Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H1: In dieser Aufgabe benutzt man die grundlegenden Eigenschaften der Ordnungsrelation.

$$a < b \implies a + c < b + c \quad \text{(Monotonie der Addition: 1.5.4.2 der Vorlesung)} \tag{1}$$

$$c < d \implies c + b < d + b \quad \text{(Monotonie der Addition)} \tag{2}$$

Mit (1) und (2) $\quad a+c < b+c \wedge b+c < b+d \implies a+c < b+d \quad$ (Transitivität: 1.5.4.1) (3)

Damit ist $a < b \ \wedge \ c < d \implies a + c < bd$ gezeigt.

Aus $0 < a < b$ folgt $b > 0$ und damit $0 \cdot b = 0 < ab$ wegen der Monotonie der Multiplikation [1.5.4.3]. Weil mit ab auch der Kehrwert $\frac{1}{ab}$ positiv ist, folgt wiederum mit der Monotonie der Multiplikation

$$0 \cdot \frac{1}{ab} < a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab} \iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Zu Aufgabe H2: Es ist $x\bar{x} = 25$ das Quadrat des Betrages von x. Weiter ist $\frac{1}{2}(y-\bar{y}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ der imaginäre Anteil $\mathrm{Im}(y)\,i$ von y und $\frac{1}{2}(y+\bar{y}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ der Realteil von y. Diese Formeln gelten allgemein, wie eine kurze Rechnung mit einer allgemeinen komplexen Zahl $(a + bi)$ zeigt.

Für den Rest dieser Aufgabe gibt es nur Ergebnisse, Vorlesung und Skript erklären das Rechnen mit komplexen Zahlen:
$y^2 = -i, \quad y^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad x - z = \frac{11}{5} + \frac{26}{7}i, \quad x + \bar{y} = \frac{6+\sqrt{2}}{2} + \frac{8+\sqrt{2}}{2}i,$
$\frac{y}{x} = -\frac{1\sqrt{2}}{50} - \frac{7\sqrt{2}}{50}i, \quad x\bar{z} = \frac{124}{35} + \frac{82}{35}i$

Zu Aufgabe H3: Es ist $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z^3 = z^6 = 1$. Damit hat man schon die drei Lösungen von $x^3 - 1 = 0$: zum einen $x = 1$, zum anderen $x = z$ und $x = z^2$. Für die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ ergeben sich die Lösungen $1, -1, i, -i$ durch Ausprobieren oder mit der binomischen Formel:

$$(x^4 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Dann lassen sich die Lösungen der Gleichung ablesen bzw. leicht ausrechnen.

Zu Aufgabe H4: Beim Beweis des Binomialsatzes (siehe Vorlesung 1.3.5) kommt es gar nicht darauf an, dass es sich um reelle Zahlen handelt, sondern nur, dass addiert und multipliziert werden darf und beide Operationen kommutativ und distributiv sind. Daher gilt der Binomialsatz in jedem kommutativen Ring, insbesondere auch über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen: der Beweis verläuft völlig gleich.

Man kann (und darf) aber auch einfach noch einmal rechnen (und übt dabei den Umgang mit komplexen Zahlen, sowie mit den Summen!).

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H5: Es ist $x = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$ und $y = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Damit berechnet man leicht:

$$x^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \quad x^3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad y^2 = 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad y^3 = 8 \cdot e^{i\pi} = -8, \quad x \cdot z = 6 \cdot e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

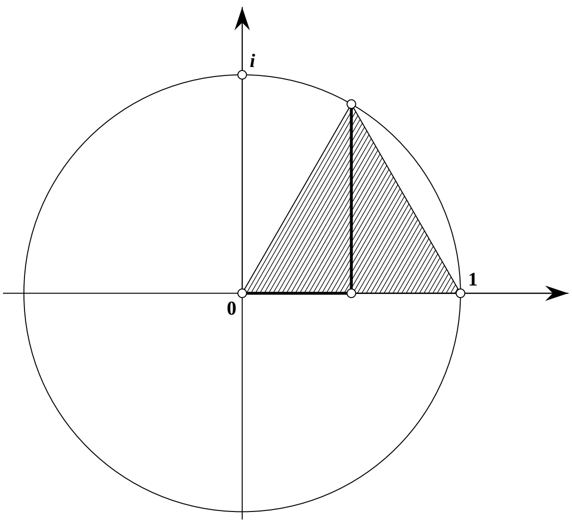
$$\frac{y}{z} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}i, \quad x + z = \frac{\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{2} + \frac{6 - \sqrt{2}}{2}i, \quad y - \bar{z} = (1 + 3\sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 3)i$$

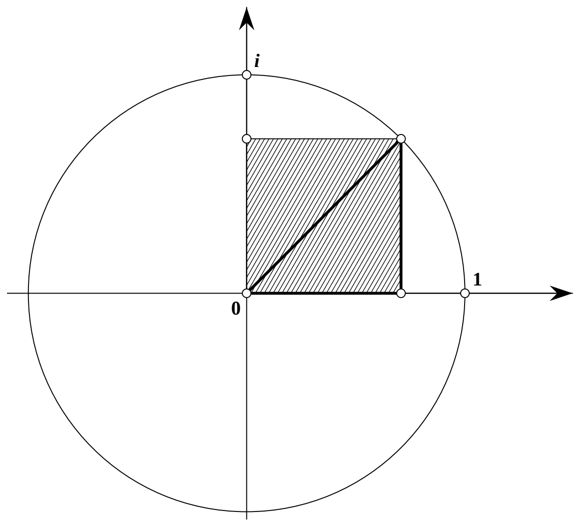
Hier braucht man Sinus und Kosinus der entsprechenden Winkel und erhält damit:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \; e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \; e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

In der komplexen Zahlenebene liegen alle diese Zahlen auf dem Kreis um 0 mit Radius 1 und zwar bei den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{3}$.

Auf dem Kreis kann man (mit Hilfe des Satzes von Pythagoras) auch die *exakten* Werte von $\cos t$ und $\sin t$ für $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\}$ ablesen.





Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

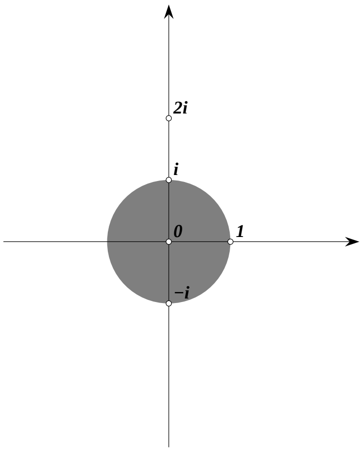
Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

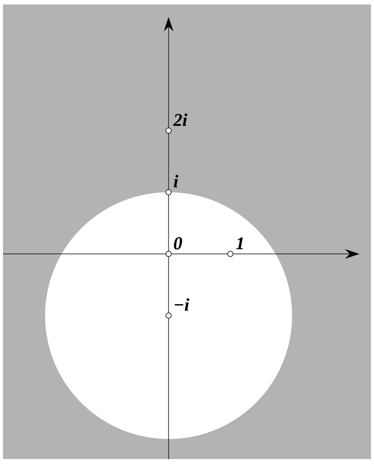
Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

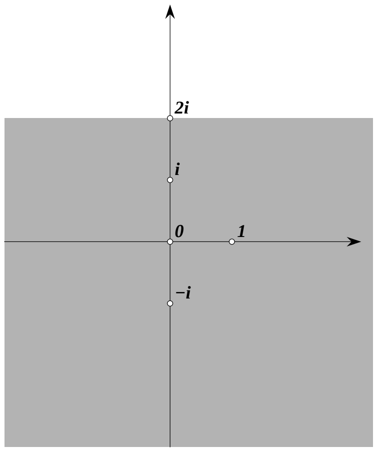
Zu Aufgabe H6:



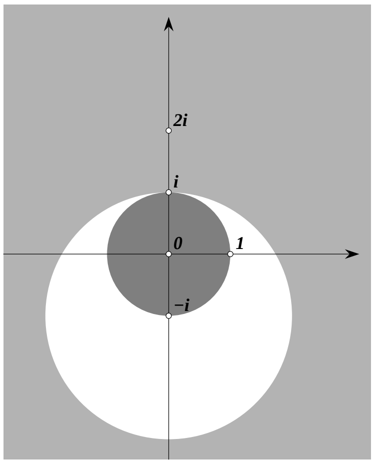
M_1



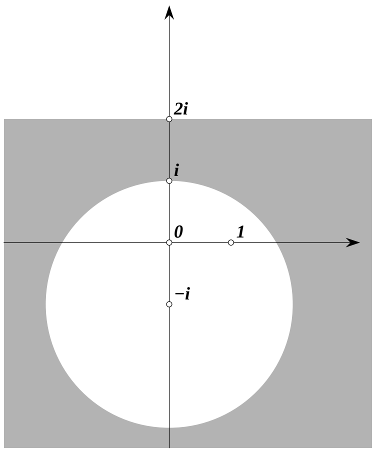
M_2



M_3



$M_1 \cup M_2$



$M_2 \cap M_3$

Zu Aufgabe H7: Der Schnittpunkt ist vorhanden und hat die Koordinaten $(1, 1, 1)$.

Diese Lösung erhält man, indem man die Gerade mit der Ebene schneidet, d.h. das folgende lineare Gleichungssystem löst:

$$\begin{aligned} 3 + 2\lambda &= 1 + 0\alpha + 1\beta \\ 3 + 2\lambda &= 2 + 1\alpha + 3\beta \\ 2 + 1\lambda &= 2 + 1\alpha + 0\beta \end{aligned}$$

Daraus erhält man $\lambda = \alpha,\ 2 + 2\,\alpha = \beta$ und damit $\lambda = -1 = \alpha,\ \beta = 0$.

Zu Aufgabe H8: Da die Aufgabe verschoben wurde, gibt es Kommentare dazu erst auf dem nächsten Hinweisblatt.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zur Aufgabe H9: Um überhaupt von einem Vektorraum reden zu können, müssen wir sagen, was Addition und Skalarmultiplikation sein sollen:

$$\begin{aligned}(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) + (b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0) \\ := (a_\ell + b_\ell)X^\ell + (a_{\ell-1} + b_{\ell-1}X^{\ell-1} + \cdots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)\end{aligned}$$

wobei $\ell = \max\{n, m\}$ und die noch nicht definierten a_j bzw. b_j als 0 definiert werden.

$$\gamma \cdot (a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) := (\gamma a_nX^n + \gamma a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \gamma a_1X + \gamma a_0).$$

Zunächst müssen wir zeigen, dass $\mathbb{R}[X]$ mit $+$ eine abelsche Gruppe bildet (siehe Skript 1.7.4). Assoziativität und Kommutativität erhalten wir dabei aus den gleichnamigen Eigenschaften der reellen Zahlen. Das Neutralelement der Addition ist das Polynom 0. Das inverse Element zu einem Polynom $(a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0)$ ist das Polynom $(-a_nX^n - \cdots - a_1X - a_0)$.

Anschliessend daran müssen wir die Axiome des Vektorraums nachrechnen, wie sie im Skript bei 2.4.1. aufgeschrieben sind. Wir zeigen exemplarisch das erste:

$$\begin{aligned}&(\gamma + \eta)(a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0) \\ &= ((\gamma + \eta)a_nX^n + \cdots + (\gamma + \eta)a_1X + (\gamma + \eta)a_0) && \text{Def. Skalarmultiplikation} \\ &= ((\gamma a_n + \eta a_n)X^n + \cdots + (\gamma a_1 + \eta a_1)X + (\gamma a_0 + \eta a_0)) && \text{Distributivität in } \mathbb{R} \\ &= (\gamma a_nX^n + \ldots \gamma a_1X + \gamma a_0) + (\eta a_nX^n + \cdots + \eta a_1X + \eta a_0) && \text{Def. Addition} \\ &= \gamma(a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0) + \eta(a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0) && \text{Def. Skalarmult.}\end{aligned}$$

Zur Aufgabe H10: Hier ist es nötig, jeweils die Definition einzusetzen und die Ausdrücke dann umzuformen

(a) $\langle u|v\rangle = \sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j} = \sum_{j=1}^n \overline{\overline{u_j}v_j} = \overline{\sum_{j=1}^n v_J\overline{u_j}} = \overline{\langle v|u\rangle}$

(b) $\langle u|u\rangle = \sum_{j=1}^n u_j\overline{u_j} \in \mathbb{R}_0^+$ weil jeder Summand $u_j\overline{u_j} = |u_j|^2$ das Quadrat des Betrages einer komplexen Zahl ist. Die Summe kann auch nur dann 0 werden, wenn jeder einzelne der Summanden 0 ist (denn diese sind ja 0 oder positiv). Aber der Betrag einer komplexen Zahl ist nur dann 0, wenn die Zahl es auch ist.

(c) $\langle u|v + w\rangle = \sum_{j=1}^n u_j(\overline{v_j + w_j}) = \sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j} + u_j\overline{w_j} = \sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j} + \sum_{j=1}^n u_j\overline{w_j} = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

(d) $\alpha\langle u|v\rangle = \alpha\sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j} = \sum_{j=1}^n(\alpha u_j)\overline{v_j} = \langle \alpha u|v\rangle$ und die zweite Gleichheit mit $\alpha\langle u|v\rangle = \alpha\sum_{j=1}^n u_j\overline{v_j} = \sum_{j=1}^n u_j\overline{\overline{\alpha}v_j} = \langle u|\overline{\alpha}v\rangle$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zur Aufgabe H11: In dieser Aufgabe benutzen wir die einfachen Eigenschaften des Skalarprodukts (Satz 2.6.1). Exemplarisch wird Teil (a) vorgeführt.

$$\begin{aligned} |v+w|^2 &= \langle v+w|v+w\rangle = \langle v|v+w\rangle + \langle w|v+w\rangle \\ &= \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle + \langle w|w\rangle \\ &= |v|^2 + 2\langle v|w\rangle + |w|^2 \end{aligned}$$

Zur Aufgabe H12: In dieser Aufgabe muss ein Vektor, nämlich der Vektor der Windkraft, in seine Anteile nach verschiedenen Richtungen zerlegt werden. Zunächst erhält man den Anteil in Fahrtrichtung, indem man den Vektor mit dem normierten Richtungsvektor der Fahrtrichtung skalar multipliziert:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{16}(-6+10+12) = 1$$

Damit muss man also den normierten Richtungsvektor einmal zur Antriebskraft addieren, um die Gesamtkraft zu bekommen. Also ist die Gesamtkraft in Fahrtrichtung $\frac{5}{4}(-\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3})$. Der restliche Anteil wirkt senkrecht zur Fahrtrichtung, ist also Querkraft. Wir bekommen sie, indem wir den Fahrtrichtungsanteil von der Windkraft abziehen und erhalten für die Querkraft:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

Da dieser Rest schon in der geforderten Ebene liegt, sind wir fertig.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H13:

(a) v_1, v_3 sind linear unabhängig.

(b) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

(c) v_1, v_2, v_5 sind linear abhängig.

(d) v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig.

(e) Da v_1 und v_3 linear unabhängig sind, bilden Sie eine Basis ihres Aufspanns, daher hat $L(v_1, v_3)$ die Dimension 2 und $\{v_1, v_3\}$ ist eine Basis. Da $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig sind, hat der Aufspann $L(v_1, \ldots, v_4)$ eine Dimension echt kleiner als 4. Andererseits sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit eine Basis von $L(v_1, v_2, v_3)$. Da nun $L(v_1, v_2, v_3) \subseteqq L(v_1, \ldots, v_4)$ und die Dimension 3 hat muss auch $L(v_1, \ldots, v_4)$ die Dimension 3 haben und damit ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis davon.

Zu Aufgabe H14:

(a) Wir berechnen zunächst die Vektoren u und v welche die Ebene aufspannen, indem wir je zwei Ortsvektoren voneinander abziehen:

$$u := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Parameterdarstellung der Ebene zu

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir suchen einen Vektor (x, y, z), welcher senkrecht auf beiden Vektoren steht, welche die Ebene aufspannen. Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 1y + 5z &= 0 \\ -3x - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich beispielsweise der Vektor $(-3, -6, 3)$ als Normalenvektor der Ebene (Achtung, die Lösung ist nicht eindeutig). Durch einsetzen von $(2, 3, 2)$ erhalten wir $d = -\sqrt{6}$, daher müssen wir das Vorzeichen des Normalenvektors noch umdrehen. Die Hesseform ist dann

$$\frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H15:

(a) Der Durchstoßpunkt ergibt sich durch einsetzen der Gerade in die Hesseform und er ist $(-2, 2, -4)$.

(b) Eine Gerade senkrecht zur Ebene hat als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene und daher ist die folgende Gerade eine Lösung

$$g_2 : (-2, 2, -4) + \mu(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}).$$

(c) Für den Winkel zwischen den beiden Vektoren benutzen wir die Formel aus der Vorlesung $\cos\alpha = \frac{\langle v_1|v_2\rangle}{|v_1|\cdot|v_2|}$. Die Rechnung ergibt $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Der Winkel ist daher $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Zu Aufgabe H16:

(a) Die Werte von $p_j(k)$ stehen in folgender Tabelle:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$k=-1$	1	0	0
$k=0$	0	1	0
$k=1$	0	0	1

(b) $f(X) = 13p_1(X) + 1234567p_2(X) - 22p_3(X) = -1234571.5X^2 - 17.5X + 1234567$ und $g(X) = -12p_2(X) + p_3(X) = \frac{25}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - 12$.

(c) Die Basis p_1, p_2, p_3 ist besser, weil sie dem Problem angepasst ist und damit die Rechnung erspart.

Der Raum ist dreidimensional, denn $1, X, X^2$ ist eine Basis. Daher reicht es zu zeigen dass p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind. Sei also $\alpha_1 p_1(X) + \alpha_2 p_2(X) + \alpha_3 p_3(X) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt. Diese Gleichheit muss für alle X gelten. Also setzen wir verschiedene Werte ein, z.B. $-1, 0, 1$. Damit erhalten wir jeweils $\alpha_1 = 0$ bzw. $\alpha_2 = 0$ bzw. $\alpha_3 = 0$.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H17: Ein Blick auf die rechte Seite offenbart, dass es sich um ein inhomogenes Gleichungssystem handelt. Wir lösen es mit Hilfe der Matrizennotation und stellen dazu als erstes die erweiterte Koeffizientenmatrix auf, welche wir dann weiter manipulieren, bis wir das Ergebnis ablesen können.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + 3\,Z_1: \\ \\ Z_4 + Z_3: \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 16 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -1\,Z_1: \\ \frac{1}{2}\,Z_2: \\ Z_3 - Z_1: \\ \frac{1}{2}\,Z_4: \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -3/2 & 8 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 5\,Z_4: \\ Z_2 - 8\,Z_4: \\ Z_3 + 4\,Z_4: \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3: \\ Z_2 + \frac{3}{2}\,Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Damit lässt sich die (eindeutige!) Lösung ablesen als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Probe: $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 3-3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H18:

(a) Zur Berechnung der Hesseschen Normalform berechnen wir zunächst zwei Vektoren in der Ebene:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aus dem Kreuzprodukt $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = -\frac{9}{2}(3,4,0)^\intercal$ dieser beiden Vektoren bekommen wir (nach Normierung) den Normalenvektor $\overrightarrow{n^*} = -(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^\intercal$. Einsetzen von P_1 liefert $\langle\, \overrightarrow{n} | \, P_1 \rangle = -1$. Für die Hessesche Normalform müssen wir also $n := -n^*$ verwenden, es ergibt sich

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{3}{5}\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 + 0\,x_3 = 1 \right\} .$$

(b) Die neue Ebene in Parameterform bekommt man aus den oben ausgerechneten Vektoren, wenn man P_4 als Aufpunkt wählt, also

$$E_2 : \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ -8 \end{pmatrix}$$

Die Ebene in Hessescher Normalform bekommen wir, indem wir den Punkt P_4 „einsetzen". Damit erhalten wir:

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{3}{5}\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 + 0\,x_3 = 2 \right\} .$$

Zu Aufgabe H19:

(a) Um diese Formel mit relativ wenig Aufwand zu beherrschen, ist die Beobachtung hilfreich, dass die Summen in der Formel dreimal die gleichen sind. Daher können wir die Formel folgendermaßen umschreiben:

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{\langle u_k | u_k \rangle}} u_k \quad \text{mit} \quad u_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k | b_j \rangle b_j$$

Damit ergibt sich durch Rechnung: $u_1 = v_1$ und

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

(b) Durch direktes Nachrechnen kann man zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 jeweils normiert und orthogonal zueinander sind, d.h. ein Orthonormalsystem bilden. Die lineare Unabhängigkeit folgt damit automatisch [vgl. 2.9.9 der Vorlesung]. Und natürlich bilden die drei Vektoren keine Basis, denn jede Basis im $\mathbb{R}^4$ muss vier Vektoren enthalten.

Eine andere Möglichkeit zu zeigen, dass die drei Vektoren ein Orthonormalsystem bilden, ist die Untersuchung der allgemeinen Formeln. Der Schritt von u_k nach b_k ist einfach die Normierung des Vektors u_k. Dahr sind alle Vektoren nach Abschluss des Verfahrens normiert. Wir müssen also nur noch zeigen, dass sie auch orthogonal sind:

$$\langle b_1|u_2\rangle = \Big\langle b_1|v_2 - \langle v_2|b_1\rangle b_1\Big\rangle = \langle b_1|v_2\rangle - \langle v_2|b_1\rangle \underbrace{\langle b_1|b_1\rangle}_{=1} = 0$$

Da b_2 nur ein skalares Vielfaches von u_2 ist, sind auch b_1 und b_2 orthogonal. Die anderen beiden Orthogonalitäten bekommt man mit einer ähnlichen, allerdings etwas komplizierteren Rechnung:

$$\langle b_1|u_3\rangle = \Big\langle b_1|v_3 - \langle v_3|b_1\rangle b_1 - \langle v_3|b_2\rangle b_2\Big\rangle = \langle b_1|v_3\rangle - \langle v_3|b_1\rangle \underbrace{\langle b_1|b_1\rangle}_{=1} - \langle v_3|b_2\rangle \underbrace{\langle b_1|b_2\rangle}_{=0} = 0$$

$$\langle b_2|u_3\rangle = \Big\langle b_2|v_3 - \langle v_3|b_1\rangle b_1 - \langle v_3|b_2\rangle b_2\Big\rangle = \langle b_2|v_3\rangle - \langle v_3|b_1\rangle \underbrace{\langle b_2|b_1\rangle}_{=0} - \langle v_3|b_2\rangle \underbrace{\langle b_2|b_2\rangle}_{=1} = 0$$

Zu Aufgabe H20:

(a) Hier müssen wir auf die Definition von „linear unabhängig“ zurückgehen. Wir setzen an $\beta v + \gamma(v + \alpha w) = 0$. Die beiden Vektoren sind genau dann linear unabhängig, falls $\beta = \gamma = 0$ die einzige Lösung für diese Gleichung ist. Durch Umklammern erhält die Gleichung die folgende Gestalt: $(\beta+\gamma)v+\gamma\alpha w = 0$. Weil nun v und w linear unabhängig sind, ist $\beta + \gamma = 0, \quad \gamma\alpha = 0$ die einzige Lösung.

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Falls $\alpha = 0$ gilt, dann kann γ beliebig (und ungleich 0) gewählt werden. Mit $\beta = -\gamma$ haben wir dann eine nicht-triviale Lösung der obigen Gleichung. Damit sind v und $v + \alpha w$ linear abhängig.

Falls $\alpha \neq 0$ gilt, dann folgt $\gamma = 0$ und $\beta = -\gamma = 0$. Damit sind v und $v + \alpha w$ linear unabhängig.

(b) Orthogonalität bestimmt man mit dem Skalarprodukt, also ist w orthogonal zu $v + \alpha w$ genau dann, falls $\langle w \,|\, v + \alpha w\rangle = 0$. Mit den Regeln für Skalarprodukte lässt sich das umschreiben zu $\langle w \,|\, v\rangle + \alpha \langle w \,|\, w\rangle = 0$. Weil nun v und w linear unabhängig sind, kann w nicht der Nullvektor sein. Damit dürfen wir durch $\langle w \,|\, w\rangle$ teilen und erhalten:

$$\alpha = -\frac{\langle w \,|\, v\rangle}{\langle w \,|\, w\rangle}\,.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H21:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2-2Z_1 \\ \\ Z_4-2Z_1 \\ Z_5-3Z_1 \\ \\ Z_7-Z_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ (-1)Z_2 \\ Z_3+Z_2 \\ Z_4-Z_2 \\ Z_5-2Z_2 \\ Z_6+Z_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (-1)Z_3 \\ \\ Z_5+Z_3 \\ Z_6-2Z_3 \\ Z_7-Z_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} Z_1-Z_2+Z_3 \\ Z_2-2Z_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Damit erhalten wir als Lösung des linearen Gleichungssystems nach dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Zu Aufgabe H22: Diese Aufgabe läßt sich ebenfalls mit einem linearen Gleichungssystem lösen. Allerdings macht die Tatsache, dass wir nur ganze Kuchen backen können eine einfachere Lösung möglich. Ein Blick auf die Rezepte und die Zuckervorräte zeigt, dass Strudel keinen Zucker brauchen und ein Rührkuchen mehr als wir haben und es daher für genau einen Napfkuchen reicht. Nach Abzug der Napfkuchenzutaten bleiben noch genau die Zutaten für zwei Strudel übrig, und das ist dann auch die Lösung.

Zu Aufgabe H23: Da der Gaußalgorithmus in seinen Operationen für b_1 und b_2 der selbe ist, können wir die Aufgabe auf einen Schlag lösen, indem wir beide rechte Seiten gleichzeitig betrachten:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 4 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$Z_1 \leftrightarrow Z_3: \quad \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2\,Z_1 : \\ Z_4 + Z_1 : \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ Z_3 + Z_2 : \\ Z_4 - 3\,Z_2 : \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist für b_1 bzw. b_2 ist also

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{S}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw.

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_\in = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösungsmengen, die vom gleichen homogenen System herkommen sind immer parallel (siehe Kapitel 3.6).

Zu Aufgabe H24: Zur besseren Verständigung geben wir unseren Matrizen Namen:

$$C := \begin{pmatrix} E_3 & A \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} E_3 & B \\ \mathbf{0} & E_3 \end{pmatrix} \qquad X := C \cdot D$$

Wir erinnern uns daran, dass $x_{kl} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj} d_{jl}$. Nun müssen wir 4 Fälle unterscheiden:

(a) $1 \leqq k, l \leqq 3$: hier gilt $c_{kj} = 1$ für $j = k$ und $c_{kj} = 0$ für $j \neq k$. Daher ist

$$x_{kl} = d_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $4 \leqq k, l \leqq 6$: hier gilt $d_{jl} = 1$ für $j = l$ und $d_{jl} = 0$ für $j \neq l$. Daher ist

$$x_{kl} = c_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) $4 \leqq k \leqq 6,\ 1 \leqq l \leqq 3$: hier gilt

$$x_{kl} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj} d_{jl} = \sum_{j=1}^{3} \underbrace{c_{kj}}_{=0} d_{jl} + \sum_{j=4}^{6} c_{kj} \underbrace{d_{jl}}_{=0} = 0$$

(d) $1 \leqq k \leqq 3,\ 4 \leqq l \leqq 6$: hier gilt

$$x_{kl} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj} d_{jl} = \sum_{j=1}^{3} c_{kj} d_{jl} + \sum_{j=4}^{6} c_{kj} d_{jl} = d_{kl} + c_{kl}$$

Damit ist alles gezeigt.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H25:

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ lösen. Wir starten mit der Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & t-1 & 3 \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir sie auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix können wir ablesen, dass wir drei Fälle unterscheiden müssen. Zum einen den Fall, in welchem $t \neq 1$ und $t \neq 0$. Dann hat die Matrix vollen Rang und nach dem Dimensionssatz hat der Kern dann Dimension 0, d.h. $\operatorname{Ker}(A_t) = \{0\}$.

Angenommen, es ist $t = 0$. Dann hat die Matrix die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch den restlichen Gaussalgorithmus erhalten wir als Lösung des LGS und damit als Kern:

$$\operatorname{Ker}(A_0) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Angenommen, es ist $t = 1$. Dann hat die Matrix die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Wir vertauschen die 3. und 4. Spalte und anschließend bringen wir den Gaussalgorithmus zu Ende. Dies ergibt die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgelesen ergäbe das die Lösungsmenge $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Wegen der Spaltenvertauschung müssen wir aber noch den 3. und 4. Eintrag in der Lösung zurücktauschen und erhalten:

$$\operatorname{Ker}(A_1) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Zu Aufgabe H26: Durch Zeilenumformungen bringen wir die Matrix auf die folgende Form:

$$B_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t(t+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir den Rang ablesen, denn für $t(t+1) \neq 0$ haben wir auch $t+1 \neq 0$ und damit Rang 6, für $t = 0$ haben wir Rang 5 und für $t = -1$ haben wir Rang 4.

Zu Aufgabe H27: Um das Verfahren nochmals deutlich zu machen berechnen wir ${}_LD_L$ Schritt für Schritt: Zunächst müssen wir die Vektoren der Basis L abbilden. Wir erhalten:

$$D\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X\right) = X - \frac{1}{2}$$
$$D\left(-X^2 + 1\right) = -2X$$
$$D\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right) = X + \frac{1}{2}$$

Nun müssen wir noch die Ergebnisse in Koordinaten bezüglich der Basis L darstellen. Wir müssen also folgende Gleichungssysteme lösen:

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

$$
\begin{aligned}
X - \frac{1}{2} &= \alpha_{11}\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X\right) + \alpha_{21}\left(-X^2+1\right) + \alpha_{31}\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right)\\
-2X &= \alpha_{12}\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X\right) + \alpha_{22}\left(-X^2+1\right) + \alpha_{32}\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right)\\
X + \frac{1}{2} &= \alpha_{13}\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X\right) + \alpha_{23}\left(-X^2+1\right) + \alpha_{33}\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right)
\end{aligned}
$$

Wir übersetzen dies in Matrizensprache und erhalten:

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc}
\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -2 & 1\\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

Achtung, dies ist ein LGS mit mehreren rechten Seiten, die wir simultan lösen. Die Lösung (α_{jk}) ergibt dann die gesuchte Matrix, also

$$
{}_L D_L = (\alpha_{jk}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}
$$

Die anderen Matrizen können wir mit demselben Verfahren ausrechnen, allerdings sind die Rechnungen einfacher. Daher hier nur die Ergebnisse:

$$
{}_M D_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}_B D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

Zu Aufgabe H28: Weil die Abbildung auf einer Basis von $\mathbb{R}^2$ bestimmt ist, kann man sie nur auf eine Weise zu einer Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ machen. Wir wollen allgemein angeben, was $\alpha(x,y)$ ist. Dazu berechnen wir zunächst $\alpha(1,0)$ und $\alpha(0,1)$. Dann bekommen wir, weil α eine lineare Abbildung ist, dass $\alpha(x,y) = x\cdot\alpha(1,0) + y\cdot\alpha(0,1)$.

Es ist wegen Linearität

$$
\begin{aligned}
\alpha(1,0) &= \alpha\left(1,-\frac{1}{3}\right) + \alpha\left(0,\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-4\right) + \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},9\right) = (1,0,5)\\
\alpha\left(0,1\right) &= 3\cdot\alpha\left(0,\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},9\right) = (2,-1,27)
\end{aligned}
$$

Damit folgt insgesamt $\alpha(x,y) = (x+2y, -y, 5x+27y)$. Daher ist $\alpha(1,0) = (1,0,5)$ und der Fall, dass $\alpha(1,0)$ gleich $\left(\frac{1}{3},-7,42\right)$ ist unmöglich.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H29:

(a) Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & -8 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen die Lösung von $Ax = b_i$ mittels $x = A^{-1}b_i$ und erhalten als Lösungen für b_1, b_2, b_3 bzw. b_4:

$$\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4 \\ 41 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 32 \\ 35 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H30:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H31: Zunächst bestimmen wir einige wichtige Hilfsmatrizen, die nicht direkt gefragt sind:

$$_Ef_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad _Eg_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$_B\mathrm{id}_E = (_E\mathrm{id}_B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad _C\mathrm{id}_E = (_E\mathrm{id}_C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$_E(g \circ f)_B = {_Eg_C}\ {_C\mathrm{id}_E}\ {_Ef_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a)

$$_E(g \circ f)_E = {_E(g \circ f)_B}\ {_B\mathrm{id}_E} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

(b)

$$_B(g \circ f)_B = {_B}\mathrm{id}_E \; {_E}(g \circ f)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Den Kern berechnen wir mit Hilfe der Matrix $_E(g \circ f)_E$. In ihr können wir den Kern direkt ablesen (oder leicht berechnen) als

$$\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; {_E}v = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Zu Aufgabe H32:

(a) Diese Abbildung wird beschrieben durch die Matrix $A = (a_{jk})$, also $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Jede durch Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor beschriebene lineare Abbildung ist linear.

(b) Diese Abbildung wird durch die Matrix $B = (a_{jk}^2)$ beschrieben und ist daher ebenfalls linear.

(c) Diese Abbildung ist nicht linear, denn

$$f(2, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^{m} a_{j1} 4 e_j.$$

Wäre die Abbildung linear, so müsste $2f(1, 0, \dots, 0)$ dasselbe geben, aber es ist

$$2f(1, 0, \dots, 0) = 2 \sum_{j=1}^{m} a_{j1} e_j$$

Allerdings gibt es einen Fall, bei dem das doch gilt, nämlich wenn $a_{jk} = 0$ für alle j und k. In diesem Spezialfall ist die Abbildung f die Nullabbildung und die ist linear.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H33: Es ist $\det(A_t) = 8(2t-3)$. Unter Ausnutzung der Rechenregeln für Determinanten erhalten wir:

$$\det(A_t^5) = (\det(A_t))^5 = 8^5(2t-3)^5 \qquad \det(xA_t) = x^6\det(A_t) = x^6 8(2t-3)$$
$$\det(A_t^{-1}) = (\det(A_t))^{-1} = \frac{1}{8(2t-3)} \qquad \det((A_t^{-1})^5) = \det(A_t)^{-5} = \frac{1}{8^5(2t-3)^5}$$

Die letzten beiden Ausdrücke sind nur für $t \neq \frac{3}{2}$ definiert.

Zu Aufgabe H34:

(a) s ist eine lineare Abbildung denn s hat die Darstellungsmatrix

$$_Cs_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sei F irgendeine Basis von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\det({_F}s_F) &= \det({_F}\mathrm{id}_C\ {_C}s_C\ {_C}\mathrm{id}_F) = \det({_F}\mathrm{id}_C)\det({_C}s_C)\det({_C}\mathrm{id}_F) \\ &= (\det({_C}\mathrm{id}_F))^{-1}\det({_C}\mathrm{id}_F)\det({_C}s_C) = \det({_C}s_C)\end{aligned}$$

Daher sind alle Determinanten im Teil (b) gleich und es genügt $\det({_C}s_C) = 1$ zu berechnen.

(c) Weil das Aufstellen der Matrizen sehr aufwendig ist, nützen wir die Rechenregeln für Determinanten um uns das Leben einfacher zu machen. Zunächst brauchen wir drei einfach aufzustellende Basiswechselmatrizen und deren Determinanten:

$$\det({_C}\mathrm{id}_B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det({_C}\mathrm{id}_D) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$
$$\det({_C}\mathrm{id}_E) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Damit haben wir:

$$\det({_B}s_E) = \det({_B}\mathrm{id}_C\ {_C}s_C\ {_C}\mathrm{id}_E) = (\det({_C}\mathrm{id}_B))^{-1}\det({_C}s_C)\det({_C}\mathrm{id}_E) = \frac{1}{2}$$
$$\det({_C}s_D) = \det({_C}s_C\ {_C}\mathrm{id}_D) = \det({_C}s_C)\det({_C}\mathrm{id}_D) = -\frac{1}{2}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H35:

(a) Es ist $c(\lambda) = \det(A_\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$.

(b) Die Nullstellen sind zweimal 1 und einmal -1, d.h. das Polynom hat die Form $c(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

Zu Aufgabe H36:

(a) Da $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ist, müssen wir zwei lineare Gleichungssysteme lösen, nämlich $A_1 b = 0$ und $A_{-1} b = 0$. Diese haben die folgenden Lösungsmengen:

$$\left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \eta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \eta \in \mathbb{R} \right\}$$

Als Basis nehmen wir

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen noch zeigen, dass dies tatsächlich eine Basis ist. Da wir die Dimension des Vektorraums kennen (nämlich 3) reicht es zu zeigen, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind. Eine Möglichkeit ist es, den Rang der Matrix aus den drei Vektoren zu berechnen. Dieser ist tatsächlich 3, also bilden die Vektoren eine Basis.

(b) Wir haben ${}_B\alpha_B = {}_B\mathrm{id}_E \; {}_E\alpha_E \; {}_E\mathrm{id}_B$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Dann ist

$${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Hier nutzen wir aus, dass ${}_E\alpha_E = {}_E\mathrm{id}_B \; {}_B\alpha_B \; {}_B\mathrm{id}_E$ ist. Wir setzen das in die Summenformel ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_E\alpha_E\right)^k &= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_E\mathrm{id}_B \; {}_B\alpha_B \; {}_B\mathrm{id}_E\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} {}_E\mathrm{id}_B \left({}_B\alpha_B\right)^k {}_B\mathrm{id}_E \\ &= {}_E\mathrm{id}_B \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_B\alpha_B\right)^k \right) {}_B\mathrm{id}_E \end{aligned}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Die innere Summe können wir nun relativ leicht berechnen und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_B\alpha_B\right)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{120} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{120} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{120} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{163}{60} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{163}{60} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{60} \end{pmatrix}$$

Das ergibt als Endergebnis

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} \left({}_E\alpha_E\right)^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{163}{60} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{163}{60} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{120} \begin{pmatrix} -379 & 705 & -705 \\ -282 & 608 & -292 \\ 141 & -141 & 497 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H37:

(a) Nach dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren ergibt sich folgende Lösung für die Basis:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(b) Die Matrix ist orthogonal, weil ihre Spalten normiert und paarweise orthogonal zueinander stehen.

Zu Aufgabe H38:

(a) Zu zeigen, dass die Basis eine Orthonomalbasis ist gleichwertig damit, die Spaltenmatrix $C = {}_E\mathrm{id}_B$ der Basisvektoren zu betrachten und zu zeigen, dass diese Matrix orthogonal ist. Wir rechnen also:

$$C \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es ist ${}_B\delta_B = {}_B\delta_E \; {}_E\mathrm{id}_B$ wobei ${}_B\delta_E$ durch die Aufgabenstellung gegeben ist. Wir berechnen daher:

$${}_B\delta_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Wir benutzen den Satz, dass eine orthogonale Abbildung genau dann orthogonal ist, wenn die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis, also ${}_E\delta_E$, eine orthogonale Matrix ist. Wie in (a) gezeigt ist ${}_E\mathrm{id}_B$ orthogonal, also ${{}_E\mathrm{id}_B}^T = {}_B\mathrm{id}_E$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
{{}_E\delta_E}^T \, {}_E\delta_E &= \left({}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E\right)^T \left({}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E\right) \\
&= {{}_B\mathrm{id}_E}^T \, {{}_B\delta_B}^T \, {{}_E\mathrm{id}_B}^T \, {}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E \\
&= {}_E\mathrm{id}_B \, {{}_B\delta_B}^T \, {}_B\mathrm{id}_E \, {}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E \\
&= {}_E\mathrm{id}_B \, {{}_B\delta_B}^T \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E
\end{aligned}$$

Nun berechnet sich ganz leicht ${{}_B\delta_B}^T \, {}_B\delta_B = E_3$, also ist ${{}_E\delta_E}^T \, {}_E\delta_E = {}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\mathrm{id}_E = E_3$, womit wir die Behauptung bewiesen haben.

(d) Aus Aufgabe (b) sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\det\left({}_E\delta_E\right) &= \det\left({}_E\mathrm{id}_B \, {}_B\delta_B \, {}_B\mathrm{id}_E\right) \\
&= \det\left({}_E\mathrm{id}_B\right) \det\left({}_B\delta_B\right) \det\left({}_B\mathrm{id}_E\right) = \det\left({}_B\delta_B\right) = 1.
\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H39: Diese Aufgabe war so ähnlich schon in Aufgabe H19 dran. Die Musterlösung dort enthält auch die Antwort für diese Aufgabe.

Zu Aufgabe H40: Wir wissen aus H30, dass die Inverse zu einem Element $\begin{pmatrix}1 & & & x\\ & 1 & & y\\ & & 1 & z\\ & & & 1\end{pmatrix}$ die Form $\begin{pmatrix}1 & & & -x\\ & 1 & & -y\\ & & 1 & -z\\ & & & 1\end{pmatrix}$ hat. Wir benutzen daher das Untergruppenkriterium um zu zeigen dass wir es mit einer Untergruppe zu tun haben:

$$\begin{pmatrix}1 & & & -x\\ & 1 & & -y\\ & & 1 & -z\\ & & & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & & & x'\\ & 1 & & y'\\ & & 1 & z'\\ & & & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & & x'-x\\ & 1 & & y'-y\\ & & 1 & z'-z\\ & & & 1\end{pmatrix}$$

Das Produkt xy^{-1} mit x, y aus der Menge ist also wieder in der Menge, daher ist die Menge es eine Untergruppe.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H41:

(a) σ und τ sind laut Definition affine Abbildungen. Es reicht daher zu zeigen, dass sie auch bijektiv sind. Das ist genau dann der Fall (siehe Vorlesung), wenn die Matrix A invertierbar ist. Wegen $\det(A) = -1$ ist dies der Fall.

(b) Hierzu müssen wir zeigen, dass A eine orthogonale Matrix mit Determinante $\det(A) = -1$ ist. Also berechnen wir $A^T A = E_3$ und sind fertig.

Zu Aufgabe H42:

(a) Bei jeder Gleichheit von Mengen müssen wir zwei Inklusionen zeigen. Wir starten mit $\tau(F) \subseteqq F$. Sei also $v \in F$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)(Av+t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}v + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{(-1,-1,1)\,v}_{=0} + 0 = 0\end{aligned}$$

Damit ist $\tau(v) \in F$. Für die andere Richtung $F \in \tau(F)$ müssen wir zeigen, dass τ surjektiv auf F abbildet. Eine Möglichkeit ist die Umkehrabbildung τ^{-1} zu nutzen und zu zeigen, dass $\tau^{-1}(F) \subseteqq F$. Dabei ist $\tau^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto A^{-1}v + A^{-1}t$. Der restliche Beweis geht dann analog zu oben.

(b) Die Gerade durch P und $\tau(P)$ ist genau dann parallel zu F, wenn ihr Richtungsvektor senkrecht auf dem Normalenvektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ von F steht. Der Richtungsvektor der Geraden durch P und $\tau(P)$ ist

$$\begin{aligned}\tau(P) - P = A\vec{p} + t - \vec{p} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\\ &= \frac{2}{3}(-p_1 - p_2 + p_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt dieses Vektors mit dem Normalenvektor ist $\frac{2}{\sqrt{3}}(-p_1 - p_2 + p_3)$ und daher nur dann Null, wenn $p_1 + p_2 - p_3 = 0$. Dies bedeutet aber, dass P in der Ebene F liegt.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H43:

(a) Die Gleichung $\sigma(v) = v$ können wir durch $(A - E_3)\,v = -s$ ausdrücken. Also müssen wir das folgende linear Gleichungssystem lösen:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses hat die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösungsmenge ist eine Ebene, dargestellt in Parameterform. Die Sprechweise "affine Ebene" deutet an, dass die Ebene selbst auch als affiner Raum betrachtet werden kann.

(b) Aus der Lösung des LGS können wir den Normalenvektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ der Ebene $\mathrm{Fix}(\sigma)$ leicht ablesen. Wir müssen also zeigen, dass die Gerade durch P und $\sigma(P)$ in die selbe Richtung verläuft. Wie in Aufgabe H42 erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma(P) - P = A\vec{p} + s - \vec{p} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}\left(-p_1 - p_2 + p_3 + \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist die Gerade senkrecht zur Ebene $\mathrm{Fix}(\sigma)$.

Zu Aufgabe H44:

(a) Aus Aufgabe 43 haben wir die nötigen Informationen, um eine Basis mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Wir starten mit $U = (3, 0, 0)$. Als Vektor b_3 bleibt uns nur der Normalenvektor der Ebene, also $b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$. Für b_1 nehmen wir den Vektor $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, da dieser in $\mathrm{Fix}(\sigma)$ liegt und ein Vielfaches von t ist, was den Teil (c) unten erleichtert. Den letzten Vektor berechnen wir mit Hilfe des Kreuzprodukts $b_3 \times b_1$ (nach normieren) als $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, -2)$, der in der Tat in $\mathrm{Fix}(\sigma)$ liegt. Also ist

$$\mathbb{U} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei B die Matrix mit den Spalten $b_1, \ldots, b_3$. Dann ist die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{U}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = B^{-1} \cdot (v - U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot v - \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(c) Weil das Koordinatensystem $\mathbb{U}$ dem Problem angepasst ist, sind σ und τ darin einfach zu beschreiben. Wenden wir uns zunächst σ zu. U liegt in der Fixpunktebene $\mathrm{Fix}(\sigma)$ und b_1 und b_2 spannen diese Fixpunktebene auf. Daher werden die ersten beiden Koordinaten nicht verändert denn $\sigma(U) = U$ und $\sigma(U + b_1) = U + b_1$, $\sigma(U + b_2) = U + b_2$. Auch sehen wir daran, dass der Translationsanteil 0 ist. Den Vektor $U + b_3$ stellen wir in $\mathbb{E}$-Koordinaten dar, bilden ihn ab und schauen, was rauskommt:

$$\sigma(U + b_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = U - b_3$$

Damit ergibt sich die Abbildung im $\mathbb{U}$-Koordinatensystem als

$$_{\mathbb{U}}\sigma_{\mathbb{U}} : {}_{\mathbb{U}}v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{U}}v$$

σ und τ haben den selben linearen Anteil, also müssen wir für die Darstellung von τ nur noch den Translationsanteil berechnen. Dies können wir tun, indem wir den Punkt U mit $_{\mathbb{E}}\tau$ abbilden und das Ergebnis anschliessend mittels $_{\mathbb{U}}\kappa_{\mathbb{E}}$ zu transformieren. Es ist

$$_{\mathbb{E}}(\tau(U)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad {}_{\mathbb{U}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}(\tau(U))) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir insgesamt für $_{\mathbb{U}}\tau_{\mathbb{U}}$:

$$_{\mathbb{U}}\tau_{\mathbb{U}} : {}_{\mathbb{U}}v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{U}}v + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Natürlich erzielen wir das selbe Ergebnis, wenn wir statt der Überlegungen und Rechnungen einfach die Formeln mit den Koordinatentransformationen aus Satz 4.7.12 anwenden.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H45:

(a) Wir entwickeln zuerst nach der 1. Zeile, dann nach der 2. Spalte, dann nach der 3. Zeile und erhalten:

$$\chi_A(\lambda) = (-2-\lambda)^2(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} = -(2+\lambda)^2(1-\lambda)^2\lambda.$$

(b) Aus dem charakteristischen Polynome können wir die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$ ablesen. Die Eigenvektorräume bekommen wir als Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichungssysteme $Av = \lambda_i v$.

$$\text{Eigenraum } V(-2): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenraum } V(0): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenraum } V(1): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Wir nehmen $f_1 = (0,1,0,0,0)^T$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem $(A-\lambda_1 E)f_2 = f_1$ hat dann die Lösungsmenge $\{(1,\alpha,2,0,0)^T \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Wir wählen $f_2 = (1,0,2,0,0)^T$. Weiter wählen wir $f_3 = (0,0,0,-1,1)^T$ und $f_4 = (0,-2,1,3,0)^T$ sowie $f_5 = (0,0,-1,0,1)^T$. Eine kurze Rechnung (z.B. Rangbestimmung der Matrix $(f_1,\ldots,f_5)$) zeigt, dass diese 5 Vektoren tatsächlich eine Basis bilden.

(d) Darstellung bezüglich Eigenvektoren ergibt eine Diagonalmatrix mit dem Eigenwert auf der Diagonale. Einen Unterschied dazu macht natürlich f_2, das kein Eigenvektor ist. Es ist $Af_2 = \lambda_1 f_2 + f_1$. Daher ist

$$_F\alpha_F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H46:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$: wir wissen dass $A^1 v = Av = \lambda v$, denn v ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Induktionshypothese: es gilt $A^{n-1}v = \lambda^{n-1}v$.

Induktionsschluss: es ist $A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}(\lambda v) = \lambda A^{n-1}v = \lambda \cdot \lambda^{n-1}v = \lambda^n v$. Der vorletzte Schluss benutzt die Induktionshypothese.

(b) Die Matrix C aus P40 ist ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, denn $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -1, aber C hat keine reellen Eigenwerte.

Zu Aufgabe H47:

(a) Der einzige Eigenwert von φ ist 0 und der Eigenraum zum Eigenwert 0 wird vom Vektor $(i, -1)^T$ aufgespannt.

(b) Wir wählen $f_2 = (1, 0)^T$. Die Matrixdarstellung ergibt sich ähnlich wie in Aufgabe 46 als

$$_F\varphi_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H48: Zur Umrechnung der Koordinaten brauchen wir die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{O}}$. Diese läßt sich mit Hilfe der Matrix A, welche aus den Spalten $o_1, \dots, o_n$ besteht und des Punktes U als $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{O}}(_{\mathbb{O}}Y) = AY + U$ beschreiben. Die umgekehrte Transformation ist dann $_{\mathbb{O}}\kappa_{\mathbb{E}}(_{\mathbb{E}}Y) = A^{-1}Y - A^{-1}U$.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{O}}(_{\mathbb{O}}\alpha(X)) &= AB\ _{\mathbb{O}}X + As + U \\
&= AB\ _{\mathbb{O}}\kappa_{\mathbb{E}}(_{\mathbb{E}}X) + As + U \\
&= AB\ (_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{O}})^{-1}(_{\mathbb{E}}X) + As + U \\
&= AB(A^{-1}\ _{\mathbb{E}}X - A^{-1}U) + As + U \\
&= ABA^{-1}{}_{\mathbb{E}}X - ABA^{-1}U + As + U
\end{aligned}$$

Der lineare Anteil ist also ABA^{-1} und der Translationsanteil ist $-ABA^{-1}U + As + U$.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 49:

(a) Für $v_j \in V(\lambda_j)$ gilt definitionsgemäß $Av_j = \lambda_j v_j$. Wir nutzen noch die Distributivität der Matrix-Vektor-Multiplikation (was der Linearität der von A induzierten Abbildung $v \mapsto Av$ entspricht) und erhalten damit

$$Av = A\sum_{j=1}^{k} v_j = \sum_{j=1}^{k} Av_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \,.$$

(b) Um für $j \in \{1,2\}$ die Vektoren v_j als Eigenvektoren zu identifizieren, müssen wir λ_j finden, so dass $Av_j = \lambda_j v_j$. Wir berechnen:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} \frac{8359}{41}\cdot 100 + 200 - \frac{8400}{41}\cdot 100 \\ \frac{84}{41}\cdot 100 + 1 - \frac{84}{41}\cdot 100 \\ \frac{8400}{41}\cdot 100 + 200 - \frac{8441}{41}\cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{41}\cdot 100 + 200 \\ 1 \\ -\frac{41}{41}\cdot 100 + 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}$$

erhalten also $Av_1 = v_1$ und damit $\lambda_1 = 1$. Analog

$$Av_2 = \begin{pmatrix} \frac{8359}{41} - \frac{8400}{41} \\ \frac{84}{41} - \frac{84}{41} \\ \frac{8400}{41} - \frac{8441}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{41} \\ 0 \\ -\frac{41}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

also $Av_2 = -v_2$ und folglich $\lambda_2 = -1$.

Nun ist

$$v = \begin{pmatrix} \frac{2342}{98} \\ \frac{23}{98} \\ \frac{1171}{49} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2342}{98} \\ \frac{23}{98} \\ \frac{2342}{98} \end{pmatrix} = \frac{1}{98}\left(23\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} + 42\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

also

$$\begin{aligned} Av &= \frac{1}{98}A\left(23\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} + 42\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{98}\left(23\cdot A\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} + 42\cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{98}\left(23\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} + 42\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 2258 \\ 23 \\ 2258 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 50:

Die Matrix A aus Aufgabe H 49 soll diagonalisiert werden. Dazu müssen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmt werden. In H 49 haben wir bereits die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ ermittelt.

Wir bestimmen nun, wie im Hinweis empfohlen, den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 und erhalten

$$V(\lambda_2) = \left\{ v = \mu \begin{pmatrix} 41 \\ -42 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

(dies lässt sich auch ohne Taschenrechner bestimmen!); wir sehen damit auch, dass λ_2 ein doppelter Eigenwert sein muss, da der zugehörige Eigenraum 2-dimensional ist. Wir haben also den 2-dimensionalen Eigenraum $V(\lambda_2)$ und den 1-dimensionalen Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}(v_1)$. Daraus können wir also eine Basis aus Eigenvektoren wählen, zum Beispiel:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 41 \\ -42 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 100 & 1 & 41 \\ 1 & 0 & -42 \\ 100 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix (die Eigenwerte stehen in der von T vorgegebenen Reihenfolge auf der Diagonalen):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H 52:

Zu bestimmen ist die Darstellung der quadratischen Form q bezüglich der Basis B. Dazu benutzen wir die Basistransformationsmatrix ${}_E\mathrm{id}_B$. Es gilt ${}_Ex = {}_E\mathrm{id}_B\,{}_Bx$. Dies setzen wir in die Zuordnungsvorschrift von q ein:

$$({}_Ex)^\intercal A\,({}_Ex) = ({}_E\mathrm{id}_B\,{}_Bx)^\intercal A\,({}_E\mathrm{id}_B\,{}_Bx) = ({}_Bx)^\intercal\,\underbrace{({}_E\mathrm{id}_B{}^\intercal A\,{}_E\mathrm{id}_B)}_{=:C}({}_Bx).$$

Die so definierte Matrix C erfüllt die gewünschte Bedingung.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 51:

(a) Man liest ab: der quadratische Teil ist $q(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, ein linearer Teil ist nicht vorhanden und der konstante Teil ist $c = 1$.

(b) Mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = 1$$

erhalten wir

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^\mathsf{T} A\, x + 2\, a^\mathsf{T} x + c = 0 \right\}$$

(c) Wir stellen zuerst die Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a^\mathsf{T} \\ \hline a & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

auf. Nun ist $\operatorname{Rg} A = 3$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = 4$, also $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \operatorname{Rg} A + 1$. Es ist also eine Mittelpunktsquadrik.

(d) Da $(-x_j)^2 = {x_j}^2$ ist die Quadrik symmetrisch bezüglich der Koordinatenebenen.

Sei nun $k \in \mathbb{R}$. Schneiden wir die Quadrik mit der Ebene $x_1 = k$, so erhalten wir:

$$0 = k^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = k^2 + 1$$

also Kreise mit Radius $\sqrt{k^2+1}$. Das zeigt auch, dass Q rotationssymmetrisch bezüglich der x_1-Achse ist. Insbesondere haben die Kreise aber immer einen größeren Radius als 1.

Mit diesem Wissen reicht es dann schon, noch den Schnitt mit der Ebene $x_3 = 0$ zu untersuchen, um ein recht gutes Bild von der Quadrik zu erhalten. Es ist nämlich

$$0 = x_1^2 - x_2^2 + 1 \Leftrightarrow -x_1^2 + x_2^2 = 1$$

eine Hyperbel.

Die Quadrik nennt sich einschaliges Hyperboloid.

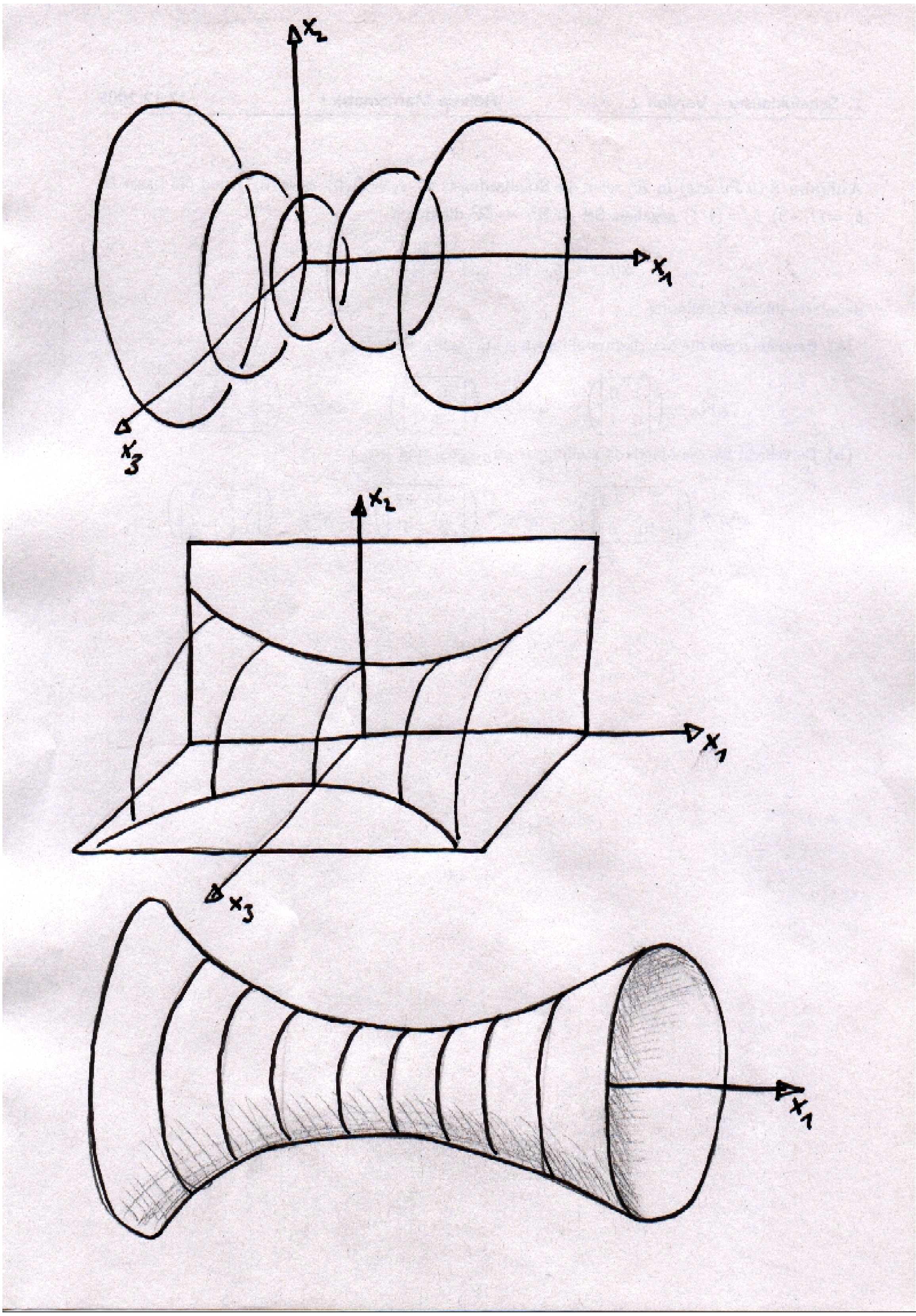
Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.

Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H53:

Zunächst stellen wir die Gleichung der Quadrik in Matrizenform auf und setzen dazu ${}_E x := (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$Q \ : \ ({}_E x)^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_E x + 2(-2, -11, 17) \cdot {}_E x - 33 = 0$$

Nun drehen wir als nächstes das Koordinatensystem, d.h. wir führen eine Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte der Matrix sind 0, -9 und 9. Die Matrix der zugehörigen Eigenvektoren hat folgende Gestalt:

$$T := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir transformieren auf das neue Koordinatensystem $\mathbb{D}$, das von diesen Eigenvektoren aufgespannt wird durch ${}_E\kappa_D \ : \ {}_D x \mapsto T \cdot {}_D x$. Die Quadrik Q hat in den neuen Koordinaten dann folgende Gleichung (einsetzen von ${}_E x = T \cdot {}_D x$):

$$Q \ : \ ({}_D x)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} {}_D x + 2(-3, 18, -9) {}_D x - 33 = 0$$

Mittels quadratischem Ergänzen errechnen wir die nächste Koordinatentransformation

$${}_D\kappa_C : {}_C x \mapsto {}_C x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Quadrik in der Gleichung (mit ${}_C x = (y_1, y_2, y_3)^T$):

$$-9y_2^2 + 9y_3^2 + 2(-3)y_1 - 6 = 0$$

Zuletzt verschieben wir noch, um den konstanten Term zu eliminieren mittels

$${}_C\kappa_B : {}_B x \mapsto {}_B x - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir als euklidische Normalform der Quadrik Q (mit ${}_B x = (z_1, z_2, z_3)^T$):

$$3z_2^2 - 3z_3^2 + 2z_1 = 0$$

Damit erweist sich Q als hyperbolisches Paraboloid.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H54: In dieser Aufgabe werden alle Koordinatensysteme nach der ursprünglichen Basis, also der Standardbasis $\mathbb{E}$ beschrieben.

Zunächst muss gesagt werden, dass die Transformationsmatrix T in dem Beispiel falsch ist. Richtig wäre die folgende Matrix, also

$$T_{\text{richtig}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatentransformation ist dann (mit dem korrekten T): ${}_E\kappa_D : {}_Dx \mapsto T \cdot {}_Dx$ und das ergibt als Koordinatensystem

$$\mathbb{D} = \left(\vec{0}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Die nächste Koordinatentransformation ist das Vertauschen von y_1 und y_3, also die Trafo:

$${}_D\kappa_C : {}_Cx \mapsto \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot {}_Cx \qquad \text{mit } \mathbb{C} = \left(\vec{0}; \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Nun führen wir die Translation durch, also

$${}_C\kappa_B : {}_Bx \mapsto {}_Bx + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mathbb{B} = \left(\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

Die letzte Drehung ist im Buch mittels der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Koordinatentransformation ist dann ${}_B\kappa_A : {}_Ax \mapsto S \cdot {}_Ax$. Das neue Koordinatensystem lautet:

$$\mathbb{A} = \left(\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{25\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 20+3\sqrt{2} \\ -15+4\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{25\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 20+3\sqrt{2} \\ -15+4\sqrt{2} \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

Insgesamt erhalten wir die gesamte Koordinatentransformation ${}_E\kappa_A$ als Komposition der einzelnen Transformationen. So ergibt sich

$${}_E\kappa_A : {}_Ax \mapsto \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 4 & 4 \\ 4\sqrt{2} & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_Ax + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Poppitz **Höhere Mathematik I** Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H55:

(a) Es ist $\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}$. Die Folge ist streng monoton fallend, denn $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$. Ausserdem sind alle Folgenglieder größer als 1, was also eine untere Schranke darstellt. Da die Folge streng monoton fallend ist muss sie auch nach oben beschränkt sein, nämlich durch ihr erstes Glied, sie ist also nach oben durch 2 beschränkt.

(b) Die Folge $\left((-1)^n \frac{n^2+n}{n^2}\right)$ ist sicher nicht monoton, da die Glieder abwechselnd negativ und positiv sind. Der Betrag der Folge ist allerdings der selbe wie bei (a), der Betrag ist also nach oben und unten beschränkt. Aber dann ist auch die Folge selbst beschränkt mit Schranken ± 2.

(c) Die Folge $(2n + \sin(n))$ ist streng monoton steigend denn $2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin(n) = 2 + \sin(n+1) - \sin(n)$. Die Differenz $\sin(n) - \sin(n+1)$ kann höchstens 2 betragen, denn der Sinus nimmt nur Werte zwischen -1 und $+1$ an. Aber diese Maximaldifferenz kommt nur vor, wenn der Abstand genau π beträgt. Daher ist $|\sin(n+1) - \sin(n)| < 2$ und die Folge damit streng monoton steigend.

Die Folge ist damit natürlich nach unten durch $0 < 2 + \sin(1)$ beschränkt. Nach oben ist sie unbeschränkt denn wir können abschätzen:

$$|2n + \sin(n)| \geqq |2n| - |\sin(n)| \geqq 2n - 1$$

Letzteres strebt gegen $+\infty$ für $n \to \infty$.

(d) Die Folge $(2\pi n + n\sin(n))$ ist weder beschränkt noch monoton. Das Letztere sieht man auf folgende Weise:

$$(2\pi(n+1)+(n+1)\sin(n+1)) - (2\pi n + n\sin(n)) = 2\pi + sin(n+1) + n(\sin(n+1) - \sin(n))$$

Der letzte Term darin kann mit n beliebig gross werden und wegen der Differenz der Sinusfunktionen sowohl positiv als auch negativ. Daher ist die Folge nicht monoton.

Die Folge ist auch nicht beschränkt, denn wie in (c) schätzen wir ab

$$|2\pi n + n\sin(n)| \geqq n(|2\pi| - |\sin(n)|) \geqq n(2\pi - 1).$$

Zu Aufgabe H56: Das linke Bild stellt vermutlich zwei parallele Ebenen dar. Eine mögliche Gleichung ist $-x_1^2 + 1 = 0$.

Das mittlere Bild stellt einen Doppelkegel dar mit möglicher Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Das rechte Bild ist vermutlich ein parabolischer Zylinder mit Gleichung $x_1^2 + 2x_2 = 0$.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.

Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 57:

(a) Um die Konvergenz gegen 0 zu zeigen, müssen wir beweisen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 so gibt, dass $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, wobei $a_0 := \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist.

Wir wählen zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann gilt nämlich für alle $n > n_0$:

$$n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \iff |a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(b) Mit der dritten binomischen Formel haben wir

$$b_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Damit ist die Folge b_n zwischen 0 und der Nullfolge $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ eingesperrt, konvergiert nach dem Sandwichsatz also selbst gegen 0.

Zu Aufgabe H 58:

(a) Wir zeigen sogar $a_n > 1 + \sqrt{2}$, weil dies nachher das Monotonieargument vereinfacht. Es gilt $a_1 = 4 > 1 + \sqrt{2}$. Wir nehmen an, dass für alle a_j mit $j \leqq k$ gilt, dass $a_j > 1 + \sqrt{2}$. Nun ist

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k + 1} > \sqrt{2(1 + \sqrt{2}) + 1} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$$

und damit die Induktion bewiesen.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Folge monoton fällt, indem wir aufeinander folgende Glieder vergleichen:

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - 2a_n - 1 = (a_n - 1)^2 - 2 > ((1 + \sqrt{2}) - 1)^2 - 2 = 0$$

Hier benutzen wir das Ergebnis aus (a). Daraus folgt dann $a_n^2 > a_{n+1}^2$ und damit $a_n > a_{n+1}$. Die Beschränktheit nach unten folgt aus (a), die nach oben ist klar, weil die Folge streng monoton fällt.

(c) Aus (b) wissen wir mit Bolzano-Weierstraß, dass die Folge (a_n) konvergiert. Wir nennen den Grenzwert a. Aus Aufgabe P51 wissen wir, dass dann auch die Folge $(\sqrt{2a_n + 1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den Grenzwert $\sqrt{2a + 1}$. Aber wegen $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$ haben die Folgen denselben Grenzwert, also gilt $a = \sqrt{2a + 1}$. Durch Auflösen der quadratischen Gleichung erhalten wir $a = 1 \pm \sqrt{2}$. Den Wert $1 - \sqrt{2}$ können wir aber als Grenzwert ausschließen, weil alle Folgenglieder größer als $1 + \sqrt{2}$ sind.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2005/06

Zu Aufgabe H 59: Die Grenzwerte all dieser Folgen sind recht leicht zu bestimmen, indem man die Grade der Polynome in Zähler und Nenner vergleicht. Ich gebe hier nur die Ergebnisse an:

(a) $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$, $c_n \to \infty$, $d_n \to -\infty$, $e_n \to \infty$, $f_n \to \infty$ und $g_n \to 0$. .

(b) $a_n b_n = 2 \to 2$, $a_n g_n \to 0$, $d_n b_n \to -\infty$, $f_n g_n$ divergiert, aber nicht bestimmt, $a_n - c_n \to -2$, $a_n - d_n \to \infty$, $a_n - e_n = 16$, $\frac{b_n}{g_n}$ divergiert, aber nicht bestimmt und $\frac{g_n}{b_n} \to 0$.
Dies liefert eine Fülle von Beispielen für die in der Aufgabe genannten Produkte, Differenzen und Quotienten von Grenzwerten mit ganz unterschiedlichen Ausgängen, so dass diesen Ausdrücken kein sinnvoller Wert zugeordnet werden kann.