Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H1:

(a) $z_1' = z_2 + z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

(b) $z_2' = z_2 \cdot z_1 = 10 + 10i$

(c) $z_3' = \frac{z_1}{z_4} = \frac{1}{3}$

Zu Aufgabe H2: Zu zeigen ist:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr. Zu zeigen: $\sum_{j=1}^{1} 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

$$\sum_{j=1}^{1} 1^3 = 1^3 = 1 = \frac{2^2}{4} = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$$

Induktionsschluss: Ist $A(n)$ wahr, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.
Zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}.$$

Aus $A(n)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} j^3 &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^3\right) + (n+1)^3 \\
&\overset{A(n)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2 4(n+1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2(4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Also ist auch $A(n+1)$ wahr.

In Worten: Die Summe der dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis n ergibt $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Zu Aufgabe H3: Verfahren Sie wie in der Vorlesung angegeben bzw 1.3.5 im Skript. Setzen Sie anstelle reeller Zahlen komplexe Zahlen ein und gehen Sie analog vor.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H4: Hier kann es keine Musterlösung geben sondern nur Beispiele, was in der Natur der Aufgabe liegt.

(a) Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+,\ x\mapsto |x|$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) Die Abbildung $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(c) Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(d) Die Abbildung $f:\{a,b\}\to\{c,d\},\ a\mapsto c,\ b\mapsto d$ ist bijektiv.

(e) Die Abbildung $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q},\ x\mapsto \frac{4}{7}$ ist konstant.

(f) Die Abbildung $f:\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto \frac{x}{|x|}$ hat ein zweielementiges Bild.

Zu Aufgabe H5: Wegen eines Fehlers beim Erstellen der Aufgabe sind leider keine schönen Zahlen als Ergebnis herausgekommen. Bitte entschuldigen Sie dies.

(a)

$$\begin{aligned}
x+y &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-i\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{5}{2}\sqrt{3}-i\frac{1}{2}\\
&= \sqrt{19}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}-i\frac{1}{2\sqrt{19}}\right)\\
&= \sqrt{19}\left(\cos(0,1150)-i\sin(0,1150)\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x+y &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+5\left(\cos\left(\frac{6\,\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{6\,\pi}{8}\right)\right)\\
&= 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+5\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{9}{2}\sqrt{2}\\
&= \sqrt{41}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{41}}+i\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{41}}\right)\\
&= \sqrt{41}\left(\cos(1,6815)+i\sin(1,6815)\right)
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $\arcsin\left(\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{41}}\right)$ ist zu beachten, dass die Zahl im 2. Quadranten liegt und deshalb $\pi-\arcsin\left(\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{41}}\right)$ zum richtigen Ergebnis führt. Die Zahl liegt im 2. Quadranten der Gaußschen Zahlenebene, da das Argument des $\arccos$ negativ ist.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

(c)

$$\begin{aligned}
x+y &= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)\\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+13i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\
&= -a+13bi\\
&\ a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\
&= \sqrt{a^2+169b^2}\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+169b^2}}+\frac{13bi}{\sqrt{a^2+169b^2}}\right)\\
&= \sqrt{a^2+169b^2}\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+169b^2}}\right)\right)+i\sin\left(\arcsin\left(\frac{13b}{\sqrt{a^2+169b^2}}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe H6: Dem Hinweis folgend sind die Lösungen für $(z-i)^8=1$ genau die Lösungen von je einer der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(z-i)^2 &= \pm 1\\
(z-i)^2 &= \pm i
\end{aligned}$$

Mit $z=x+iy$ kommt man auf folgende Lösungen

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= (i\pm 1)\\
z_3 &= 0\\
z_4 &= 2i\\
z_{5,6} &= i\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\\
z_{7,8} &= i\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Dies sind die um i verschobenen 8ten Einheitswurzeln.

Zu Aufgabe H7:

(a) Jede Drehung, die den Tetraeder als Ganzes fest lässt kann dadurch beschrieben werden, dass zu jedem Eckpunkt der Bildeckpunkt angegeben wird. Alle anderen Punkte auf den Kanten und Flächen sind damit festgelegt.

Nun beschreiben wir die beiden Drehungen d_1 und d_2 in dieser Sprache:

$$\begin{aligned}
d_1(A)=A,\ d_1(B)=D,\ d_1(C)=B,\ d_1(D)=C\\
d_2(A)=C,\ d_2(B)=A,\ d_2(C)=B,\ d_2(D)=D
\end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Drehungen hintereinander ausführen, erhalten wir

$$d_2\circ d_1(A)=C,\ d_2\circ d_1(B)=D,\ d_2\circ d_1(C)=A,\ d_2\circ d_1(D)=B$$

Diese neue Drehung $d_2 \circ d_1$ ist damit die Drehung um die Achse durch die Kantenmitten der Strecken AD und BC um 180°.

(b) Die zwölf Drehungen ergeben sich daraus, dass es zu jeder Ecke eine Drehachse durch die gegenüberliegende Flächenmitte gibt mit Drehungen um 120° und 240°. Dies macht insgesamt 8 solche Drehungen. Dazu kommen drei Paare von gegenüberliegenden Kanten mit jeweils einer Drehung um 180°. Zusammen mit der Identität (Drehung um 0°) sind dies die gesuchten 12 Drehungen.

(c) Am Anfang der Musterlösung haben wir gesehen, dass jede Drehung dadurch festgelegt wird, was auf den 4 Eckpunkten passiert. Wenn wir zwei Drehungen nacheinander ausführen gibt dies natürlich wieder eine Abbildung, welche die Menge der Eckpunkte auf sich selbst abbildet. Solche Abbildungen gibt es insgesamt 24 Stück. Dass es auch wieder eine Drehung ist bekommt man allerdings nicht geschenkt. Am besten geht man dazu die einzelnen Fälle durch und berechnet, dass zwei Drehungen der verschiedenen möglichen Arten erneut eine Drehung geben. Die restlichen Gesetze für Gruppen sind dann leicht erfüllt, denn zu jeder Drehung gibt es eine Drehung um die selbe Achse in entgegengesetzte Richtung welche die erste Drehung rückgängig macht. Die Drehung um 0° ist das neutrale Element. Und insbesondere sind jede Drehung eine Abbildung und damit ist das nacheinander ausführen von Abbildungen assoziativ.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H8:

(a)

$$z^3 + (1-i)z^2 + (1-i)z - i = 0 \quad ; \qquad z_1 = i$$

Nutzt man die angegebenen Nullstelle $z_1 = i$ zur Polynomdivision durch $(z-i)$ so erhält man

$$z^2 + z + 1$$

Daraus berechnet man mit der Mitternachtsformel die weiteren Lösungen

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 \\ z_{2,3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ z_{2,3} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist dann $\mathbb{L} = \{-i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

(b)

$$z^5 + z^4 - 13z^3 + 19z^2 - 68z + 60 = 0 \quad ; \qquad z_1 = -5$$

Nutzt man die angegebenen Nullstelle $z_1 = -5$ zur Polynomdivision durch $(z+5)$ so erhält man

$$z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12$$

Man errät die nächste Nullstelle $z_2 = 1$ und führt wieder eine Polynomdivision durch, dieses Mal durch $(z-1)$ und erhält

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 12$$

Man sieht leicht die nächste Nullstelle $z_3 = 3$ und dividiert durch $(z-3)$. Nun erhält man

$$z^2 + 4$$

Die restlichen Lösungen berechnet man einfach

$$\begin{aligned} z^2 + 4 &= 0 \\ z^2 &= -4 \\ z_{4,5} &= \pm 2i \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist daher $\mathbb{L} = \{-5, 1, 3, 2i, -2i\}$.

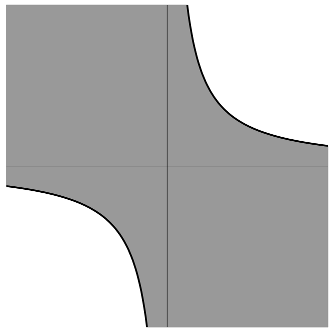
Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz **Höhere Mathematik I** Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H9:

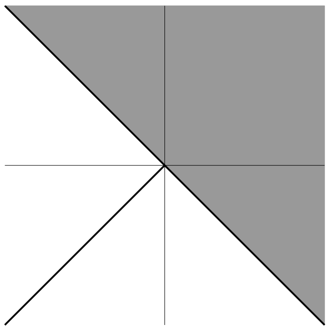
(a)



$$xy \leqq 2$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x \geqq \frac{2}{y} \wedge y < 0) \vee (x \leqq \frac{2}{y} \wedge y \geqq 0)\}$$

Hier ist nur die Falluterscheidung $y < 0$ und $y \geqq 0$ zu Beachten.

(b) Die Lösung erhält man durch geschicktes Umformen.



$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) &\geqq xy(x+y) \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) &\geqq 0 \\ (x+y)(x^2 - 2xy + y^2) &= (x+y)(x-y)^2 \\ (x+y)(x-y)^2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Dies führt zu der Lösungsmenge

$$x^3 + y^3 \geqq xy(x+y)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y \vee x \geqq -y\}.$$

Zu Aufgabe H10: Beweisen Sie die folgende *Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung*:
Sind die reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$, mit $n \geqq 2$, alle positiv oder alle negativ, aber immer größer -1, so ist

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Den Beweis erhält man mit Hilfe der vollständigen Induktion über n.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr. Zu zeigen: $(1+x_1)(1+x_2) > 1 + x_1 + x_2$.
Durch aus multiplizieren der linken Seite erhält man:

$$1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2$$

und daraus

$$x_1x_2 > 0.$$

Dies ist wahr wegen der Anforderung an das Vorzeichen aller x_i.

Induktionsschluss: Ist $A(n)$ wahr, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. Um dies zu zeigen multipliziert man die linke Seite mit $(1 + x_{n+1})$. Die folgende Ungleichung erhält man aus der Forderung

---

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

das $A(n)$ gilt.

$$(1+x_1)\cdots(1+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) > (1+x_1+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})$$

Betrachtet man nun nur die rechte Seite so kann man diese umformen zu

$$(1+x_1+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) = (1+x_1+\cdots+x_n) + (1+x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}.$$

Eine Fallunterscheidung liefert dann das gewünschte Ergebnis:

(a) Falls x_{n+1}, und damit alle anderen x_i auch, positiv ist muss nichts mehr gezeigt werden da $(1+x_1+\cdots+x_n)$ sicher größer 1 ist.

(b) Falls x_{n+1}, und damit alle anderen x_i auch, negativ ist reicht es sich klar zu machen dass $(1+x_1+\cdots+x_n)$ immer kleiner 1 ist und somit das Produkt $(1+x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}$ sicher größer x_{n+1} ist.

Zu Aufgabe H11:

Beweisen Sie die folgende Ungleichung für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$|x_1+x_2| \leqq |x_1| + |x_2|.$$

Durch quadrieren beider Seiten erhält man

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leqq x_1^2 + 2|x_1x_2| + x_2^2$$

$$2x_1x_2 \leqq 2|x_1x_2|$$

Was wahr ist da der Betrag des Produktes zweier reeller Zahlen immer größer, oder gleich, dem Produkt der Zahlen ist.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zur Aufgabe H12: In dieser Aufgabe benutzen wir die einfachen Eigenschaften des Skalarprodukts (Satz 2.6.1). Exemplarisch wird Teil (a) vorgeführt.

$$\begin{aligned}|v+w|^2 &= \langle v+w|v+w\rangle = \langle v|v+w\rangle + \langle w|v+w\rangle \\ &= \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle + \langle w|w\rangle \\ &= |v|^2 + 2\langle v|w\rangle + |w|^2\end{aligned}$$

Zu Aufgabe H13:

(a) Für die Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C erhält man:

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + s\cdot\vec{AB} + t\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} \quad ; \quad s,t\in\mathbb{R}\,.$$

Elimination der Parameter s und t führt auf die Koordinatengleichung für E:

$$\begin{aligned}x_1 &= 5-4s-6t\\ x_2 &= 1+4s\\ x_3 &= 2s+6t\,,\end{aligned}$$

d.h. $E = 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$.

Den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E erhält man durch Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform der Ebene:

$$2(2+2r) + (-5+4r) + 2(-3+5r) = 11 \quad\Rightarrow\quad r = 1\,.$$

Also erhält man den Schnittpunkt $S(4,-1,2)$.

(b) Für das Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned}\left|\vec{AB}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6\\ \left|\vec{AC}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72}\\ \left|\vec{BC}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6\end{aligned}$$

Wegen $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{BC}\right|$ und

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix} = 8-16+8 = 0$$

ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

(c) Der Mittelpunkt M des Quadrates ist der Mittelpunkt der Hypotenuse des Dreiecks ABC, also $M(2,1,3)$.
Für den Eckpunkt D erhält man:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Also $D(3,-3,4)$.

Zu Aufgabe H14: Die entsprechenden Rechnungen werden hier nicht vorgeführt.

(a) v_1, v_3 sind linear unabhängig.

(b) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

(c) v_1, v_2, v_5 sind linear abhängig.

(d) v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig.

Zur Aufgabe H15: In dieser Aufgabe muss ein Vektor, nämlich der Vektor w der Windkraft, in seine Anteile nach verschiedenen Richtungen zerlegt werden. Zunächst erhält man den Anteil w_f in Fahrtrichtung, indem man den Vektor w mit dem normierten Richtungsvektor f der Fahrtrichtung skalar multipliziert:

$$\langle w \mid f \rangle = \left\langle \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{16}(6 - 10 - 12) = -1\,.$$

Damit muss man also den normierten Richtungsvektor f einmal von der Antriebskraft $4\,f$ abziehen, um die Gesamtkraft in Fahrtrichtung zu bekommen:

$$4\,f + w_f = 4\,f - f = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Der restliche Anteil w_q wirkt senkrecht zur Fahrtrichtung, induziert also die Querkraft (diese ist die Projektion von w_q auf die horizontale Ebene). Wir ziehen zunächst den Fahrtrichtungsanteil w_f von der Windkraft w ab:

$$w_q = w - w_f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Rest liegt bereits in der horizontalen Ebene, wir brauchen daher nicht mehr zu projizieren.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H16: Das Problem der Aufgabe besteht teilweise darin, dass schon die Aufgabenstellung implizit eine Basis enthält, nämlich die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Zum besseren Verständnis formulieren wir die Aufgabe mit Hilfe dieser Basis im Falle von v_1 und $\mathcal{B}_1$ um:

Löse $v_1 = 3e_1 + 3e_3 = \alpha(e_1 + e_2) + \beta(e_2) + \gamma(e_1 - e_3)$, dann ist ${}_{\mathcal{B}_1}(v_1) = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir daraus das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 3 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ -\gamma &= 3 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich mit den üblichen Methoden lösen. Damit ergibt sich für die verschiedenen Vektoren:

(a)

$${}_{\mathcal{B}_1}(v_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad {}_{\mathcal{B}_1}(v_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_{\mathcal{B}_1}(v_3) = \begin{pmatrix} 93 \\ -63 \\ -90 \end{pmatrix}$$

(b)

$${}_{\mathcal{B}_2}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_{\mathcal{B}_2}(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_{\mathcal{B}_2}(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 27 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H17:

(a) Für den Schnittpunkt von f und g berechnet man

$$\begin{aligned} 6 + r &= 4 + s \\ 2 + 2r &= 4 \\ -2 + 2r &= -3 + s \end{aligned}$$

Aus der mittleren Gleichung folgt $r = 1$ und durch Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen erhält man jeweils $s = 3$. Die Parameter in die entsprechenden Geraden eingesetzt liefern als Schnittpunkt $S = (7, 4, 0)$.

Den Winkel berechnet man mit

$$\frac{\langle v|w\rangle}{|v||w|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Daraus folgt, dass der Schnittwinkel $\alpha = 45°$ ist.

(b) Man stellt zunächst die Parameterform der Ebene E aus dem Schnittpunkt der Geraden und ihren Richtungsvektoren auf:

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Hieraus kann man die Koordinatenform und die Hesse-Form berechnen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + r + s \\ x_2 &= 4 + 2r \\ x_3 &= 2r + s \end{aligned}$$

Also lautet die Koordinatenform von E

$$E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 18 = 0$$

und somit die Hesse-Normalform von E:

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 6 = d$$

Der Abstand von Q zu E ist $|-3|$, also setzen wir für $d = 3$ die Gerade durch Q, die senkrecht zu E ist, in die Hesse-Normalform ein:

$$\frac{2}{3}(1 + 2t) + \frac{1}{3}(1 + t) - \frac{2}{3}(-3 - 2t) - 6 = 3$$

und erhalten $t = 2$. Somit ist $Q'(5, 3, -7)$ der Spiegelpunkt von Q.

Zu Aufgabe H18:

(a) Die Werte von $p_j(k)$ stehen in folgender Tabelle:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$k = -1$	1	0	0
$k = 0$	0	1	0
$k = 1$	0	0	1

(b) Wir benutzen die Erkenntnisse aus (a) um das Problem mit folgendem Ansatz zu lösen:

$$f(X) = -1\,p_1(X) + 17\,p_2(X) - 2121\,p_3(X) = -1078\,X^2 - 1060\,X + 17$$
$$g(X) = 8\,p_1(X) - 7\,p_2(X) + 0\,p_3(X) = 11\,X^2 - 4\,X - 7.$$

(c) Die Basis p_1, p_2, p_3 ist besser, weil sie dem Problem angepasst ist und damit die Rechnung erspart.

Der Raum ist dreidimensional, denn $1, X, X^2$ ist eine Basis. Daher reicht es zu zeigen, dass p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind. Sei also $\alpha_1 p_1(X) + \alpha_2 p_2(X) + \alpha_3 p_3(X) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt. Diese Gleichheit muss für alle X gelten. Also setzen wir verschiedene Werte ein, sehr günstig sind $-1,\ 0,\ 1$. Damit erhalten wir jeweils $\alpha_1 = 0$ bzw. $\alpha_2 = 0$ bzw. $\alpha_3 = 0$.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H19:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}, \qquad CA = \begin{pmatrix} 21 & 28 & -1 \\ 61 & 68 & -9 \end{pmatrix}, \qquad BC = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 & 40 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ -18 & -16 & -14 & -12 \end{pmatrix}$$

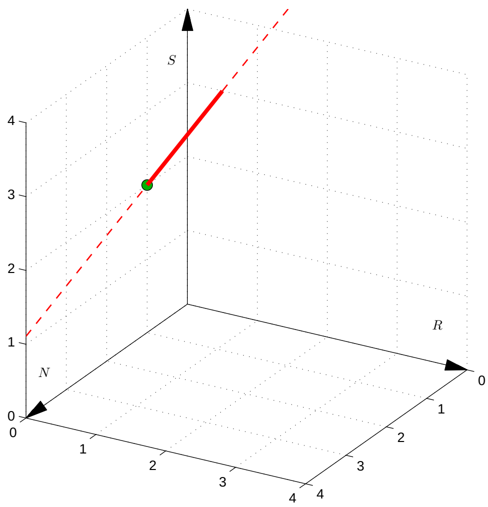
Zu Aufgabe H 20: Diese Aufgabe läßt sich ebenfalls mit einem linearen Gleichungssystem lösen. Wir setzen also Gleichungen für Mehl, Zucker, Butter und Eier an, wobei die Variablen N, R und S für Napfkuchen, Rührkuchen bzw. Strudel stehen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 500N & + & 500R & + & 250S & = & 1000 \\ 250N & + & 500R & + & 0S & = & 250 \\ 250N & + & 400R & + & 50S & = & 350 \\ 5N & + & 6R & + & 2S & = & 9 \end{array}$$

In Matrizenform lautet das Gleichungssystem nach einfachem Kürzen also:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{durch Gaußalgorithmus}} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{also}} \begin{array}{c} R = \frac{1}{2}S - 1 \\ N = 3 - S \end{array}$$

Der Lösungsraum für dieses Gleichungssystem ist also eine affine Gerade. Allerdings müssen wir noch beachten, dass wir nur ganze Kuchen backen können, die Zahlen N, R und S müssen also aus $\mathbb{N}_0$ stammen. Die zweite Gleichung sagt daher $S \in \{0, 1, 2, 3\}$ und dann lässt die erste Gleichung nur $S = 2$ und damit $N = 1$ und $R = 0$ als Lösung zu. Graphisch kann man sich das folgendermaßen vorstellen:
Die gestrichelte Gerade gibt dabei den Lösungsraum an, der fett markierte Teil liegt im positiven Bereich und nur in dem grünen Punkt trifft diese Gerade das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.



Allerdings macht die Tatsache, dass wir nur ganze Kuchen backen können, auch eine einfachere Lösung möglich. Ein Blick auf die Rezepte und die Zuckervorräte zeigt, dass Strudel keinen Zucker brauchen, ein Rührkuchen dagegen mehr als wir haben und der Zucker daher für genau einen Napfkuchen reicht. Nach Abzug der Napfkuchenzutaten bleiben noch genau die Zutaten für zwei Strudel übrig, und das ist dann auch die Lösung.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H 21: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(4-i)z_1 + iz_2 &= 4i\\ (4+i)z_1 + z_2 &= 2\end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $z_2 = 2-(4+i)z_1$. Einsetzen in die erste Gleichung und Auflösen nach z_1 liefert:

$$\begin{aligned}(4-i)z_1 + i(2-(4+i)z_1) &= 4i\\ (4-i-(4+i)i)z_1 &= 2i\\ (5-5i)z_1 &= 2i\\ z_1 &= \frac{2i}{5-5i}\\ z_1 &= \frac{2i(5+5i)}{(5-5i)(5+5i)}\\ z_1 &= -\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i\,.\end{aligned}$$

Oben einsetzen liefert $z_2 = 3-\frac{3}{5}i$. Also ist $(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i, 3-\frac{3}{5}i) \in \mathbb{C}^2$ die Lösung des linearen Gleichungssystems.

Probe:
Für die Probe setzt man die Lösungen in die Gleichungen oben ein und erhält:

$$\begin{aligned}(4-i)(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i) + i(3-\frac{3}{5}i) &= 4i\\ -\frac{4}{5}+\frac{4}{5}i+\frac{1}{5}i+\frac{1}{5}+3i+\frac{3}{5} &= 4i\\ 4i &= 4i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(4+i)(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i) + (3-\frac{3}{5}i) &= 2\\ -\frac{4}{5}+\frac{4}{5}i-\frac{1}{5}i-\frac{1}{5}+3-\frac{3}{5}i &= 2\\ 2 &= 2\,.\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H22:

(a) Hier müssen wir auf die Definition von „linear unabhängig“ zurückgehen. Wir setzen an $\beta v + \gamma(v + \alpha w) = 0$. Die beiden Vektoren sind genau dann linear unabhängig, falls $\beta = \gamma = 0$ die einzige Lösung für diese Gleichung ist. Durch Umklammern erhält die Gleichung die folgende Gestalt: $(\beta+\gamma)v+\gamma\alpha w = 0$. Weil nun v und w linear unabhängig sind, ist $\beta + \gamma = 0, \quad \gamma\alpha = 0$ die einzige Lösung.

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Falls $\alpha = 0$ gilt, dann kann γ beliebig (und insbesondere auch ungleich 0) gewählt werden. Mit $\beta = -\gamma$ haben wir dann eine nichttriviale Lösung der obigen Gleichung. Damit sind v und $v + \alpha w$ linear abhängig.

Falls $\alpha \neq 0$ gilt, dann folgt $\gamma = 0$ und $\beta = -\gamma = 0$. Damit sind v und $v + \alpha w$ linear unabhängig.

(b) Orthogonalität bestimmt man mit dem Skalarprodukt, also ist w orthogonal zu $v + \alpha w$ genau dann, falls $\langle w \,|\, v + \alpha w\rangle = 0$. Mit den Regeln für Skalarprodukte lässt sich das umschreiben zu $\langle w \,|\, v\rangle + \alpha \langle w \,|\, w\rangle = 0$. Weil nun v und w linear unabhängig sind, kann w nicht der Nullvektor sein. Damit dürfen wir durch $\langle w \,|\, w\rangle$ teilen und erhalten:

$$\alpha = -\frac{\langle w \,|\, v\rangle}{\langle w \,|\, w\rangle}\,.$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H 23: Man schreibt das lineare Gleichungssystem als

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 15 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 16 & 35 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 30 & 70 \\ 2 & 5 & 9 & 14 & 20 & 23 & 50 \\ 2 & 5 & 11 & 21 & 36 & 32 & 75 \end{array}\right]$$

und kommt mit dem Gauß-Algorithmus auf folgendes Ergebnis:

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Es bleiben 4 Gleichungen für 6 Variablen. Deswegen setzen wir zwei Variablen als Parameter an, etwa $x_6 = t$ und $x_5 = s$. Damit lassen sich alle anderen Variablen berechnen, man erhält:

$$x_4 = 5 - 4s - t\,, \quad x_3 = -5 + 6s - t\,, \quad x_2 = 5 - 4s\,, \quad x_1 = s\,.$$

Also erhält man als allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Zu Aufgabe H 24: Man schreibt das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 2 & 3 & -1 & t \\ 2 & t^2+3 & 6 & -2 & 2t \\ -1 & -2 & t-4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

und kommt mit dem Gauß-Algorithmus auf folgendes Ergebnis:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 2 & 3 & -1 & t \\ 0 & t^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & t \end{array}\right].$$

Wir unterscheiden Fälle: Für $t = 1$ führt die dritte Zeile auf einen Widerspruch.

Im Fall $t \neq 1$ liefert die dritte Zeile $x_3 = \frac{t}{t-1}$. Aus Zeile 2 erhält man nun $x_2 = 0$ oder $t = -1$. Nutzt man dies in Zeile 1, so erhält man $(x_1, 0, \frac{t}{t-1}, x_1 + \frac{3\,t}{t-1} - t)^{\mathsf{T}}$ [falls $x_2 = 0$] bzw. $(x_1, x_2, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} + x_1 + 2x_2)^{\mathsf{T}}$ [falls $t = -1$].

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H25:

(a) Um die Matrix aufzustellen, brauchen wir die Bilder der Standardbasis unter der Drehung. Zur Abkürzung nennen wir diese Drehung ψ. Es gilt

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{weil die } x\text{-Achse als Drehachse fest bleibt}$$

$$\psi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \qquad \text{Drehung in der } yz\text{-Ebene um } \frac{\pi}{6}$$

$$\psi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Damit hat die Matrix ${}_E\psi_E$ die folgende Gestalt:

$${}_E\psi_E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Weil „Drehung im Uhrzeigersinn" nicht präzise ist (natürlich kommt es darauf an, aus welcher Richtung man auf die yz-Ebene blickt), wäre auch die Drehung mit umgekehrtem Drehsinn korrekt und wir erhielten alternativ:

$${}_E\psi_E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

(b) Um diese Aufgabe zu lösen, überlegen wir uns zunächst, wie sich Vektoren verhalten, welche geometrisch leicht beschrieben werden können. Zur besseren Lesbarkeit nennen wir die Halbdrehung φ.

Die Vektoren parallel zur Geraden g_1, also die Vielfachen von $(1,1,2)^\mathsf{T}$, werden unter φ auf sich selbst abgebildet, weil die Drehachse als Ganzes fest bleibt. Die Vektoren v, welche senkrecht auf der Drehachse stehen, werden dagegen unter φ auf $-v$ abgebildet, weil es sich bei φ um eine Halbdrehung handelt.

Unsere Lösungsidee beruht dann darauf, jeden Vektor v in einen Anteil v_a parallel zur Achse und einen Anteil v_s senkrecht zur Drehachse aufzuteilen und dann das Bild $\varphi(v)$ mittels Linearität auszurechnen, also

$$\varphi(v)=\varphi(v_a+v_s)=\varphi(v_a)+\varphi(v_s)=v_a-v_s$$

Zur Aufteilung benutzen wir das Skalarprodukt mit einem normierten Richtungsvektor der Geraden g_1. Um die Matrix ${}_E\varphi_E$ aufzustellen, brauchen wir die Bilder der Standardbasis.

Es ist:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{und damit} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Der erste Vektor ist parallel zur Geraden, der zweite senkrecht dazu, daher gilt für das Bild:

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Mit denselben Methoden erhalten wir

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt das die Matrix ${}_E\varphi_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe H26: Zur besseren Verständigung geben wir unseren Matrizen Namen:

$$C := \begin{pmatrix}E_3 & A\\ \mathbf{0} & E_3\end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix}E_3 & B\\ \mathbf{0} & E_3\end{pmatrix} \qquad X := C\cdot D$$

Wir erinnern uns daran, dass $x_{k\ell} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj}d_{j\ell}$. Nun müssen wir 4 Fälle unterscheiden:

$\begin{array}{c|c} * & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array}$ Einträge im linken oberen Viertel (also $1 \leqq k \leqq 3,\ 1 \leqq \ell \leqq 3$):
Wegen $\ell \leqq 3$ gilt jedenfalls $d_{j\ell} = 0$ für $j \geqq 4$, und damit $x_{k\ell} = \sum_{j=1}^{3} c_{kj}d_{j\ell}$.
Für $j \leqq 3$ haben wir $c_{kj} = 1$ für $j = k$ und $c_{kj} = 0$ für $j \neq k$.
Daher ist $x_{kl} = d_{kl} = \begin{cases}1 & k = l,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$ Also wissen wir $X = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & ?\\ \hline ? & ?\end{array}\right)$.

$\begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & * \end{array}$ Einträge im rechten unteren Viertel (also $4 \leqq k \leqq 6,\ 4 \leqq \ell \leqq 6$):
Wegen $\ell \geqq 4$ gilt jedenfalls $c_{kj} = 0$ für $j \leqq 3$, und damit $x_{k\ell} = \sum_{j=4}^{6} c_{kj}d_{j\ell}$.
Für $j \geqq 4$ haben wir $d_{j\ell} = 1$ für $j = \ell$ und $d_{j\ell} = 0$ für $j \neq \ell$.
Daher ist $x_{kl} = c_{kl} = \begin{cases}1 & k = l,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$ Also wissen wir $X = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & ?\\ \hline ? & E_3\end{array}\right)$.

$\begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \hline * & \cdot \end{array}$ Einträge im linken unteren Viertel (also $4 \leqq k \leqq 6,\ 1 \leqq l \leqq 3$): Hier gilt
$x_{kl} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj}d_{jl} = \sum_{j=1}^{3} \underbrace{c_{kj}}_{=0} d_{jl} + \sum_{j=4}^{6} c_{kj} \underbrace{d_{jl}}_{=0} = 0,$ also $X = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & ?\\ \hline 0 & E_3\end{array}\right)$.

$\begin{array}{c|c} \cdot & * \\ \hline \cdot & \cdot \end{array}$ Einträge im rechten oberen Viertel (also $1 \leqq k \leqq 3,\ 4 \leqq l \leqq 6$): Hier gilt
$x_{kl} = \sum_{j=1}^{6} c_{kj}d_{jl} = \sum_{j=1}^{3} c_{kj}d_{jl} + \sum_{j=4}^{6} c_{kj}d_{jl} = d_{kl} + c_{kl}$, also $X = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A+B\\ \hline 0 & E_3\end{array}\right)$.

Damit ist alles gezeigt.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H27:

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ lösen. Wir starten mit der Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & t \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir sie auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix können wir ablesen, dass wir drei Fälle unterscheiden müssen. Zum einen den Fall, in welchem $t \neq 1$ und $t \neq 0$. Dann hat die Matrix vollen Rang und nach dem Dimensionssatz hat der Kern dann Dimension 0, d.h. $\operatorname{Ker}(A_t) = \{0\}$.

Angenommen, es ist $t = 0$. Dann hat die Matrix die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch den restlichen Gaussalgorithmus erhalten wir als Lösung des LGS und damit als Kern:

$$\operatorname{Ker}(A_0) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Angenommen, es ist $t = 1$. Dann hat die Matrix die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Wir bringen den Gaussalgorithmus zu Ende. Dies ergibt die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgelesen ergäbe das die Lösungsmenge $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Zu Aufgabe H28:

(a) Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & -8 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen die Lösung von $Ax = b_i$ mittels $x = A^{-1}b_i$ und erhalten als Lösungen für b_1, b_2, b_3 bzw. b_4:

$$\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -20 \\ -11 \\ 38 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 20 \\ 101 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H29:

Zunächst bestimmen wir einige wichtige Hilfsmatrizen, die nicht direkt gefragt sind:

$${}_F\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}_E\psi_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad {}_C\mathrm{id}_F = ({}_F\mathrm{id}_C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$${}_E(\psi \circ \varphi)_B = {}_E\psi_C \; {}_C\mathrm{id}_F \; {}_F\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Hilfsmatrizen lassen sich nun die gefragten Matrizen leicht und schnell berechnen.

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

(a)

$$_E(\psi \circ \varphi)_E = {_E(\psi \circ \varphi)_B} \, {_B\mathrm{id}_E} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$_C(\varphi \circ \psi)_C = {_C\mathrm{id}_F} \, {_F\varphi_B} \, {_B\mathrm{id}_E} \, {_E\psi_C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Den Kern berechnen wir mit Hilfe der Matrix $_E(\psi \circ \varphi)_E$. In ihr können wir den Kern direkt ablesen (oder leicht berechnen) als

$$\mathrm{Ker}\,(\psi \circ \varphi) = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; {_E v} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H 30: Es ist $\det(A_t) = -8(21-4t)$. Unter Ausnutzung der Rechenregeln für Determinanten erhalten wir:

$$\det(A_t^6) = (\det(A_t))^6 = -8^6(21-4t)^6 \qquad \det(\sqrt{x}A_t) = x^3\det(A_t) = -x^3 8(21-4t)$$

$$\det(A_t^{-1}) = (\det(A_t))^{-1} = \frac{1}{-8(21-4t)} \qquad \det((A_t^{-1})^6) = \det(A_t)^{-6} = \frac{1}{-8^6(21-4t)^6}$$

Die letzten beiden Ausdrücke sind nur für $t \neq \frac{21}{4}$ definiert.

Zu Aufgabe H31:

(a) Nach dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren ergibt sich folgende Lösung für die Basis:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix},\ f_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

(b) Die Matrix ist orthogonal, weil ihre Spalten normiert und paarweise orthogonal zueinander stehen.

Zu Aufgabe H32:

(a) s ist eine lineare Abbildung denn s hat die Darstellungsmatrix

$$_Cs_C = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Alternativ können natürlich auch die Eigenschaften $s(v+w) = s(v)+s(w)$ und $s(\alpha v) = \alpha s(v)$ nachgeprüft werden.

(b) Sei F irgendeine Basis von $\mathrm{Pol}_2\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\det({}_Fs_F) &= \det({}_F\mathrm{id}_C\ {}_Cs_C\ {}_C\mathrm{id}_F) = \det({}_F\mathrm{id}_C)\det({}_Cs_C)\det({}_C\mathrm{id}_F)\\ &= (\det({}_C\mathrm{id}_F))^{-1}\det({}_C\mathrm{id}_F)\det({}_Cs_C) = \det({}_Cs_C)\end{aligned}$$

Daher sind alle Determinanten im Teil (b) gleich und es genügt $\det({}_Cs_C) = 1$ zu berechnen.

(c) Weil das Aufstellen der Matrizen sehr aufwendig ist, nützen wir die Rechenregeln für Determinanten um uns das Leben einfacher zu machen. Zunächst brauchen wir drei einfach aufzustellende Basiswechselmatrizen und deren Determinanten:

$$\det({}_C\mathrm{id}_B) = \det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix} = 2 \qquad \det({}_C\mathrm{id}_D) = \det\begin{pmatrix}\frac12&-1&\frac12\\-\frac12&0&\frac12\\0&1&0\end{pmatrix} = -\frac12$$

$$\det({}_C\mathrm{id}_E) = \det\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} = 1$$

Damit haben wir:

$$\det({}_B s_E) = \det({}_B \mathrm{id}_C \; {}_C s_C \; {}_C \mathrm{id}_E) = (\det({}_C \mathrm{id}_B))^{-1} \det({}_C s_C) \det({}_C \mathrm{id}_E) = \frac{1}{2}$$

$$\det({}_C s_D) = \det({}_C s_C \; {}_C \mathrm{id}_D) = \det({}_C s_C) \det({}_C \mathrm{id}_D) = -\frac{1}{2}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 33: Um zu zeigen, dass die Matrix A eine Drehmatrix ist, müssen wir zeigen, dass A eine eigentlich orthogonale Matrix ist, also $AA^{\mathsf{T}} = E$ und $\det A = 1$. Beides ist leicht nachzurechnen.

Den Drehwinkel φ bekommen wir mit der Formel $2\cos(\varphi) + 1 = \operatorname{Sp} A$. Die Spur von A ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$. Damit gilt $\cos(\varphi) = 0$ und daher $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. (Das Vorzeichen hängt davon ab, von welcher Seite man auf die Drehachse blickt.)

Die Drehachse bleibt bei der Drehung punktweise fix, also besteht sie aus den Vektoren v mit $Av = v$. Dieses lineare Gleichungssystem hat einen Lösungsraum der Dimension 1, d.h. dieser beschreibt eine Gerade durch den Ursprung: die Drehachse. Im konkreten Fall erhalten wir

$$\text{Drehachse} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine der Drehung angepasste Basis erhalten wir dadurch, dass wir den dritten Basisvektor in die Drehachse verlegen und die zwei anderen senkrecht dazu (und zueinander) und normiert wählen.

Wir starten mit dem Vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der in Richtung der Drehachse zeigt. Dazu ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht, wie man leicht sieht. Den letzten Basisvektor erhalten wir dann leicht mit Hilfe des Vektorprodukts als

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Basis B als

$$B : b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe H34:

(a) Durch einfaches Einsetzen erhalten wir $\alpha(P) = (1,0) = P$, $\alpha(Q) = (3,4)$ und $\alpha(R) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Wir berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe der Determinante der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$. Der Flächeninhalt ist also

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right).$$

Der Flächeninhalt des Bilddreiecks ist mit derselben Formel

$$|\alpha(\Delta)| = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}, \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(R)}\right).$$

Aber $\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = A(Q-P)$ und $\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(R)} = A(R-P)$ wobei $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist. Damit erhalten wir

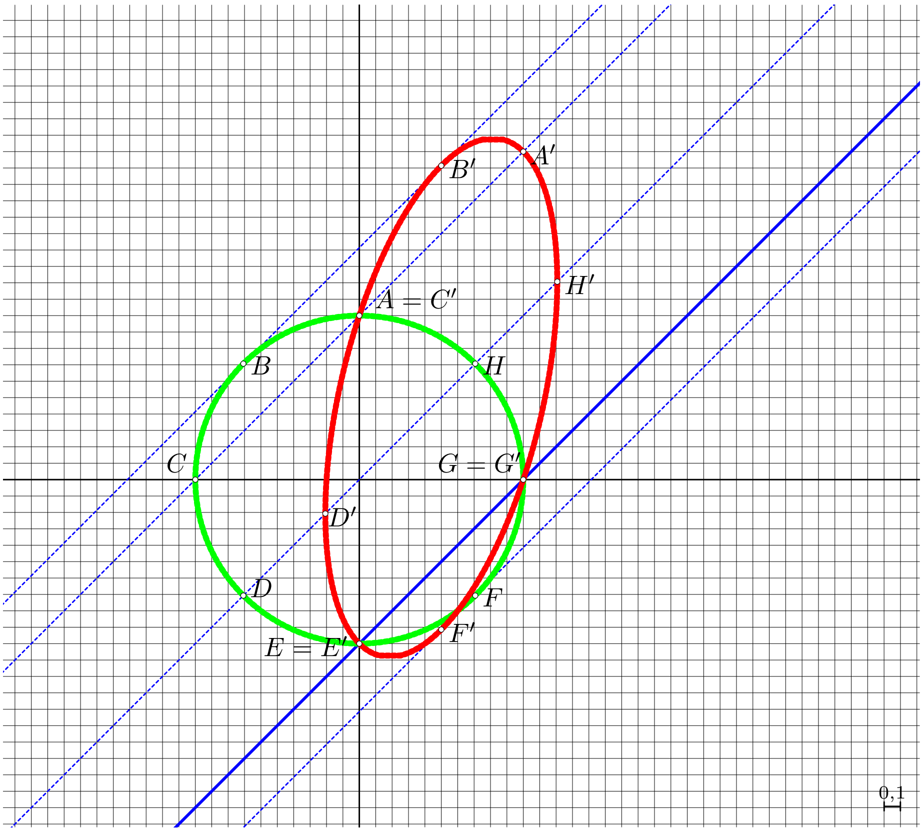
$$|\alpha(\Delta)| = \det\left(A(Q-P), A(R-P)\right) = \det(A)\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = \det(A)|\Delta| = |\Delta|,$$

denn die Determinante von A ist gleich 1.

(c) Die Scherungsachse besteht aus Fixpunkten von α, alle ihre Punkte genügen also der Gleichung $\alpha(x) = x$, also

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung liefert als Lösung die Punkte der Form $x_2 - x_1 = -1$, was die Gerade mit der Gleichung $x_2 = x_1 - 1$ ist.



Eine interaktive Seite zur Scherung finden Sie unter
http://
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-0607/material/Scherung/

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 35:

(a) Man berechnet die Vektoren $f_1 = \overrightarrow{PF_1}$, $f_2 = \overrightarrow{PF_2}$ und $f_3 = \overrightarrow{PF_3}$ und erhält

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, aber nicht normiert. Also bilden sie zwar eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aber keine ONB. Also ist $\mathbb{F} = (P; F)$ ein affines aber kein kartesisches Koordinatensystem.

Analoges gilt für die Vektoren $g_1 = \overrightarrow{QG_1}$, $g_2 = \overrightarrow{QG_2}$ und $g_3 = \overrightarrow{QG_3}$. Diese lauten

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathbb{G} = (Q; G)$ bildet ein affines aber kein kartesisches Koordniatensystem.

(b) Als erstes werden die Matrizen F und G aus den Basisvektoren aufgestellt und invertiert:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und analog

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}(v-P) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= Fv + P \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= G^{-1}(v-Q) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= Gv + Q \end{aligned}$$

Für ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ benötigen wir die Matrizen jeweils zur Basis von $\mathbb{F}$ bzw, $\mathbb{G}$. Also berechnen wir

$${}_{\mathbb{G}}F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } {}_{\mathbb{F}}G = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und den jeweiligen Ursprungspunkt zur entsprechenden Basis

$${}_{\mathbb{G}}P_1 = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(P) = (-2, 2, -4) \text{ und } {}_{\mathbb{F}}Q = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(Q) = (-8, 6, 2)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= {}_{\mathbb{G}}F^{-1}(v - {}_{\mathbb{G}}P) = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \\
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= {}_{\mathbb{F}}G^{-1}(v - {}_{\mathbb{F}}Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H36:

(a) Wir entwickeln zuerst nach der 1. Zeile, dann nach der 2. Spalte, dann nach der 3. Zeile und erhalten:

$$\chi_A(\lambda) = (-3-\lambda)^2(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{7}{4}-\lambda & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} = -(3+\lambda)^2(2-\lambda)^2\lambda.$$

(b) Aus dem charakteristischen Polynome können wir die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ablesen. Die Eigenvektorräume bekommen wir als Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichungssysteme $Av = \lambda_i v$.

$$\text{Eigenraum } V(-3): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenraum } V(0): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenraum } V(2): \quad \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Wir nehmen $f_1 = (0,1,0,0,0)^T$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem $(A-\lambda_1 E_5)f_2 = f_1$ hat dann die Lösungsmenge $\{(1,\alpha,2,0,0)^T \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Wir wählen $f_2 = (1,0,2,0,0)^T$. Weiter wählen wir $f_3 = (0,-1,0,-3,3)^T$ und $f_4 = (0,3,1,7,0)^T$ sowie $f_5 = (0,3,0,7,1)^T$. Eine kurze Rechnung (z.B. Rangbestimmung der Matrix $(f_1,\ldots,f_5)$) zeigt, dass diese 5 Vektoren tatsächlich eine Basis bilden.

(d) Darstellung bezüglich Eigenvektoren ergibt eine Diagonalmatrix mit dem Eigenwert auf der Diagonale. Einen Unterschied dazu macht natürlich f_2, das kein Eigenvektor ist. Es ist $Af_2 = \lambda_1 f_2 + f_1$. Daher ist

$$_F\alpha_F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & & & \\ & -3 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H37:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$: wir wissen dass $A^1 v = Av = \lambda v$, denn v ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
Induktionshypothese: es gilt $A^{n-1}v = \lambda^{n-1}v$.
Induktionsschluss: es ist $A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}(\lambda v) = \lambda A^{n-1}v = \lambda \cdot \lambda^{n-1}v = \lambda^n v$.
Der vorletzte Schluss benutzt die Induktionshypothese.

(b) Die Matrix C aus P38 ist ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, denn $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -1, aber C hat keine reellen Eigenwerte.

Zu Aufgabe H38:

(a) Der einzige Eigenwert von φ ist 0 und der Eigenraum zum Eigenwert 0 wird vom Vektor $(i, -1)^\mathsf{T}$ aufgespannt.

(b) Wir wählen $f_2 = (0, 1)^\mathsf{T}$. Die Matrixdarstellung ergibt sich ähnlich wie in Aufgabe 46 als

$$_F\varphi_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H39: Um die Klassifikation in den Griff zu bekommen führen wir zunächst ein Koordinatensystem in der Ebene ein. Zweckmäßigerweise wählen wir die Fixpunktgerade als unsere erste Koordinatenachse. Die zweite Koordinatenachse legen wir vorerst senkrecht dazu. Aus diesen Festlegungen ergibt sich die Gleichung unserer Affinität als

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} v$$

Weil es sich um eine Affinität handelt, ist $b \neq 0$.

Geometrisch lesen wir daraus zunächst zwei Fälle ab:

(a) Es gibt ausser den Parallelen zur Fixpunktgerade keine weiteren Geraden, die als Gerade (wenn auch nicht punktweise) fest bleiben. Dann ist $b = 1$ und wir haben es mit einer Scherung zu tun.

(b) Es gibt eine Fixgerade welche nicht parallel zur Fixpunktgeraden ist. Dann machen wir diese zu unserer zweiten Koordinatenachse, womit dann $a = 0$ folgt. Abhängig vom Vorzeichen von b haben wir zwei Teilfälle:

  (i) $b > 0$ ergibt eine Parallelstreckung parallel zur Fixpunktgeraden in Richtung der zweiten Fixgeraden.

  (ii) $b < 0$ ergibt eine Parallelstreckspiegelung an der Fixpunktgeraden in Richtung der zweiten Fixgeraden.

Der Fall $b = 1$ und $a = 0$ ist die Identität, die in obiger Aufzählung als spezielle Parallelstreckung (mit Streckfaktor 1) betrachten. Weitere Fälle kann es nicht geben, denn jeder Fixrichtung muss ein entsprechender Eigenvektorraum der obigen Matrix entsprechen und umgekehrt.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H40:

(a) Für $v_j \in V(\lambda_j)$ gilt definitionsgemäß $Av_j = \lambda_j v_j$. Wir nutzen noch die Distributivität der Matrix-Vektor-Multiplikation (was der Linearität der von A induzierten Abbildung $v \mapsto Av$ entspricht) und erhalten damit

$$Av = A\sum_{j=1}^{k} v_j = \sum_{j=1}^{k} Av_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \,.$$

(b) Um für $j \in \{1,2\}$ die Vektoren v_j als Eigenvektoren zu identifizieren, müssen wir λ_j finden, so dass $Av_j = \lambda_j v_j$. Wir berechnen:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} \left(-4+\sqrt{2}\right)\cdot 8 + 64 - \sqrt{2}\cdot 8 \\ \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 8 + 4 - \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 8 \\ \sqrt{2}\cdot 8 + 64 - \left(-4-\sqrt{2}\right)\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32+64 \\ 4 \\ -32+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}$$

erhalten also $Av_1 = 4\cdot v_1$ und damit $\lambda_1 = 4$. Analog

$$Av_2 = \begin{pmatrix} \left(-4+\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} - \left(-4-\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} \\ 0 \\ -8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

also $Av_2 = -4\cdot v_2$ und folglich $\lambda_2 = -4$.
Nun ist

$$v = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} Av &= A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot A\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\cdot A\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot A\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\cdot -4\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H41:

Die Matrix A aus Aufgabe H 49 soll diagonalisiert werden. Dazu müssen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmt werden. In H ?? haben wir bereits die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -4$ ermittelt.

Wir bestimmen nun, wie im Hinweis empfohlen, den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 und erhalten

$$V(\lambda_2) = \left\{ v = \mu \begin{pmatrix} -32\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

(dies lässt sich auch ohne Taschenrechner bestimmen!); wir sehen damit auch, dass λ_2 ein doppelter Eigenwert sein muss, da der zugehörige Eigenraum 2-dimensional ist. Wir haben also den 2-dimensionalen Eigenraum $V(\lambda_2)$ und den 1-dimensionalen Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathrm{L}(v_1)$. Daraus können wir also eine Basis aus Eigenvektoren wählen, zum Beispiel:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -32\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -32\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix (die Eigenwerte stehen in der von T vorgegebenen Reihenfolge auf der Diagonalen):

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hinweise zu Aufgabe H42:

(a) Zum Bestimmen der Eigenwerte der Matrix A berechnet man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$-\lambda^3 + 13\lambda + 12$$

und erhält als Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = 4$.

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -1 - 0,5i \\ -0,5 + i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 - 2i \\ 5 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Eigenräume

$$\begin{aligned}
E(\lambda_1) &= \{c_1 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \\
E(\lambda_2) &= \{c_2 \begin{pmatrix} -1-0,5i \\ -0,5+i \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{C}\} \\
E(\lambda_3) &= \{c_3 \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-2i \\ 5 \end{pmatrix} \mid c_3 \in \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

(b) Die Transformationsmatrix T erhält man indem man die Eigenvektoren als Spalten in die Matrix schreibt:

$$T = \begin{pmatrix} -i & -1-0,5i & 2+i \\ 1 & -0,5+i & 1-2i \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\overline{T}^{\mathsf{T}}$ lautet danach

$$\overline{T}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1+0,5i & -0,5-i & 1 \\ 2-i & 1+2i & 5 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man die Diagonalmatrix D

$$\overline{T}^{\mathsf{T}} AT = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5,25 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

Die Einträge auf der Diagonalen von D sind die Eigenwerte multipliziert mit der Länge der gewählten Eigenvektoren.

Zu Aufgabe H43:

(a) Der quadratische Teil ist $3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$, der lineare Teil ist 0 und der konstante Teil der Quadrik ist -1.

(b) Mittels einer Matrix läßt sich die Gleichung der Quadrik folgendermaßen schreiben:

$$x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0-1 & \end{pmatrix} x - 1 = 0.$$

(c) Da sowohl die Matrix des quadratischen Teils als auch die erweiterte Matrix Diagonalmatrizen mit vollen Rang sind ergibt sich aus der Tabelle, dass Q eine Mittelpunktsquadrik ist.

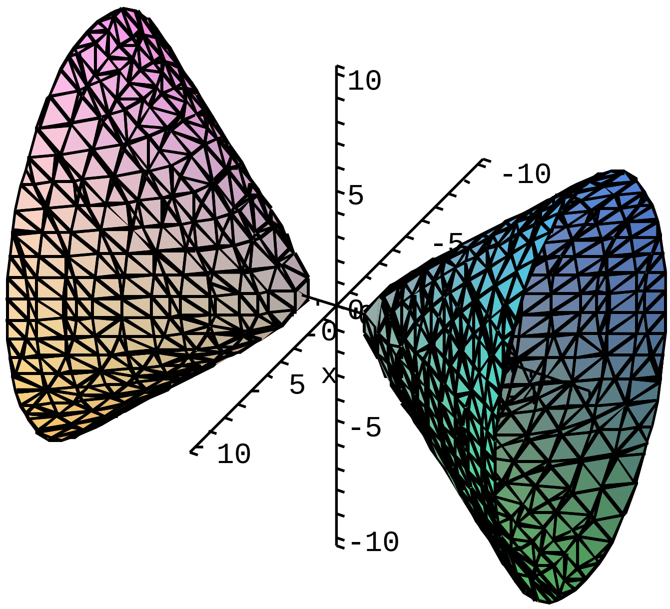
Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

(d) Q ist ein zweischaliges Hyperboloid, dessen Hauptachsen die Koordinatenachsen sind.



Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Hinweise zu Aufgabe H44:

Für die Matrixschreibweise der Quadrik Q stellt man die symmetrische Matrix A auf und den Vektor a für den linearen Anteil und die Konstanten c:

$$x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 12 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3,5 \end{pmatrix} * x - 7 = 0\,.$$

Nun berechnet man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, um die Transformationsmatrix T für die erste Koordinatentransformation zu erhalten. Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$-\lambda^3 + 21\lambda^2 + 196\lambda$$

folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 28$, $\lambda_2 = -7$ und $\lambda_3 = 0$. Die entsprechenden Eigenvektoren werden in die Matrix T eingetragen also erhält man

$$T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } T^{-1} = T^{\mathsf{T}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Also lautet die erste Koordniatentransformation $y = T^{-1}x$.

Mit $D = T^{-1}AT$ und $b = T^{-1}a$ erhält man

$$Q : 28y_1^2 - 7y_2^2 + 14y_2 + 7y_3 - 7 = 0\,.$$

Durch quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} 28y_1^2 - 7y_2^2 + 14y_2 + 7y_3 - 7 &= 0 \\ 28y_1^2 - 7(y_2^2 - 2y_2) + 7y_3 - 7 &= 0 \\ 28y_1^2 - 7(y_2 - 1)^2 + 7 + 7y_3 - 7 &= 0 \\ 28y_1^2 - 7(y_2 - 1)^2 + 7y_3 &= 0 \end{aligned}$$

und die zweite Koordinatentransformation $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 1$ und $z_3 = y_3$ erhält man die euklidische Normalform der Quadrik

$$8z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3 = 0$$

Es handelt sich also um ein hyperbolisches Paraboloid.

Zu Aufgabe H45: Zunächst schreiben wir die Gleichung der Quadrik in Matrixschreibweise:

$$x^{\mathsf{T}} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2}3 & \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} x + 2(0,2,2)x + 10 = 0$$

Zunächst berechnen wir von der Matrix (nennen wir sie A), das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = (t-2)(t-1)t$. Aus den normierten Eigenvektoren zu den Eigenwert 2, 1 und 0 erhalten

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.

Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

wir die folgende Transformationsmatrix (Achtung, hier können Vorzeichen und die Reihenfolge der Vektoren unterschiedlich sein, entsprechend ändern sich dann auch die folgenden Werte):

$$T := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Koordinatentransformation ist dann $y = Tx$ und wir erhalten als neue (transformierte) Gleichung der Quadrik:

$$2y_1^2 + y_2^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 2(1+\sqrt{2}y_2 + 2(1-\sqrt{2}y_3 + 10 = 0.$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir dann mittels $z = y + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ -1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$2z_1^2 + z_2^2 + 2(1-\sqrt{2})z_3 = 0.$$

Diese Gleichung eines elliptischen Paraboloids ist noch nicht in euklidischer Normalform, denn der Koeffizient vor dem lineare Term muss auf 2 gebracht werden. Die euklidische Normalform lautet also:

$$\frac{2}{1-\sqrt{2}}z_1^2 + \frac{1}{1-\sqrt{2}}z_2^2 + 2z_3 = 0$$

Die Koordinatentransformation vom Anfang bis ans Ende ist damit $z = Tx + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ -1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe H46: Das linke Bild stellt vermutlich zwei parallele Ebenen dar. Eine mögliche Gleichung ist $-x_1^2 + 1 = 0$.

Das mittlere Bild stellt einen Doppelkegel dar mit möglicher Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Das rechte Bild ist vermutlich ein parabolischer Zylinder mit Gleichung $x_1^2 + 2x_2 = 0$.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Hinweise zu Aufgabe H 47:

(a) Es ist $\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}$. Die Folge ist streng monoton fallend, denn $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$. Ausserdem sind alle Folgenglieder größer als 1, was also eine untere Schranke darstellt. Da die Folge streng monoton fallend ist muss sie auch nach oben beschränkt sein, nämlich durch ihr erstes Glied, sie ist also nach oben durch 2 beschränkt.

(b) Die Folge $\left((-1)^n \frac{n(n+1)}{n^2}\right)$ ist sicher nicht monoton, da die Glieder abwechselnd negativ und positiv sind. Der Betrag der Folge ist allerdings der selbe wie bei (a), der Betrag ist also nach oben und unten beschränkt. Aber dann ist auch die Folge selbst beschränkt mit Schranken ± 2.

(c) Die Folge $(2n + \cos(n))$ ist streng monoton steigend denn $2(n+1) + \cos(n+1) - 2n - \cos(n) = 2 + \cos(n+1) - \cos(n)$. Die Differenz $\cos(n) - \cos(n+1)$ kann höchstens 2 betragen, denn der Cosinus nimmt nur Werte zwischen -1 und $+1$ an. Aber diese Maximaldifferenz kommt nur vor, wenn der Abstand genau π beträgt. Daher ist $|\cos(n+1) - \cos(n)| < 2$ und die Folge damit streng monoton steigend.

Die Folge ist damit natürlich nach unten durch $0 < 2 + \cos(1)$ beschränkt. Nach oben ist sie unbeschränkt denn wir können abschätzen:

$$|2n + \cos(n)| \geqq |2n| - |\cos(n)| \geqq 2n - 1$$

Letzteres strebt gegen $+\infty$ für $n \to \infty$.

(d) Die Folge $(2\pi n + n\cos(n))$ ist weder beschränkt noch monoton. Das Letztere sieht man auf folgende Weise:

$$(2\pi(n+1)+(n+1)\cos(n+1))-(2\pi n+n\cos(n)) = 2\pi+\cos(n+1)+n(\cos(n+1)-\cos(n))$$

Der letzte Term darin kann mit n beliebig gross werden und wegen der Differenz der Cosinusfunktionen sowohl positiv als auch negativ. Daher ist die Folge nicht monoton.

Die Folge ist auch nicht beschränkt, denn wie in (c) schätzen wir ab

$$|2\pi n + n\cos(n)| \geqq n(|2\pi| - |\cos(n)|) \geqq n(2\pi - 1).$$

Hinweise zu Aufgabe H 48:

(a) $\frac{1}{n}$ strebt gegen 0 für $n \to \infty$ und $\sin(n\frac{\pi}{2})$ nimmt abwechselnd die Werte 1, 0 und -1 an. Dies sind also alle Häufungspunkte der Folge.

(b) $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ strebt gegen 0 für $n \to \infty$. $\cos(n\pi)$ nimmt abwechselnd die Werte -1 und 1 an, also nimmt $3\cos(n\pi)$ die Werte -3 und 3 an, was die Häufungspunte dieser Folge sind.

(c) Für geraden Index strebt $-\frac{2n+1}{2n}$ gegen -1 für $n \to \infty$ und für ungeraden Index strebt $\frac{2n}{2n-1}$ gegen 1 für $n \to \infty$. Also sind -1 und 1 die beiden Häufungspunkte der Folge.

(d) Durch Vereinfachen sieht man

$$\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{2}+n\pi)} = \sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2}+n\pi)} = \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)\,.$$

$(-1)^n$ nimmt abwechselnd die Werte -1 und 1 an und $\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)$ ebenso. Da das Vorzeichen immer übereinstimmt nimmt die Folge abwechselnd die Werte -2 und 2 an. Dies sind die Häufungspunkte der Folge.

Zu Aufgabe H 49:

(a) Um den Induktionsbeweis tatsächlich führen zu können, wollen wir mehr beweisen, als in der Aufgabe gefordert ist. Wir zeigen:

$$A^i = \begin{pmatrix} f_{i-1} & f_i \\ f_i & f_{i+1} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \geqq 2.$$

Den Induktionsanfang liefert die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Für den Induktionsschluss schliessen wir von n auf $n+1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n A &= \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1}+f_n \\ f_{n+1} & f_n+f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir zweimal die rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen.

(b)

$$(T^{-1}DT)^k = \underbrace{(T^{-1}DT)(T^{-1}DT)\dots(T^{-1}DT)}_{k \text{ mal}} = T^{-1}D(TT^{-1}D(T^{-1}\dots T)DT = T^{-1}D^kT$$

(c) Zunächst diagonalisieren wir die Matrix A. Deren charakteristisches Polynom ist $\chi_A(t) = t^2-t-1$, die Eigenwerte sind also $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Die zugehörigen Eigenvektoren stecken wir gleich in eine Matrix und erhalten die Transformationsmatrix und ihre Inverse:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt $A^k = TD^kT^{-1}$. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ? & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die restlichen Matrizeneinträge müssen wir nicht ausrechnen, denn uns interessiert ja nur die Formel für die k-te Fibonacci-Zahl. Diese lautet also

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

Dr. B. Ackermann
Dipl.-Math. S. Klenk
Dipl.-Math. S. Kreitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2006/07

Zu Aufgabe H 50:

(a) Wir zeigen sogar $a_n > 1+\sqrt{2}$, weil dies nachher das Monotonieargument vereinfacht. Es gilt $a_1 = 4 > 1+\sqrt{2}$. Dies ist der Induktionsanfang.
Wir nehmen nun an, dass für alle a_j mit $j \leqq k$ gilt, dass $a_j > 1+\sqrt{2}$. Nun ist

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k+1} > \sqrt{2(1+\sqrt{2})+1} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$$

und damit die Induktion bewiesen.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Folge monoton fällt, indem wir aufeinander folgende Glieder vergleichen:

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - 2a_n - 1 = (a_n-1)^2 - 2 > ((1+\sqrt{2})-1)^2 - 2 = 0$$

Hier benutzen wir das Ergebnis aus (a). Daraus folgt dann $a_n^2 > a_{n+1}^2$ und damit $a_n > a_{n+1}$. Die Beschränktheit nach unten folgt aus (a), die nach oben ist klar, weil die Folge streng monoton fällt.

(c) Aus (b) wissen wir mit Bolzano-Weierstraß, dass die Folge (a_n) konvergiert. Wir nennen den Grenzwert a. Weil die Wurzelfunktion stetig ist wissen wir, dass dann auch die Folge $(\sqrt{2a_n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den Grenzwert $\sqrt{2a+1}$. Aber wegen $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+1}$ haben die Folgen denselben Grenzwert, also gilt $a = \sqrt{2a+1}$. Durch Auflösen der quadratischen Gleichung erhalten wir $a = 1\pm\sqrt{2}$. Den Wert $1-\sqrt{2}$ können wir aber als Grenzwert ausschließen, weil alle Folgenglieder größer als $1+\sqrt{2}$ sind.

Zu Aufgabe H 51: Die Grenzwerte all dieser Folgen sind recht leicht zu bestimmen, indem man die Grade der Polynome in Zähler und Nenner vergleicht. Ich gebe hier nur die Ergebnisse an:

(a) $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$, $c_n \to \infty$, $d_n \to -\infty$, $e_n \to \infty$, $f_n \to \infty$ und $g_n \to 0$. .

(b) $a_n b_n = 2 \to 2$, $a_n g_n \to 0$, $d_n b_n \to -\infty$, $f_n g_n$ divergiert, aber nicht bestimmt, $a_n - c_n \to -2$, $a_n - d_n \to \infty$, $a_n - e_n = 16$, $\frac{b_n}{g_n}$ divergiert, aber nicht bestimmt und $\frac{g_n}{b_n} \to 0$.
Dies liefert eine Fülle von Beispielen für die in der Aufgabe genannten Produkte, Differenzen und Quotienten von Grenzwerten mit ganz unterschiedlichen Ausgängen, so dass diesen Ausdrücken kein sinnvoller Wert zugeordnet werden kann.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 52

(a) Hier gilt:

$$\frac{(n+1)^e}{n^e} = (1+\frac{1}{n})^e < (1+\frac{1}{n})^n < e.$$

Die erste Ungleichung gilt, weil $e < 3 \leqq n$. Die zweite Ungleichung folgt daraus, dass $(1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend gegen e strebt.

(b) Der Induktionsanfang bei $n = 3$ ist numerisch, wir sehen durch eine einfache Rechnung, dass $3^e < e^3$.

Aus (a) wissen wir, dass $(n+1)^e < en^e$. Daher gilt:

$$(n+1)^e < en^e < ee^n = e^{n+1}.$$

Die zweite Ungleichung benutzt dabei die Induktionsvoraussetzung.

(c) Wir wollen den Sandwich-Satz benutzen, um zu zeigen, dass der gesuchte Grenzwert e ist. Da $n^e > 0$ gilt sicher $\sqrt[n]{e^n} < \sqrt[n]{n^e + e^n}$. Wegen der Abschätzung aus (b) gilt aber auch $\sqrt[n]{n^e + e^n} < \sqrt[n]{2e^n}$. Damit haben wir insgesamt:

$$\sqrt[n]{e^n} < \sqrt[n]{n^e + e^n} < \sqrt[n]{2e^n}.$$

Daraus ergibt sich mit dem Sandwich-Satz:

$$e = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^e + e^n} \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2e^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}e = e$$

und damit der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^e + e^n} = e$.