J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

15. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Welche der folgenden Reihen konvergieren? Konvergieren diese sogar absolut?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k(k+1)}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(4^k+5^k)}{(-9)^k}$

Aufgabe P 54. *Teleskopsummen*

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right),$$

indem Sie ihre "Teleskopstruktur" ausnutzen.

Aufgabe P 55. *Stetigkeit*

Entscheiden Sie ob folgende Funktionen stetig in ihrem Definitionsbereich sind.

(a) $f_1\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f_2(x) = |x|$

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon f_3(x) = \frac{1}{x^2}$

Aufgabe P 56. *Folgen und Häufungspunkte*

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke oder beides.

  (i) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

  (ii) $\left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf ihre Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

  (i) $\left((-1)^n \frac{3(n-2)(n-1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

  (ii) $\left(\exp\left((-1)^n \cdot n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.04. – 24.04.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 71. *Folgen und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $\left(\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{n}{2n+1}\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 72. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k!}+(-1)^k\frac{1}{k}\right)$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2+k+1}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{3k}-4^k}{11^k}$

Aufgabe H 73. *Potenzreihen*

Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}3^k(2x-1)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Aufgabe H 74. *Stetigkeit*

Es seien zwei Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=x^2+x-2 \quad \text{und} \quad g(x)=\begin{cases}2 & x\leqq -2,\\ -1 & -2<x\leqq 1,\\ \frac{1}{x-1} & x>1.\end{cases}$$

Geben Sie alle $x\in\mathbb{R}$ an, in denen

(a) f stetig ist.

(b) g stetig ist.

(c) $f\cdot g$ stetig ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Komplexe Wurzeln*

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3=\mathrm{i}$ und geben Sie sie in der Form $a+b\mathrm{i}$ an.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

16. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x}{-x-3}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sin(x)\cos(x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to0+0} \dfrac{x^3+3x}{3x^3+x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Aufgabe P 58. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

(a) $f_1 \colon x \mapsto \frac{x-1}{|x-3|}$

(b) $f_2 \colon x \mapsto \ln\left(\ln(1+x^2)\right)$

(c) $f_3 \colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit und bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen. An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

Aufgabe P 59. *Nullstellensatz*

Gegeben seien die Funktionen

$$f \colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \colon f(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad g \colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \colon g(x) = \sin(3x).$$

Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g mindestens drei Schnittpunkte besitzen.

Aufgabe P 60. *Umkehrfunktionen und Stetigkeit*

Die folgenden Funktionen sind bijektiv. Entscheiden Sie jeweils ob die Funktion stetig ist, bestimmen Sie die Umkehrfunktion und untersuchen Sie diese ebenfalls auf Stetigkeit.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R} \smallsetminus \{5\} \colon x \mapsto \frac{2}{x-1} + 5$

(b) $f_2 \colon [0,1] \to [b, a+b] \colon x \mapsto ax+b$ mit $a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

(c) $f_3 \colon (1,3] \cup (5,6] \to \left(1,\sqrt{3}\right] \cup \left(\sqrt{5},\sqrt{6}\right] \colon x \mapsto \sqrt{x}$

(d) $f_4 \colon \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \to (-1,1] \colon x \mapsto \sin(x)$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.04. – 01.05.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 76. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}}$

(c) $\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^4}$

Aufgabe H 77. *Stetigkeit*

Sei $p \geqq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{3(2-x)} & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 8x + 29} & \text{für } x \geqq 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p.

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle $x = 2$ stetig?

Aufgabe H 78. *ε-δ-Kriterium für Stetigkeit*

Verwenden Sie das ε-δ-Kriterium, um zu zeigen, dass die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ an jeder Stelle $x_0 \geqq 0$ stetig ist. Geben Sie insbesondere für beliebiges $x_0 \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ ein δ_ε als Formel explizit an, so dass die ε-δ-Beschreibung erfüllt ist. Können Sie δ_ε unabhängig von x_0 wählen?

Aufgabe H 79. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-2x - x^2} & \text{falls } -2 \leqq x < 0, \\ \sqrt{1 - x^2} - 1 & \text{falls } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie, ob f stetig ist.

(b) Finden Sie möglichst große Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} rechnerisch.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Skizze.

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *Häufungspunkte komplexer Folgen*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $\left(\frac{(-1)^n}{(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^n)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

17. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 61. *Konvergenz von Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien für die folgende Potenzreihen.

(a) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}z + 1 - 3\mathrm{i})^n}{n^2}$,

(b) $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\sqrt{n}}$,

(c) $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \mathrm{i}^n)^n (1+z)^n}{(n+1)}$.

Aufgabe P 62. *Differenzierbarkeit*

Setzen Sie die Funktionen f und g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fort und untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

(a) $f : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $g : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe P 63. *Umkehrfunktionen*

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1 \colon [-1, 3] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 2^x$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 3x + 3 & \text{für } x < -1 \\ (x+1)^2 & \text{für } -1 \leqq x \leqq 1 \\ 6 - \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Prüfen Sie ob diese Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, bzw. ob dies durch Änderung des Definitions- oder Wertebereichs erreicht werden kann. Geben Sie ggf. die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 64. *Intervallhalbierungsmethode*

Betrachten Sie die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)(x+2)$ und $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie a_4 und b_4 mit der Intervalhalbierungsmethode für die Funktion f, wenn $a_1 = 0$ und $b_1 = 3$. (Siehe **1.13.13** im Buch für die Definitionen von a_j und b_j.)

(b) Sei $a_1, b_1, c \in \mathbb{R}$, $a_1 < c < b_1$, so dass $g(a_1) < 0 < g(b_1)$ und $g(c) = 0$. Außerdem sei $g(x) \neq 0$ für $x \in [a_1, b_1] \smallsetminus \{c\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$

Zeigen Sie

$$|c_j - c| \leqq \frac{|b_1 - a_1|}{2^j}.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 02.05. – 08.05.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 81. *Rechenregeln für Potenzreihen*

Seien f und g die Reihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 4z + 4}{4} \right)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(z-2)^n.$$

(a) Schreiben Sie $f(z)$, $g(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.

(b) Bestimmen Sie $(f+g)(z)$, $(f \cdot g)(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.

Aufgabe H 82. *Potenzreihen und Gleichungen*

Seien f und g die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$, wenn $\rho_f > 0$ ist.

(b) Bestimmen Sie $c_n \in \mathbb{R}$ so dass $a_n = c_n a_1$, $n > 1$, wenn

$$\begin{aligned} &g(z) = f(z) + 2, \ |z| < \min(\rho_f, \rho_g) \\ &f(0) = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$, dann $b_n = \tilde{b}_n$.

(c) Schreiben Sie f und g als Traszendentalfunktionen (z. B.: $\exp$, $\sin$, $\log$).

Aufgabe H 83. *Kreistangenten*

Sie werden beauftragt, einen neuen Leuchtturm zu bauen. Wie hoch müssen Sie den Leuchtturm bauen, damit er auch für kleine Boote (bei denen sich die Perspektive der Besatzung näherungsweise auf Höhe der Wasseroberfläche befindet) bereits aus einer Entfernung von $25\,\mathrm{km}$ zu sehen ist? Unter der Entfernung verstehen wir hierbei die Distanz, die das Boot noch zurücklegen muss, um den Fußpunkt des Leuchtturms zu erreichen.
Hinweis: Für diese Aufgabe darf ausnahmsweise ein gewöhnlicher Taschenrechner verwendet werden. Sie können mit einem Erdumfang von $40\,000\,\mathrm{km}$ rechnen.

Aufgabe H 84. *Stetigkeit von Umkehrfunktionen*

Es sei $f : M \to S$ eine bijektive, stetige Funktion mit $M, S \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $M = [a, b]$ für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : S \to M$ stetig.

(b) Folgern Sie, dass der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 53 & -36 \\ 72 & -49 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Ableitungen*

Bestimmen Sie f' für die folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sinh(x)}{2x+1}$.

(b) $f\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \log(x+1) \cdot (x+1)^x$.

(c) $f\colon (2, 17) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arctan\left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)$.

Aufgabe P 66. *Ableitungsregeln*

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von $\sin(x)^2$ und von $\cos(x)^2$. Verwenden Sie diese, um die Ableitung von $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$ zu berechnen. Was fällt Ihnen auf?

(b) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = -1, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = \frac{1}{3},$$

sowie

$$h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (g \circ f)(x) \quad \text{und} \quad h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)\, g(x) \sqrt{3 + (f(x))^2 + (g(x))^2}\,.$$

Berechnen Sie $h_1'(0)$ und $h_2'(1)$.

Aufgabe P 67. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Untersuchen Sie, ob für die Funktion

$$f\colon\ [\mathrm{e}, 4\mathrm{e}] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\ln x)^3$$

auf dem Intervall $[\mathrm{e}, 4\mathrm{e}]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f([\mathrm{e}, 4\mathrm{e}]) \to [\mathrm{e}, 4\mathrm{e}]$ existiert.

(b) Berechnen Sie für alle x_0, für die f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar ist, die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ f^{-1}(y)\bigg|_{y=f(x_0)}\,.$$

Aufgabe P 68. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\ (-3, \infty) \to (-\infty, 1)\colon\ x \mapsto \frac{x+1}{x+3}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}, falls sie existiert.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} mittels Satz 2.3.1.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt, also unter Verwendung von **(b)** und ohne Satz 2.3.1.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.05. – 15.05.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 86. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung der Funktionen

(a) $f_1(x) = \ln\big(\cot(x)\big) + e^{3x}$,

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-9}}$,

(c) $f_3(x) = x^{e^x}$, und

(d) $f_4(x) = \operatorname{sech}\left((x+1)^2\right)$.

Aufgabe H 87. *Mehrfaches Ableiten*

Seien $a, b, \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax))$,
Hinweis: Additiontheoreme für Sinus und Kosinus.

(b) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (x\mathrm{e}^x + a^{-x})$, wobei $x > 0$,

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (f(x)g(x))$, wobei f und g unendlich oft differenzierbare Funktionen sind, und

(d) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a-bx}$, wobei $x \neq \frac{a}{b}$.

Aufgabe H 88. *Kettenregel*

(a) Seien $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, $f(x) = e^{y(x)}$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Bestimmen Sie f', $(g \circ y)'$ und $(g \circ f)'$.

(b) Die Gleichung $x^3y^3 + xy = 4$, mit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $xy \neq 0$, definiert implizit eine differenzierbare Funktion, d. h. $y = y(x)$. Berechnen Sie mit hilfe der Kettelregel y'. (Die Antworten werden sowohl x als auch y enthalten.)

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung auf beiden Seiten der Gleichung und lösen Sie nach y' auf.

Aufgabe H 89. *Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen*

Betrachten Sie die folgenden Funktionen

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ und}$$
$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Maximale Menge M so, dass die Funktion

$$\operatorname{artanh}\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tanh^{-1}(x)$$

definiert ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{artanh}(x)\Big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.
Hinweis: Satz 2.3.1 kann hilfreich sein.

(c) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Berechen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\operatorname{artanh} \circ f)(x)$, $x \neq 0$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Faktorisierung von Polynomen*

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 + 3z^2 + z - 5$ in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$).
Hinweis: $p(z)$ hat eine ganzzahlige Nullstelle.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

19. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 69. *Funktionsgrenzwerte*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^{6x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln(x)\sin(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 2+0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x-1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{\cos(\pi x)}$

Aufgabe P 70. *Taylorpolynome*
Bestimmen Sie $T_n(f,x,x_0)$ für
(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^4+3x,\ n=3,\ x_0=1\,.$
(b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2},\ n=4,\ x_0=0\,.$
(c) $f\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (-2x)\mathrm{e}^{-x^2},\ n=4,\ x_0=0\,.$

Aufgabe P 71. *Monotonie und Ableitungen*
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^4-x^2+1\,.$
(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.
(b) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen f monoton steigend/fallend ist.

Aufgabe P 72. *Mittelwertsatz*
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sqrt[4]{x}$$

.

(a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi\in(1,16)$ so, dass $f'(\xi)=\frac{f(16)-f(1)}{16-1}$ ist.
(b) Geben Sie, mit Hilfe des Mittelwertsatzes, eine Abschätzung für $\sqrt[4]{260}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.05. – 29.05.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 91. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a>0$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\tan(x)-x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0-0} |\sin(x)|^{1-\cos(x)}$,

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}$, $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe H 92. *Mittelwertsatz*

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f&\colon (1,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2x+\sqrt{x-1},\\ g&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi\in(5,10)$ so, dass $f'(\xi)=\frac{f(10)-f(5)}{10-5}$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konstanten $c(n)$ und $C(n)$ so, dass die folgende Grenze gilt:

$$c(n) < g(n+1)-g(n) < C(n).$$

(c) Ein Autofahrer fährt durch eine Kleinstadt mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 50km/h. Die Stadt ist 5km groß. Am Ortseingang zeigt der Tachometer 46km/h an und die Uhr zeigt $10:00$ Uhr, am Ortsausgang zeigt der Tachometer 40km/h an und die Uhr zeigt $10:06$ Uhr. Einige Wochen später erhält der Fahrer einen Strafzettel per Post. Erklären Sie das.

Aufgabe H 93. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-x},\\ g&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \arctan(x),\\ h&\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (f(x)-1)(g(x)-x). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $T_4(f,x,0), T_4(g,x,0), R_4(f,x,0)$ und $R_4(g,x,0)$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a), $T_4(h,x,0)$, und $R_4(h,x,0)$. Geben Sie $R_4(h,x,0)$ in Abhängigheit von den Ableitungen $\left(\frac{d}{dx}\right)^n(g(x)-x)$ an (ohne weiter zu vereinfachen).

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

Aufgabe H 94. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon(-1,\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad \text{und} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sinh(2(x-1)).$$

(a) Bestimmen Sie $T_5(f,x,0)$ und $R_5(f,x,0)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g,x,1)$ und $R_4(g,x,1)$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie n so, dass

$$|f(x) - T_n(f,x,0)| < \varepsilon$$

gilt für alle $x \in [0,1]$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Konvergenz mit Cauchy*

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k^2)2^k}.$$

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 73. *Taylorreihen*

Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils die Taylorreihe im entsprechenden Entwicklungspunkt x_0:

(a) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^{-2}, \qquad x_0 = 1.$

(b) $\cos, \qquad x_0 = \pi.$

Aufgabe P 74. *Unbestimmte Integrale*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \sin(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 75. *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\ln(\pi)} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^2 x\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 76. *Kurvendiskussion*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$.

(a) Überprüfen Sie f auf Symmetrien.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(c) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich zwischen den Nullstellen.

(f) Ergänzen Sie die Skizze um die Tangenten in den Wendepunkten.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.05. – 05.06.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Im Sommersemester 2006 gab es zwei Scheinklausuren zur HM 2.
Die erste (vom 17.6.2006) bezieht sich auf Stoff, den Sie jetzt dann auch beherrschen sollten.
`http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/#2005/06`
Nutzen Sie die Möglichkeit, sich selbst zu testen (indem Sie diese Scheinklausur unter klausurähnlichen Bedingungen in der vorgesehenen Zeit von 90 Minuten bearbeiten und dann hinterher an Hand der Musterlösung Ihre Ergebnisse kontrollieren).

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 96. *Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x \sin\left(\int_0^1 x \cdot 2\zeta \,\mathrm{d}\,\zeta\right) \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\exp\left(\sqrt[3]{x}\right)}}{6} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 97. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Extrema sowie Wendepunkte von f.

(c) Bestimmen Sie den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = -1$, sofern diese existieren. Ist f dort stetig fortsetzbar?

Aufgabe H 98. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.
Wenn Sie substituieren, verwenden Sie hierzu ausschließlich 3.3.3.

(a) $\displaystyle\int_1^{\exp\left(\sqrt{\ln(85)}\right)} \ln(x) x^{\ln(x)-1} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} \,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Nutzen Sie $\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ und $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}$.

Aufgabe H 99.

Gegeben sei die vom ganzzahligen Parameter $\alpha \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ abhängige Funktion

$$f_\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln\left((x+2) \cdot \mathrm{e}^{x^\alpha}\right),$$

wobei D_α den maximal möglichen Definitionsbereich bezeichne.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $F_\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}$ so, dass $F'_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ gilt.

(b) Sei nun $\alpha = -2$. Bestimmen Sie D_{-2} sowie diejenige Funktion $\hat{F}\colon D_{-2} \to \mathbb{R}$, für welche $\hat{F}' = f_{-2}$ sowie $\hat{F}(-1) = 6$ und $\hat{F}(\mathrm{e}-2) = \dfrac{\mathrm{e}-3}{\mathrm{e}-2}$ gilt.

Hinweis: Ist D_{-2} ein Intervall?

Frischhaltebox

Aufgabe H 100.

Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $v_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-2n \end{pmatrix}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

Weisen Sie dies induktiv nach.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

21. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 77. *Partialbruchzerlegung (siehe 3.4.5 im Skript)*

Gegeben sei die gebrochen rationale Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{q(x)}{p(x)}$, wobei

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad\qquad q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

(a) Zerlegen Sie $q(x) = a(x)p(x) + q_1(x)$ für Polynomfunktionen $a(x)$ und $q_1(x)$ so, dass der Grad von $q_1(x)$ kleiner ist als der Grad von $p(x)$.
Hinweis: Polynomdivision.

(b) Berechnen Sie eine Zerlegung $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=n+1}^{n+l}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{m_i}$ wobei $\Delta_i = \gamma_i - \frac{\beta_i^2}{4} > 0$ für $i \in \{n+1, \dots, n+l\}$.
Hinweis: Die Aufgabenstellung verrät bereits die reellen Nullstellen von $p(x)$.

(c) Bestimmen Sie reelle Zahlen A_{ik}, B_{ik} und C_{ik} so, dass

$$f(x) = a(x) + \frac{q_1(x)}{p(x)} = a(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(x-\alpha_i)^k} + \sum_{i=n+1}^{n+l}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{B_{ik} + C_{ik}x}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^k}.$$

Aufgabe P 78. *Partialbruchzerlegung II*

Finden Sie jeweils eine Partialbruchzerlegung der folgenden Funktionen.

(a) $\dfrac{1}{x^2-1}$ **(b)** $\dfrac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}$ **(c)** $\dfrac{x^2-3x+1}{x^3+x}$

Aufgabe P 79. *Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von 3.4.7–3.4.9 im Skript.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 80. *Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 7}} 2xe^{(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+2024}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Für Teil (c) ist 3.3.6 im Skript hilfreich.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.06. – 12.06.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 101.
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4-12x^2+3}{x^5-4x^3+3x-435}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 102. *Partialbruchzerlegung*
Geben Sie eine Partialbruchzerlegung der folgenden gebrochen rationalen Funktionen an.

(a) $\dfrac{3-x}{1-x^2}$ **(b)** $\dfrac{x^3}{(x^2+2x+2)^2}$ **(c)** $\dfrac{x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$ **(d)** $\dfrac{2x}{x^2-1}$

Aufgabe H 103. *Integration gebrochen rationaler Funktionen*
Berechnen Sie eine Stammfunktion der gebrochen rationalen Funktion

$$f\colon [1,2]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe H 104. *Ein Kriterium für die Konvergenz von Reihen*
Es sei $f_n\colon [1,n+1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{1}{x^2}$ für $n\in\mathbb{N}$

(a) Begründen Sie, dass für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\overline{S}(f_n,P_n) \qquad \underline{S}(f_n,P_n)=\overline{S}(f_n,P_n)-1+\frac{1}{(n+1)^2}$$

für die Ober- und Untersumme von f_n zur Partition $P_n=\{1,\dots,n+1\}$ gilt.

(b) Begründen Sie warum

$$\int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x+1$$

gilt und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Begründen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ gegen einen Grenzwert in $[1,2]$ konvergiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.
Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan(x)$ mit Hilfe von Satz 2.3.1 im Skript.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

22. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. *Geschlossene Formeln durch Integration*
Gegeben sei die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ von f.

(b) Berechnen Sie eine Stammfunktion F der Funktion $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie eine geschlossene Formel für F an.
Hinweis: Geometrische Reihe.

(d) Geben Sie eine geschlossene Formel für f an, indem sie F differenzieren.

Aufgabe P 82. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + x - 7}{x^4 + 2x^3 + x^2} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 83. *Uneigentliche Integrale*
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 84. *Hauptsatz der Integralrechnung*
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int_0^{x} f'(g(t))g'(t) \,\mathrm{d}\,t$ **(b)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \int_0^{x} f(g(f(t))) \,\mathrm{d}\,t$ **(c)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \int_{-x}^{x^2} f(t) \,\mathrm{d}\,t$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 13.06. – 19.06.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 106. *Geschlossene Formeln*

Berechnen Sie geschlossene Formeln für die folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$

Tipp: Führen Sie einen Sanity-check durch, d.h. überprüfen Sie beispielsweise durch Einsetzen, dass Ihre geschlossene Formel für $x=0$ korrekt ist.

Aufgabe H 107. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\int_{20}^{+\infty}\frac{1}{(\ln(x^{24}))^3}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\int_{-1}^{0-0}\frac{-1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 108. *Uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int_{0+0}^{1}\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 109. *Geschlossene Formeln II (2+1+1)*

Geben Sie geschlossene Formeln für die folgenden Ausdrücke an.

(a) $\sum_{n=5}^{\infty}n^2x^n$ **(b)** $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1}$ **(c)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{2024}.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

23. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 85. *Topologie*
Wir betrachten die Menge

$$M \;=\; \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x < y+1 \leqq x+2 \right\} \;\subseteqq\; \mathbb{R}^2 .$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$, M° und ∂M.

(c) Ist M beschränkt? Kompakt?

Aufgabe P 86. *Folgen in $\mathbb{R}^n$*
Untersuchen Sie die Folge $(a_k)_{k\geqq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

(a) $a_k = \left(\frac{1}{k}, 2\right)^\intercal$

(b) $a_k = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{5^j}{j!}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \right)^\intercal$

(c) $a_k = (k, 2)^\intercal$

(d) $a_k = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right)^\intercal$

Aufgabe P 87. *Integral-Vergleichskriterium*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

Aufgabe P 88. *Visualisierung von Funktionen mehrer Veränderlicher*
Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t zu den Niveaus $t \in \{1/e^r \mid r = 0,1,2,3,4,5\}$.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E_1\colon x = 0$.

(c) Hat f irgendwelche Symmetrien?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.06. – 26.06.)
auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 111. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leqq 6 \right\},$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M.

(c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.

(d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Aufgabe H 112. *Funktionen mehrerer Veränderlicher I: Warm-up*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}, (x,y)^\intercal \mapsto \frac{x^2+1}{y^2+1}$

(a) Ist f stetig? Nimmt f ein globales Maximum an?

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t = \frac{1}{2}, 1, 2$

(c) Begründen Sie, warum sich Niveaulinen N_t und N_s für $t \neq s$ niemals schneiden.

(d) Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E\colon x = 2y$.

Aufgabe H 113. *Funktionen mehrerer Veränderlicher II: Stetigkeit*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{2\,xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0}. \end{cases}$$

Ein Modell für den Funktionsgraphen finden Sie unter `https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/04/`

(a) Für $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\binom{0}{0}\}$ sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto t\binom{a}{b}$ die Parametrisierung einer Geraden durch den Ursprung. Ist $f \circ g$ stetig?

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

(c) Ist f stetig in $\binom{0}{0}$?

Aufgabe H 114. *Folgen in* $\mathbb{R}^2$

Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen $(a_k)_{k \geqq 1}$.

(a) $a_k = (\cos(2\pi k/3), \sin(2\pi k/3))^\intercal$

(b) $a_k = \left(k, \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2}\right)^\intercal$

(c) $a_k = (2 + \frac{1}{k}, ke^{-k})^\intercal$

(d) $a_k = \left((-1)^k, \sum_{j=0}^k \frac{(-25)^j}{(2j)!}\right)^\intercal$

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.

Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid\ x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3 = 0\}$.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

24. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 89. *kritische Stellen, Richtungsableitung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto x^4 - 2x^2 + y^2$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zweiter Ordnung.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^\mathsf{T}$ an der Stelle $(1,0)^\mathsf{T}$.

(c) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f.

Aufgabe P 90. *3D-Modell – Schmiegquadriken*

Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \cos(x_1)\cos(x_2)$ ist im vorliegenden Modell dargestellt. Um den Einblick zu erleichtern, ist bei $\left(\begin{smallmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Fenster aus dem gelben Funktionsgraph ausgeschnitten.
Betrachten Sie die Stellen $P_1 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 := \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ und $P_3 := \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$.
(Falls Sie eine Onlinegruppe besuchen: Das Modell finden Sie unter
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/.)

(a) Wo etwa verlaufen die Koordinatenachsen im Modell? Wo ist der Punkt $(0,0,1)^\mathsf{T}$?

(b) Bestimmen Sie $T_2(f,x,P)$ für $P \in \{P_1, P_2, P_3\}$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichungen der zugehörigen Schmiegquadriken sowie jeweils die Gestalt der Quadrik. Passen Ihre Ergebnisse zum Modell?

Aufgabe P 91. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^3y^2$.

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\mathcal{N} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = 0 \right\}$ und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.
Bestimmen Sie ferner $\det(\mathrm{H}f(P))$ für alle $P \in \mathcal{N}$.

(c) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Aufgabe P 92. *Gradienten und Richtungsableitungen*

Betrachen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1 \cdot \mathrm{e}^{x_2}$.

(a) Sei $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ und $v := r\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$.
Bestimmen Sie die Ableitung von f längs v.
Für welche r ist dies eine Richtungsableitung?

(b) Bestimmen Sie zu $r = 1$ den Winkel φ so, dass $\partial_v f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ maximal wird.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 27.06. – 03.07.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 116. *Gradienten und Niveaumengen*

Gegeben seien die Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \dfrac{\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}}{(1+x_3^2)^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} g$.

(b) Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Niveau $c = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \nabla g\,(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Aufgabe H 117. *Kritische Stellen und Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \left(\mathrm{e}\, y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^5 - 5y_2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(y)$ und $\mathrm{H}f\,(y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und entscheiden Sie jeweils, ob in diesen lokale Extrema oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 118. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Gegeben sei die Funktion *Luxemburg*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \dfrac{y^2}{\mathrm{e}}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ sowie die kritischen Stellen.

(b) Sei $\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right\}$ der zugehörige Graph. Skizzieren Sie die Schnitte von $\mathcal{G}$ mit der x-z- sowie mit der y-z-Ebene in ein geeignetes Koorinatensystem für $(x, y)^\mathsf{T} \in [-3, 3] \times [-3, 3]$.
Hinweis: Zum Auswerten der Funktion an Teststellen dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder ein vergleichbares elektronisches Hilfswerkzeug benutzen.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob an den kritischen Stellen lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 119. *Schmiegquadriken*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\cos(1-x^2)}{1+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Geben Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades in den Entwicklungspunkten $P = \binom{0}{0}$ und $Q = \binom{1}{0}$ an.

(c) Klassifizieren Sie die Schmiegquadriken in diesen Punkten gemäß 7.3.7/7.3.8.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120.

Gegeben seien die Vektoren $u_1 = (2, 4, 2, -2, 6)^\mathsf{T}$, $u_2 = (1, 8, 5, -1, 3)^\mathsf{T}$ und $u_3 = (1, 16, 1, -3, 9)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie ein ONS $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}\,(u_1) = \mathrm{L}\,(f_1)$, $\mathrm{L}\,(u_1, u_2) = \mathrm{L}\,(f_1, f_2)$ und $\mathrm{L}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3)$.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

25. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 93. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Die Nebenbedingung kann als $y^2 = 1 - x^2$ geschrieben werden. Ersetzen Sie y^2 im Funktionsterm von f und untersuchen Sie die entstehende Funktion in einer Veränderlichen auf Extrema.

(b) Benutzen Sie die Multiplikatormethode von Lagrange.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe P 94. *Multiplikatormethode nach Lagrange*

Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2xz + y^2 + 3 = 0 \right\}$. Finden Sie die Punkte in M, die den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

Aufgabe P 95. *Extrema mit Parametrisierungen*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy - x$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \left\langle \binom{1}{-1} \;\middle|\; \binom{x}{y} \right\rangle$ und $M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\left(\binom{x}{y}\right) = 0 \right\}$.

(a) Wieso können Sie nicht von vornherein auf die Existenz von globalen Extremalstellen der Einschränkung $f|_M$ schließen?

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung α für M.

(c) Bestimmen Sie Kandidaten für lokale Extrema von f auf M mit Hilfe der gefundenen Parametrisierung.

(d) Entscheiden Sie für diese, ob es sich um lokale/globale Minima/Maxima oder nichts davon handelt.

Aufgabe P 96. *Existenz von Extrema*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\cos(y)$ sowie die Mengen

$$\mathcal{A} := \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\} \quad , \quad \mathcal{B} := \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1,1]\} \quad , \quad \mathcal{C} := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$

(a) Für welche Mengen $\mathcal{M} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ ist die Einschränkung $f|_\mathcal{M}$ beschränkt?

(b) Für welche dieser Mengen nimmt $f|_\mathcal{M}$ einen Maximalwert an?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 04.07. – 10.07.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 121. *Extrema mit Vorzeichenverteilung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \cos\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{N}_0 = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f((x,y)^\intercal) = 0\right\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f\left((x,y)^\intercal\right)$ sowie kritischen Stellen.

(c) Ergänzen Sie Ihre Skizze um die kritischen Stellen und entscheiden Sie mit (a), ob an diesen lokale Minima oder Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 122. *Extrema mit Lagrange*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{8}{3}x_1^2 + x_2^2$ und

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{6}(x_1+1)^6 - \frac{1}{5}(x_1+1)^5 + 3x_2^2$.

Wir suchen die Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$.

(a) Stellen Sie das Lagrange-System auf.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen inklusive ihrer Lagrange-Multiplikatoren.

(c) Bestimmen Sie das absolute Maximum von f auf D.

Aufgabe H 123. *Extrema auf abgeschlossenen Kugeln*

Durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird mittels $\langle x \,|\, y\rangle_A = x^\intercal A y$ ein Skalarprodukt sowie mittels $\|x\|_A = \sqrt{\langle x \,|\, x\rangle_A}$ eine („Energie"-)Norm induziert. Sei nun $n = 3$ und A die positiv definite Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems nach Lagrange für das Problem:

$$\max_{x\in D} \frac{1}{2}\|x\|_A^2 \quad \text{mit} \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x|^2 = 25\right\}$$

(b) Bestimmen Sie $\tilde{x} \in \tilde{D} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x|^2 \leqq 25\right\}$ mit $\|\tilde{x}\|_A \geqq \|x'\|_A$ für alle $x' \in \tilde{D}$.

Aufgabe H 124. *Extrema mit Parametrisierungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{4}x^2 y - \frac{2}{3}x^2$ und $D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $\min\limits_{(x,y)^\intercal \in D} f\left(\binom{x}{y}\right)$ mit der Lagrange-Methode.

(b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels einer geeigneten Parametrisierung.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob in diesen ein lokales oder globales Minimum oder Maximum oder nichts dergleichen vorliegt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Hesse-Normalform*

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der folgenden Ebene:

$$E = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$$

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

26. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 97. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Felder direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = f_2(f_1(x,y))$
mit $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \sin(t)$,

(b) $g(t) = g_2(g_1(t))$
mit $g_1(t) = (\sin(t),\, \cos(t))^\intercal$ und $g_2(x,y) = (xy,\, x^3,\, y^2)^\intercal$.

Aufgabe P 98. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x-y)(x^2+y^2-4)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge $N_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

(b) Berechnen Sie ∇f.

(c) In welchen der folgenden Punkte existieren Tangenten an N_0? Berechnen Sie an diesen Punkten die Tangenten und zeichnen Sie sie in Ihre Skizze ein.

- $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe P 99. *Jacobi-Matrix und Kettenregel*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 - 4yz + 3z$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. Berechnen Sie $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$ ohne die Kettenregel zu verwenden.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$ und $\mathrm{J}g$ und mit der Kettenregel $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$.

Aufgabe P 100. *Gradientenfeld*

Überprüfen Sie, bei welchen der folgenden Funktionen sich es um ein Gradientenfeld handelt.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (2x + \mathrm{e}^x, 2y)^\intercal$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (\cos(2x)\cos(x+y^2), 2y\cos(2x)\cos(x+y^2))^\intercal$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (y\sinh(y), (xy+1)\cosh(y) + x\sinh(y))^\intercal$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.07. – 17.07.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 126. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitionsbereich aller dabei auftretenden Funktionen sowie der Verkettung selbst.

(a) $\binom{x}{y} \mapsto f_1\left(f_2\left(\binom{x}{y}\right)\right)$ mit $f_1(t) = \arcsin(t)$ und $f_2\left(\binom{x}{y}\right) = \exp(-x^2 - y^2)$.

(b) $\binom{u}{v} \mapsto g_1\left(g_2\left(\binom{u}{v}\right)\right)$ mit $g_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2z - y \\ xy + \sqrt{z} \\ x - y - zxy \end{pmatrix}$ und $g_2\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v + 1 \\ uv \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Diskussion muss nicht für die Jacobi-Matrix erfolgen.

Aufgabe H 127. *Verhalten von Gradienten – Skizze von Kurven*

Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy - y^2 + x$.

(a) Berechnen Sie $\nabla g\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten in den Punkten $\binom{x}{y}$ mit $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ für $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

(c) Skizzieren Sie die Tangenten in diesen Punkten.

(d) Skizzieren Sie grob den Verlauf der durch $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ gegebenen Kurve.

Hinweis: Arbeiten Sie mit folgenden Rundungswerten: $\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{5} \approx 2,2$, $\sqrt{21} \approx 4,6$.

Aufgabe H 128. *Rotation und Divergenz*

Geben sei das parameterabhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\sin(x_3)) + 9x_2 \\ \alpha^2 x_1 + \cos(x_3) \\ -x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3)) \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f_\alpha$ und $\operatorname{div} f_\alpha$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α ein Potential?

(c) Berechnen Sie $\operatorname{div} \operatorname{rot} f_\alpha(x)$ für $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe H 129. *Extrema mit Jacobi-Matrix*

Geben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3\colon x \mapsto x_1^2 + x_3^2 + x_2 \quad , \quad g\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_1^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x) = 0\right\}$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{J}g\,(x)$.

(b) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{M}$ beschränkt ist.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Einschränkung $f|_{\mathcal{M}}$.

Frischhaltebox

In Standardkoordinaten sei der Punkt X gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathbb{O} := \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

27. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

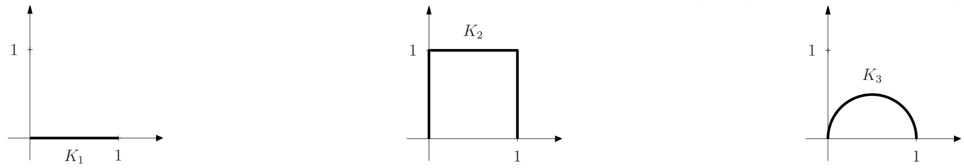
Präsenzübungen

Aufgabe P 101. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|^2$ das Kurvenintegral

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Aufgabe P 102. *Rotation und Divergenz – Kommutierende Transformationen*

(a) Sei f gegeben durch $f(x) := (x_2^2, x_3, -x_1)^\intercal$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Sei nun g gegeben durch $g(x) := f(x - (1,2,3)^\intercal) = ((x_2-2)^2, (x_3-3), -x_1+1)^\intercal$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g(x)$ und $\operatorname{div} g(x)$ und vergleichen Sie dies mit

$$(\operatorname{div} f)\,((x_1-1, x_2-2, x_3-3)^\intercal) \qquad \text{und} \qquad (\operatorname{rot} f)\,((x_1-1, x_2-2, x_3-3)^\intercal).$$

Was fällt auf?

(c) Verallgemeinern Sie diese Regelmäßigkeit, indem Sie diese für den Vektor $(1,2,3)^\intercal$ durch den Parametervektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ersetzen und die Abbildung $\tilde{f}(x) := f(x-\alpha)$ betrachten.

Aufgabe P 103. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\ (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1^2, x_1)^\intercal$ und die Parametrisierung der Kurve K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, ob v ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie $\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 104. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben seien die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, y-x)^\intercal.$$

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung C von K an.

(c) Bestimmen Sie die Zirkulation von g längs K und den Ausfluss von g durch K.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen **nicht** in die Bewertung mit ein, es erfolgt **keine** ILIAS-Abgabe.
Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Einige dieser Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 130. *Gravitationspotential*

Wir fixieren die Erde in $P_E := (0,0,0)^\intercal$ sowie den Mond im Punkt $P_M := (0,0,1)^\intercal$. Das zugehörige Gravitationspotential sei (vgl. einleitendes Beispiel im Skript) gegeben durch:

$$U\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{P_E, P_M\} \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{2m_E}{|x-P_E|} + \frac{2m_M}{|x-P_M|}$$

wobei m_E die Erdmasse und $m_M = \frac{1}{81}m_E$ die Mondmasse sei.

(a) Bestimmen Sie ∇U.

(b) Bestimmen Sie den Punkt P_G auf der Verbindungsstrecke von P_E und P_V, auf dem sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond aufheben.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(\nabla U)(P_G)$ und $\operatorname{rot}\nabla U(P_G)$.

Aufgabe H 131. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$ und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?

(b) Bestimmen Sie die Länge $L(C)$ für die durch γ parametrisierte Kurve C.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_C |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 132. *Zirkulation und Ausfluss*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} -y+x \\ \exp\left(x^2+\frac{1}{4}y^2\right) \end{pmatrix}$ gegeben. Die Ellipse E habe Halbachsenlängen $a=1$ und $b=2$ und liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die kleine Halbachse auf der x-Achse und die große Halbachse auf der y-Achse liegt.

(a) Ist g konservativ?

(b) Geben Sie eine doppelpunktfreie Parametrisierung von E an.

(c) Bestimmen Sie Zirkulation $Z(g,E)$ und Ausfluss $A(g,E)$.

Aufgabe H 133. *Länge von Kurven*

Bestimmen Sie die Längen der durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven:

(a) $\gamma\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(0, \ln(1+t^2)\right)^\intercal$.

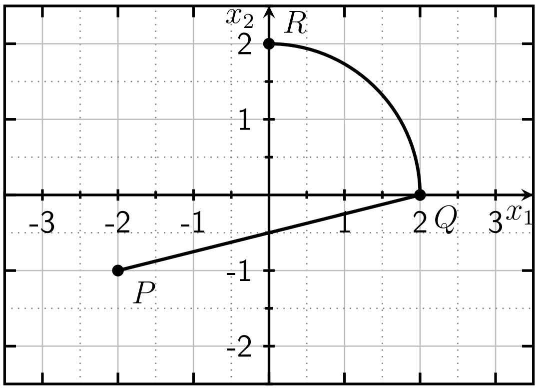
(b) $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(\cos(\exp(-t)), \sin(\exp(-t))\right)^\intercal$.

(c) $\gamma\colon [-2,0] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(10t, 4t^2, -3t^2\right)^\intercal$.

(d) $\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(1/2(t+\cos(t)\sin(t)), \frac{1}{2}\left(\sin(t)\right)^2, 1-\cos(t)\right)^\intercal$.

Aufgabe H 134. *Kurvenintegrale und Potentiale*

Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von P nach Q und dem Kreisbogen von Q nach R (mit Mittelpunkt im Ursprung) besteht. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.



(a) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_2 des Kreisbogens von Q nach R an.

(b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an.

(c) Bestimmen Sie $\int\limits_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

(d) Bestimmen Sie ein Potential U von ∇f mit $U(0) = 42$.

(e) Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 135. *Kurvenintegrale und Potentiale II*

Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?

(c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a, b) = (3, 2)$.

(d) Sei K die durch $C : [1, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Berechnen Sie für $(a, b) = (3, 2)$ das Integral $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 136. *Taylorpolynome*

Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos(x)}$.

Bestimmen Sie $T_2(f, x, 0)$ und $R_2(f, x, 0)$.