sie Konvergenz nach, indem Sie das Wurzelkriterium verwenden.

(c) Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe getroffen werden kann.

Aufgabe H 59. *Reihenwerte bestimmen*

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe aus Aufgabe **H 58**, indem Sie diese in geeigneter Weise als Summe zweier geometrischer Reihen schreiben.

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} - \frac{n}{n+1}\right)$.

Aufgabe H 60. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n \cdot (n!)^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7(3^n+5^n)}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.04.–24.04.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse ($<$st$*****$**@stud.uni-stuttgart.de$>$) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 58. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+(\sin(x))^2}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi x^3}{3x^3+x^2+1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1}$.

Aufgabe P 59. *Grenzwerte und Stetigkeit*

Seien p, q reelle Parameter. Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{für } x\leqq 2,\\ px^2+2 & \text{für } x>2,\end{cases} \quad \text{und} \quad g(x)=\begin{cases} x+4 & \text{für } x\leqq 0,\\ \dfrac{\sin(qx)}{x} & \text{für } x>0.\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$.

(b) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle 2 stetig?

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0-0} g(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0+0} g(x)$.

(d) Für welche Werte des Parameters q ist g an der Stelle 0 stetig?

Aufgabe P 60. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{für } x\leqq -1,\\ x^2+x & \text{für } x>-1.\end{cases}$

Sei eine Fehlerschranke $1>\varepsilon>0$ gegeben.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1>0$ mit $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ für $x\in[1,1+\delta_1)$.

(c) Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_2>0$ mit $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ für $x\in(1-\delta_2,1]$.

(d) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f im Punkt 1 stetig ist.
Hinweis: Benutzen Sie $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

(e) Wählen Sie ein $\varepsilon>0$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert -1 so, dass

$$|f(a_n)-f(-1)|\geqq\varepsilon$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass f im Punkt -1 nicht stetig ist.

Aufgabe P 61. *Grenzwerte und Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x(x-|x|)$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$.

(c) Ist f an der Stelle 0 stetig? Erklären Sie Ihre Antwort.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 61. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x+1}+\cos(x)}{\sqrt{4x^2-2x}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}x^3}{2\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{x}}$.

Aufgabe H 62. *Einseitige Grenzwerte*

Untersuchen Sie die Grenzwerte $\displaystyle\lim_{x\to0+0} f(x)$ und $\displaystyle\lim_{x\to0-0} f(x)$ für

(a) $\displaystyle f(x)=\frac{3x^2}{2\sin(x)\sqrt{x^2}}+\frac{2x^2+x+3}{4x^2+1}$,

(b) $\displaystyle f(x)=\frac{\tan(x)+x^2\cos(x)+1}{3x^2\sin(x)}$.

Hinweise: Sie sollen die Regel von l'Hospital *nicht* anwenden!

Aufgabe H 63. *Stetigkeit*

Sei $p \geqq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x^3-2x^2-x+2)}{1-x} & \text{für } x<1,\\ \sqrt{x^2+px}-\sqrt{x^2+7x+1} & \text{für } x\geqq 1.\end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p.

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle 1 stetig?

Aufgabe H 64. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-3,3]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases}\left(\sin(\frac{1}{x})\right)^2 & \text{für } x<0,\\ x^2+2x+1 & \text{für } x\geqq 0.\end{cases}$

(a) Zeigen Sie mittels der ε-δ-Definition, dass f im Punkt 2 stetig ist.

(b) Finden Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils mit Grenzwert 0 derart, dass gilt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n)=1$ und $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(b_n)=0$.

(c) Ist f stetig im Punkt 0? Erklären Sie Ihre Antwort.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.4.–1.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

17. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 65. *Zwischenwertsatz*

Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Gleichung $x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0$ hat mindestens zwei verschiedene Lösungen, die im Intervall $(0, 2)$ liegen.

(b) Die Gleichung $\dfrac{13x + 12}{x^4 - 1} = 1$ hat eine Lösung im Intervall $(-1, 1)$.

(c) Die Gleichung $\mathrm{e}^x + \ln(x) = 3$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{R}^+$.

Aufgabe H 66. *Minimum und Maximum*

Gegeben ist das Polynom $q(x) = x^5 - 8x^2 + 4$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$f(x) = |q(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $(-2, 2)$ eine Minimalstelle x_- hat mit $f(x_-) < 4$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) \geqq 4$ für alle $|x| \geqq 2$.

(c) Nimmt f auf $\mathbb{R}$ ein Minimum an? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H 67. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-1)^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+1)^n}{n+3}$

Zeichnen Sie jeweils den Konvergenzkreis und entscheiden Sie, welche der Reihen an welchen der folgenden Stellen konvergieren: $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 2$, $z_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}$.

Aufgabe H 68. *Die komplexe Exponentialfunktion*

Gegeben ist die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z$.

(a) Bestimmen Sie $|\exp(r + \mathrm{i}\varphi)|$ und $\arg(\exp(r + \mathrm{i}\varphi))$ für $r, \varphi \in \mathbb{R}$.
(Beachten Sie, dass das Argument im Intervall $[0, 2\pi)$ liegen muss.)

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(c) Bestimmen Sie eine Menge $S \subseteqq \mathbb{C}$ so, dass die Einschränkung $\exp|_S\colon S \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ mit $\exp|_S(z) = \exp(z)$ bijektiv ist.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 2.5.–8.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 62. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie jeweils den Entwicklungspunkt sowie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und skizzieren Sie die zugehörigen Konvergenzkreise.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n \left(z + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{i}\right)^n$.

Aufgabe P 63. *Potenzreihenentwicklung komplexer Funktionen*

Es sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}\colon f(z) = \frac{1}{2-z}$.

(a) Bestimmen Sie eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die innerhalb ihres Konvergenzkreises mit f übereinstimmt. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.
Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)}$ und benutzen Sie die geometrische Reihe.

(b) Gehen Sie vor wie in **(a)** für die Entwicklungspunkte $z_1 = 3$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$.
Hinweis: Hier die geometrischen Reihen zu finden ist etwas schwieriger. Fragen Sie im Zweifel Ihre(n) Tutor(in), aber versuchen Sie sich auf jeden Fall zunächst selbst.

Aufgabe P 64. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f und f'. Berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{x^n}{n}$,

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{51} \frac{x^n}{n}$,

(c) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}$,

(d) $f(x) = x^x$,

(e) $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+1})$,

(f) $f(x) = \frac{1+\sin(x)^2}{1+\cos(x)^2}$.

Aufgabe P 65. *Differenzierbarkeit*

Skizzieren Sie folgende Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x-1|\,.$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 69. *Randuntersuchung*

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} z^n$. Untersuchen Sie die Potenzreihe an den folgenden Stellen auf Konvergenz.

$$z_1 = \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}, \quad z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \quad z_4 = 1 + \mathrm{i}.$$

Aufgabe H 70. *Konvergenz von Potenzreihen*

Für $\alpha \in \{3, -4\}$ sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\mathrm{i})^n + \alpha^n}{n^\alpha + 1} (z - 2 + \mathrm{i})^n$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

Aufgabe H 71. *Ableitungen und Differenzierbarkeit*

(a) Bestimmen Sie jeweils Intervalle $I \subseteqq \mathbb{R}$ von maximaler Größe so, dass die folgenden Ausdrücke Funktionen von I nach $\mathbb{R}$ definieren. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktionen.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad g(x) = \ln\left(1 - x^4\right).$$

(b) Bestimmen Sie ein Intervall $I \subseteqq \mathbb{R}$ von maximaler Größe so, dass der Ausdruck

$$f(x) = \sqrt{(2x - 3) \cdot (2 - x)^3}$$

eine Funktion von I nach $\mathbb{R}$ definiert. Untersuchen Sie diese Funktion auf Differenzierbarkeit. Betrachten Sie dabei insbesondere die Randpunkte des Definitionsbereiches.

Aufgabe H 72. *Differenzierbarkeit*

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Ist f überall differenzierbar? Bestimmen Sie f' an allen Stellen, an denen es existiert. Ist f' auf seinem Definitionsbereich stetig? Ist f' auf seinem Definitionsbereich differenzierbar?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 9.5.–15.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

19. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 66. *Quotientenregel*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\sinh(x^2)}{\cosh(x^2)}$,

(b) $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe P 67. *Höhere Ableitungen*

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$. Zeigen Sie durch Induktion für $n \geqq 0$, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = (2x+n)2^{n-1}\mathrm{e}^{2x}.$$

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh(x)\cosh(x).$$

Aufgabe P 68. *Ableitungen der Umkehrfunktion*

Sei $f\colon [0,+\infty) \to [-1,+\infty)\colon x \mapsto 4x^4 + x^2 - 1$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(c) Finden Sie x_1 und x_2 so, dass $f(x_1) = -\frac{1}{2}$ und $f(x_2) = 4$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f^{-1} an den Stellen $-\frac{1}{2}$ und 4.

Aufgabe P 69. *Die Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{\mathrm{e}^{2x}+\sin(x)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+\ln(3x)}{x^2+\ln(x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+2x^4-\exp(x^3)}{2x^3}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\tan(x)$.

Aufgabe P 70. *Quotientenregel*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\tan x}{\cos x} + \dfrac{x^2\cdot 2^x}{\ln(x^2)}$,

(b) $f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln x} + \dfrac{\ln(x+2)}{x^2}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 73. *Ableitungsregeln*

Berechnen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$,

(b) $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1+x^2}{\arctan x}$.

Aufgabe H 74. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}{2}$,

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.

Aufgabe H 75. *Ableitungen der Umkehrfunktion*

Sei $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2^x \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Begründen Sie, warum f injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W = f([0,3])$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to [0,3]$ an den Stellen $f(1) = 1$ und $f(2) = 2\sqrt{3}$.

Aufgabe H 76. *Die Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{x^3+2x}{\mathrm{e}^{3x}-1}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin(2x)\cos(2x)\tan(x)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(3^{\frac{1}{x}}-1)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.5.–22.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 71. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_n(f,x,x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3+2x\,,\ n=3,\ x_0=1\,.$

(b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}\,,\ n=4,\ x_0=0\,.$

(c) $f\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{x^2}{\sin(x)}\,,\ n=2,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}\,.$

Aufgabe P 72. *Extrema und Wendepunkte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 3x^5-5x^3+5\,.$

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)\,.$

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von $f\,.$

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right].$
Skizzieren Sie die Tangenten in den Wendepunkten.

Aufgabe P 73. *Taylorreihen*

Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(x)\cos(x)\,.$

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ die n-te Ableitung von $f\,.$

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe $T\left(f,x,\dfrac{\pi}{2}\right).$

(c) Zeigen Sie durch Abschätzen des Restglieds nach Lagrange, dass $T\left(f,x,\dfrac{\pi}{2}\right)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe P 74. *Extrema und Wendepunkte*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^4\mathrm{e}^x$

(b) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin x+x$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 77. *Konvergenz von Taylorreihen*

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x)$.

(a) Finden Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f,x,1)$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $T(f,x,1)$.

(d) Für welche reellen Zahlen x konvergiert diese Potenzreihe?

Sind Sie sicher, dass die Reihe (für die Stellen x, an denen sie konvergiert) tatsächlich gegen $f(x)$ konvergiert?

Aufgabe H 78. *Extrema und Wendepunkte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$.

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

Aufgabe H 79. *Taylorreihen und Restglied*

Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{3x}$.

(a) Finden Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und verifizieren Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f,x,0)$.

(c) Zeigen Sie durch Abschätzen des Restglieds nach Lagrange, dass $T(f,x,0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(d) Bestimmen Sie ein $C > 0$ so, dass

$$|f(x) - T_2(f,x,0)| \leqq Cx^3$$

für alle $x \in [0,1]$ ist.

Aufgabe H 80. *Extrema und Wendepunkte*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-4,4]$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.5.–29.5.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

21. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 75. *Partielle Integration und Substitution*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale. Überprüfen Sie Ihre Resultate mittels Ableitung.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(e)** $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 76. *Partialbruchzerlegung*

Finden Sie jeweils die Partialbruchzerlegung für die folgenden gebrochen rationalen Funktionen:

(a) $\displaystyle\frac{x+1}{x^2-9}$ **(c)** $\displaystyle\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}$

(b) $\displaystyle\frac{x+1}{x^2+9}$ **(d)** $\displaystyle\frac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

Aufgabe P 77. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden beiden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x+1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Nutzen Sie die Partialbruchzerlegungen aus Aufgabe P 76.

Aufgabe P 78. *Partielle Integration*

Zeigen Sie, dass für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b xf''(x)\ \mathrm{d}\,x = bf'(b) - f(b) + f(a) - af'(a)\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 81. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 82. *Integrale und Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = n! - \frac{n!}{\mathrm{e}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right).$$

Aufgabe H 83. *Stammfunktion*

Gegeben ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 3\cos(x) - 2\sin(x) & \text{für } x < 0, \\ 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} + 4 & \text{für } x \geqq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 stetig ist. Ist f an der Stelle 0 auch differenzierbar?

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.

Aufgabe H 84. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Geben Sie für die folgenden beiden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an:

(a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$

(b) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{3x^4}{x^4+5x^2+4}$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.5.–5.6.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

22. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 79. *Partitionen (Feinheit vs. Verfeinerung)*
Wir betrachten die folgenden Partitionen des Intervalls $[0, 10]$:

$$P_1 = \{0, 1, 4, 9, 10\}, \quad P_2 = \left\{ \frac{j}{10} \;\middle|\; j \in \{0, \dots, 100\} \right\}, \quad P_3 = \{0, 1, \sqrt{2}, 3, 5, 7, 9, 10\}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Feinheit der Partition.
Welche dieser Partitionen sind Verfeinerungen voneinander?

Aufgabe P 80. *Ober- und Untersummen-Challenge*
Gegeben seien die Funktionen $f_j \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, mit

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{, für } x \in [-1, 1/2], \\ \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} & \text{, für } x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad f_3(x) = 1 - x^4.$$

Wählen Sie für jede Funktion f_j eine Partition $P_j = \{-1, x_1, x_2, x_3, x_4, 1\}$ und berechnen Sie die zugehörigen Ober- und Untersummen $\overline{S}(f_j, P_j)$ bzw. $\underline{S}(f_j, P_j)$.
Wer in Ihrer Übungsgruppe erhält die kleinsten Differenzen $\overline{S}(f_j, P_j) - \underline{S}(f_j, P_j)$?

Aufgabe P 81. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*
Bestimmen Sie die Menge aller $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, für die das folgende Integral konvergiert:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\alpha}}{(1 + x^2)^\beta} \,\mathrm{d}\, x.$$

Aufgabe P 82. *Berechnung uneigentlicher Integrale*
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{-x^2 + 8x - 1}{(x - 1)^2(1 + x^2)} \,\mathrm{d}\, x,$ **(b)** $\displaystyle\int_{1+0}^{+\infty} \frac{-x^2 + 8x - 1}{(x - 1)^2(1 + x^2)} \,\mathrm{d}\, x.$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 85. *Riemannsche Summen*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die (äquidistante) Partition $P_n := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k = 2n, 2n+1, \ldots, 4n-1, 4n \right\}$ des Intervalls $[2,4]$.

(a) Geben Sie $\underline{S}(f, P_n)$ sowie $\overline{S}(f, P_n)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)\right) = 0$.

Bemerkung: Daraus folgt insbesondere, dass f Riemann-integrierbar ist und dass sich das (Riemann-)Integral ergibt als $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n)$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{k}{n^2} \mathrm{e}^{\left(\frac{k^2}{n^2}\right)}$.

Aufgabe H 86. *Konvergenz uneigentlicher Integrale I*

(a) Zeigen Sie: konvergiert $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$, so gilt für alle $c > 0$, dass

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t+c} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

(b) Benutzen Sie **(a)**, um zu zeigen, dass $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ divergiert, falls $\alpha \geqq 0$.

Hinweis: Schätzen Sie $\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $k \in \mathbb{N}$ geeignet ab.

(c) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert für alle $\alpha < 0$.

Aufgabe H 87. *Konvergenz uneigentlicher Integrale II*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\,\mathrm{d}\,x$,

(b) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}\,x$,

(c) $\displaystyle\int_{1+0}^{\mathrm{e}} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$,

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 88. *Berechnung uneigentlicher Integrale*

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2-0} x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\mathrm{d}\,x$,

(b) $\displaystyle\int_1^{3-0} \ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|\mathrm{d}\,x$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 6.6.–19.6.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 83. *Folgen in* $\mathbb{R}^n$

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{k^2}{k!} + 2, \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$

(b) $b_k = \left(\frac{1}{k^2}, \cos(\pi k)\right)$

(c) $c_k = \left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}, \frac{2k+1}{k}\right)$

Aufgabe P 84. *Ableitungen von Potenzreihen*

Wir betrachten die Funktion $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+3}\, x^{3k+3}$,

wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+3}\, x^{3k+3}$ ist.

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Beschreiben Sie die Ableitung f' durch eine Potenzreihe.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung der Funktion f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 85. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0. \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t = -\frac{1}{2}$, $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

(c) Ist f in $(0,0)$ stetig?

Aufgabe P 86. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)^2}$, **(b)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-2}$, **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$.

Hinweis: Wenn Sie das Integral-Vergleichskriterium nutzen möchten, müssen Sie die Gültigkeit der Voraussetzungen prüfen!

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 89. *Integrale von Potenzreihen*

Wir betrachten die Funktion $f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, x^{2k-1}$, wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2k\, x^{2k-1}$ ist.

(a) Beschreiben Sie eine Stammfunktion von f durch eine Potenzreihe, und berechnen Sie den Konvergenzradius ρ.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Stammfunktion F von f, die $F(0) = 1$ erfüllt.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $g\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, x^{2k+1}$.

Aufgabe H 90. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-1}$.

Aufgabe H 91. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \dfrac{x^2+y^2}{x} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})$.

(b) Ist f in $(0,0)$ stetig?

(c) Gibt es ein $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ so, dass f in $(0,y)$ stetig ist?

Aufgabe H 92. *Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y,z) \in \mathbb{R}(0,1,0) \cup \mathbb{R}(0,0,1), \\ \dfrac{xyz}{x^2+y^2z^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x,x,\lambda x)$ stetig?

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

(c) Ist f stetig?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.6.–26.6.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

24. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 87. *kompakt, beschränkt, abgeschlossen, offen, konvex*

Überprüfen Sie, ob die Mengen A bis E abgeschlossen, beschränkt, offen, kompakt bzw. konvex sind.

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

(b) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

(c) $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in B \wedge y < 1\}$

(d) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in B \wedge y \leqq 2\}$

(e) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leqq 1\}$

Aufgabe P 88. *Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin\left(x_1 + 2x_2 + x_3^3 + \tfrac{1}{4}x_4\right)$$

die partiellen Ableitungen

(a) $f_{x_3}(x)$, **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial_{x_4}\partial_{x_1}} f(x)$, **(c)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$, **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,1,0)}\left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$.

Aufgabe P 89. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f \colon [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \cos(x)\cos(y)$.

Das Modell stellt den Graphen von f dar.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f. Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_1 = \binom{\pi/2}{\pi/2}$.

(d) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f im Punkt P_1 sowie deren Gestalt.

Aufgabe P 90. *Satz von Taylor in höheren Dimensionen*

Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2y + 4y^2$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f und die Hesse-Matrix von f.

(b) Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f in den Punkten $P_1 = \binom{0}{-1}$ und $P_2 = \binom{-2}{2}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 93. *Innere Punkte, Rand, Abschluss*

Bestimmen Sie für folgende Mengen jeweils die inneren Punkte sowie Rand und Abschluss.

(a) $M_1 := \{\frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

(b) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) < 1\}$

(c) $M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1$ und $xy \neq 0\}$

(d) $M_4 := (\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1\} \cup \mathbb{R}(0,0,1)) \smallsetminus (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$

Aufgabe H 94. *Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = \mathrm{e}^{x^2-1} \cdot (-2 + x^2 + y^2)$ und $\binom{x_0}{y_0} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x_0}{y_0}$ und $\mathrm{H}f\binom{x_0}{y_0}$. Ist f total differenzierbar?

(b) Berechnen Sie für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{x}{y}$ von f in Richtung des Vektors $v := \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$.

(c) Bestimmen Sie im Punkt $\binom{1}{2}$ die Richtung des steilsten Anstieges von f, d.h. einen Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $|v_0| = 1$ so, dass $\partial_{v_0} f\binom{1}{2}$ maximal wird.

Aufgabe H 95. *Satz von Taylor in höheren Dimensionen*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $(2,-1,0)^\intercal$ sei

$$\mathrm{T}_2(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = 3 - 2(x-2) + 4z + 9(x-2)z + 3(y+1)^2.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(2,-1,0)^\intercal$.

(b) Bestimmen Sie $T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal)$.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g,h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an mit

$$T_1(g,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = T_1(h,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal) = T_1(f,(x,y,z)^\intercal,(2,-1,0)^\intercal).$$

Aufgabe H 96. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter: https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_2 = \binom{0}{\pi}$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_3 = \binom{\pi/2}{0}$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Tangentialebene an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3.

(d) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Schmiegquadrik an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3 sowie die Gestalt dieser Quadriken.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 27.6.–3.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

25. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 91. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy^2$. Das Modell zeigt den Graphen von f im Bereich $U_{6/5}(0)$.

(a) Welche der Achsen ist die x- und welche die y-Achse? Durch welche farbigen Linien werden jeweils die Nebenbedingung $x - y^2 = 0$ und $x^2 - y^2 = 1$ beschrieben?

(b) Stellen Sie jeweils für die Nebenbedingungen aus **(a)** das Gleichungssystem gemäß der Multiplikatormethode von Lagrange auf und lösen Sie dieses Gleichungsystem.

(c) Können Sie anhand des Modells entscheiden, welche der Lösungen aus **(b)** Extremstellen sind? Welche sind lokale Maximalstellen und welche sind lokale Minimalstellen?

(d) Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y^2 = 0 \right\}$. Parametrisieren Sie M durch eine Funktion $c\colon \mathbb{R} \to M$. Benutzen Sie diese Funktion, um Ihre Behauptungen zu **(c)** über die Extremstellen von f auf M zu begründen.

Aufgabe P 92. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ; das heißt, entscheiden Sie, welche lokale Maximalstellen, welche lokale Minimalstellen und welche Sattelpunkte sind.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3 + y^3 - 12x - 3y$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x^3 + y^2 - 6xy - 8y$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3 + y^3$

Aufgabe P 93. *Multiplikatormethode nach Lagrange*

Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2xz + y^2 + 3 = 0 \right\}$. Finden Sie die Punkte in M, die den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 97. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2 + z^2$ und $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{matrix} \right\}$.

(a) Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Ermittlung der lokalen Extremstellen von $f|_K$, also von der Einschränkung von f auf K.

(b) Finden Sie die kritischen Stellen, indem Sie das Gleichungssystem aus **(a)** lösen.

(c) Bestimmen Sie $\max(f(K))$ und $\min(f(K))$.

Aufgabe H 98. *Lokale Extrema*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 - 2x - 3)(y^2 - 2y)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Aufgabe H 99. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy^2$

sowie $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$ und $N := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - x^2 = 0 \right\}$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell von f finden Sie auch unter:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/06/

(a) Skizzieren sie die Nullstellenmenge N_0 und die Vorzeichenverteilung von f sowie die Mengen M und N im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf M und ermitteln sie jeweils deren Typ.

(c) Bestimmen Sie mit der Multiplikatormethode von Lagrange alle Kandidaten für Extremstellen von f auf N. Welche dieser Kandidaten sind lokale Maximum- oder Minimumstellen?

Aufgabe H 100. *Extremwerte*

Wir betrachten die Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2y^2 - 4x$ für

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 9 \right\}.$$

Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von f.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 4.7.–10.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

26. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 94. *Differentiation vektorwertiger Funktionen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ u^2v \\ u+v \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{J}f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

(b) Schreiben Sie für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Matrix $\mathrm{J}g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ als einen Ausdruck in $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{J}(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Aufgabe P 95. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x-y)(x^2+y^2-4)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge $N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$.

(b) Berechnen Sie ∇f.

(c) In welchen der folgenden Punkte existieren Tangenten an N_0? Berechnen Sie an diesen Punkten die Tangenten und zeichnen Sie sie in Ihre Skizze ein.

- $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe P 96. *Potentiale*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Vektorfelder konservativ sind. Finden Sie jeweils ein Potential für die konservativen Vektorfelder.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xz + \cos(x) \\ \mathrm{e}^{yz}(yz+1) \\ x^2 + y^2\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}$.

(b) $f\colon D \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{y^2+z^2} \\ -\frac{y}{y^2+z^2} \end{pmatrix}$ für $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe P 97. *Einfacher Zusammenhang*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen einfach zusammenhängend sind:

(a) $M_1 = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 4 \right\}$,

(c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 = 1 \right\}$,

(d) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2-z^2 = 4 \right\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 101. *Differentiation vektorwertiger Funktionen*

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x^2z^2 \\ x^2y+y^2z \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2w^2 \\ u+v \\ v^2w^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\mathrm{J}f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ **(b)** $\mathrm{J}g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right)$ **(c)** $\mathrm{J}(g\circ f)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe H 102. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (z-2)(x^2+4y^2-4)$ und die Niveaumenge

$$N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

(a) Berechnen Sie jeweils die Tangentialebene an N_0 in $(1,1,2)^\intercal$ und in $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\intercal$.

(b) Geben Sie jeweils Parameterdarstellungen für die Geraden an, die in $(1,1,2)^\intercal$ und in $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^\intercal$ senkrecht auf N_0 stehen.

(c) Geben Sie einen Punkt in N_0 an, in dem keine Tangentialebene an N_0 existiert.

Aufgabe H 103. *Potentiale*

Welche der folgenden Vektorfelder besitzen ein Potential? Berechnen Sie ein Potential, wenn eines existiert.

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\cos(x)\cos(y) \\ z\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

(b) $f_2\colon D_1 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y\sin(xy)^2\cos(xy) + \ln(z) \\ 3x\sin(xy)^2\cos(xy) \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}$ für $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z > 0 \right\}$

(c) $f_3\colon D_2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2x}{z} + y \\ \frac{2y}{z} + x \\ -\frac{x^2+y^2}{z^2} \end{pmatrix}$ für $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \neq 0 \right\}$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.7–17.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

A. Gottwald,
F. Marks, S. Nitsche,
M. Pressland,
D. Zimmermann

27. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2019

Präsenzübungen

Aufgabe P 98. *Differentialoperatoren*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xe^y \\ x^2e^y + z^2\sin(y) \\ -2z\cos(y) \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2z + \cos(x) \\ y^3 + \sin(xz) \\ e^{xz} + e^{yz} \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie jeweils die Divergenz von f und von g.

(b) Berechnen Sie jeweils die Rotation von f und von g.

Aufgabe P 99. *Parametrisierungen*

(a) Parametrisieren Sie die Strecke, die den Punkt $(3, -1)$ mit dem Punkt $(7, 7)$ verbindet.

(b) Parametrisieren Sie die untere Hälfte des Kreises mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Radius 3.

(c) Parametrisieren Sie den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(e^{-x}) + \frac{6}{\sqrt{1+x^{16}}}$ im Intervall $[-\ln(\pi),\ \sqrt[16]{35}]$.

Aufgabe P 100. *Kurvenintegrale*

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(a)

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{mit} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x+1 \end{pmatrix},$$

wobei K die Strecke von $(0, 1)$ nach $(1, 0)$ ist.

(b)

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{mit} \quad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ -y \end{pmatrix},$$

wobei K Anfangspunkt $(-1, 0)$ hat und die obere Hälfte einer Ellipse durchläuft, welche den Mittelpunkt $(0, 0)$ hat und die Punkte $(-1, 0)$, $(0, 2)$ und $(1, 0)$ enthält.

Aufgabe P 101. *Länge von Kurven*

Berechnen Sie die Länge folgender Kurven. Skizzieren Sie die Kurven.

(a) $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

(b) $C\colon [0, (2\pi)^{1/2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$

(c) $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 104. *Parametrisierungen*

(a) Gegeben seien die folgenden Parametrisierungen.

$$C_1\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \qquad C_2\colon [-\tfrac{\pi}{2},\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix},$$

$$C_3\colon [-4,4] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}3t^2\\ 2t^3\end{pmatrix}, \qquad C_4\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix}t\\ t^2\\ |t|^3\end{pmatrix}.$$

Welche der obigen Parametrisierungen sind doppelpunktfrei? Welche sind regulär? Welche parametrisieren eine geschlossene Kurve?

(b) Geben Sie eine differenzierbare, aber nicht reguläre Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe H 105. *Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 3x_1x_2$. Berechnen Sie jeweils direkt das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{K_j} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für $j = 1,2,3,4$, wobei die K_j allesamt Verbindungslinien von $A = (-1,0)$ nach $B = (0,1)$ sind (und in dieser Richtung durchlaufen werden). Dabei seien

(a) K_1 die Strecke $\overline{AB}$,

(b) K_2 der Streckenzug $\overline{AO} \cup \overline{OB}$,

(c) K_3 das Viertel des Einheitskreises im zweiten Quadranten,

(d) K_4 der Teil des Graphen von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 1 - t^2$ im zweiten Quadranten.

Aufgabe H 106. *Potentiale und Kurvenintegrale*

Es seien $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei $f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - 2x_2\mathrm{e}^{x_1}\\ \mathrm{e}^{x_1}\\ 3x_2\end{pmatrix}$ und $g\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\mathrm{e}^{x_1}\\ x_3\\ 0\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $f + \alpha g$ ein Potential besitzt.

(b) Sei K die Kurve mit der Parametrisierung $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (0,\cos(t),\sin(t))^\intercal$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_K (f+3g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x$, $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_K (f+17g)(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 107. *Kurvenintegrale*

Bestimmen Sie jeweils die Kurvenintegrale $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ von f längs der Kurve K.

(a) Sei $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{t}{\cosh(t)}$ eine Parametrisierung der Kurve K und sei zudem $f\colon K \to \mathbb{R}\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 + x_2$.

(b) Sei $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), t)^\intercal$ eine Parametrisierung der Kurve K und sei zudem $f\colon K \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2,x_3)^\intercal \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.7.–24.7.) auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/