Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2007/08

Zu Aufgabe H1: Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Setzt man nun $a = b = 1$, erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

Zu Aufgabe H2:
Induktionsanfang: $A(0)$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$$

Induktionsschluss: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} + \binom{m+(n+1)}{(n+1)} \\
&= \binom{m+(n+1)}{n} + \binom{m+(n+1)}{(n+1)} \\
&= \binom{m+(n+1)+1}{(n+1)}
\end{aligned}$$

Darstellung im Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&\mathbf{1}&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&\mathbf{3}&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&\mathbf{6}&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&\mathbf{10}&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

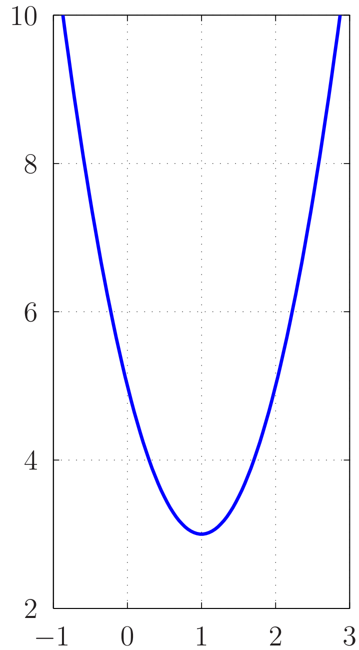
Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

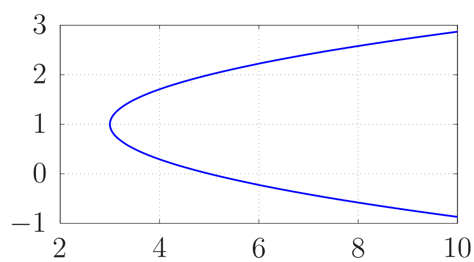
Winter 2007/08

Zu Aufgabe H3:

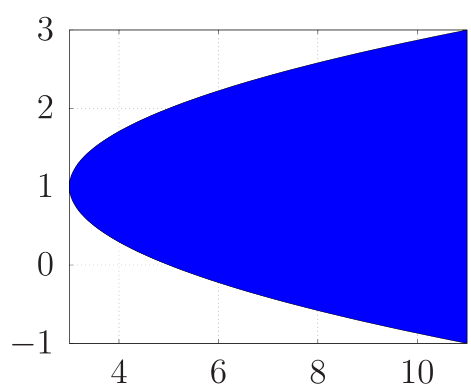
(a) Bei der Menge M_1 handelt es sich um eine Parabel, deren Scheitel bei $(1, 3)$ liegt und die um den Faktor zwei gestreckt wurde.



Bei der Menge M_2 handelt es sich ebenfalls um eine Parabel, allerdings wurde hier der y-Wert und der x-Wert vertauscht. Hier liegt der Scheitel bei $(3, 1)$ und sie wurde auch um den Faktor zwei gestreckt.



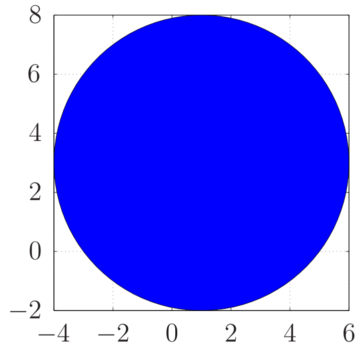
(b) Für die Menge M_3 erhält man:



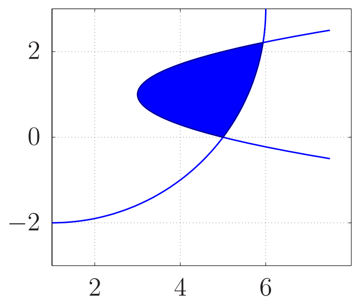
Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2007/08

Die Menge M_4 ist ein Kreis mit Radius 5 und Mittelpunkt $(1, 3)$.



Also ist die Schnittmenge:



Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H4:

(a)

$$(1-6i-9)+(2+i+4i-2)=-8-i$$

(b) Mit $(1-i)(1+i)=1+1=2$, $(1-i)^2=1-2i-1=-2i$ und $(1+i)^2=1+2i-1=+2i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{3(1+i)^4}{((1-i)(1+i))^2}-\frac{2(1-i)^6}{((1+i)(1-i))^3} &= \frac{3(1+i)^4}{4}-\frac{2(1-i)^6}{8}\\ &= \frac{3}{4}(2i)^2-\frac{1}{4}(-2i)^3\\ &= \frac{3}{4}(-4)-\frac{1}{4}8i=-3-2i\end{aligned}$$

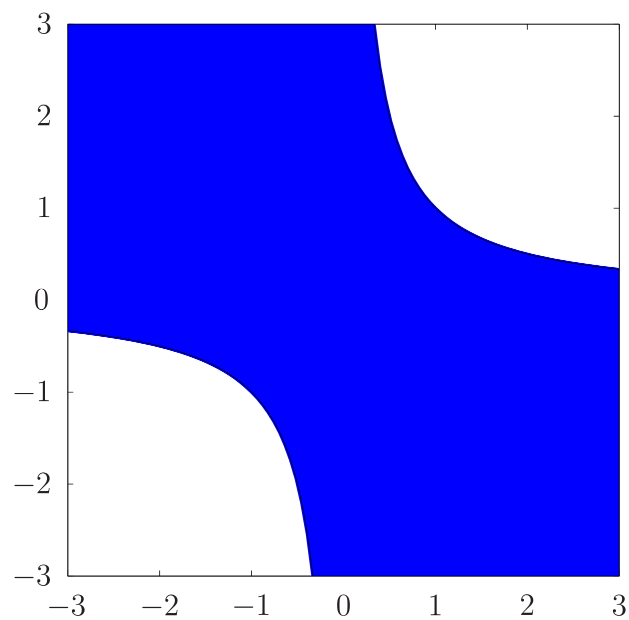
(c)

$$(1-i)+\sqrt{3^2+4^2}=1-i+5=6-i$$

(d)

$$\mathrm{Im}\left[(2+i)+\underbrace{\mathrm{Re}\left((2-3i)^6\right)}_{\in\mathbb{R}}\right]=1$$

Zu Aufgabe H5: Bei der Menge M_1 handelt es sich um eine Hyperbel. Ersetzt man z durch $x+iy$ so bekommt man $\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} z=xy<1$. Dies löst man nun nach y auf mit $y<1/x$.



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Bei der Menge M_2 handelt es sich um den Schnitt des Äußeren eines Kreises mit Radius 2 und Mittelpunkt $(-1,0)$ mit einem Parallelstreifen um die reelle Achse. Den Kreis bekommt man, indem man wieder z durch $x+iy$ ersetzt. Damit erhält man für den ersten Betrag $|x+iy+1|$ die folgende Ungleichung:

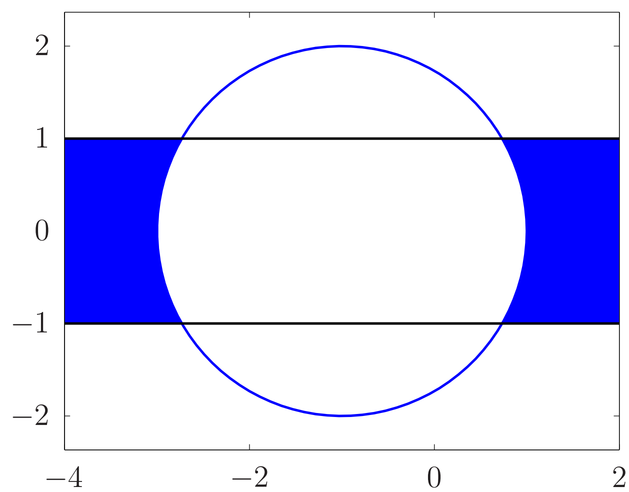
$$|(x+1)+iy| = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \geqq 2$$

Da alle Werte positiv sind, kann die Ungleichung quadriert werden:

$$(x+1)^2+y^2 \geqq 4$$

Für die Halbebene geht man genauso vor:

$$|\mathrm{Im}(x+iy)| = |y| \leqq 1$$



Zu Aufgabe H6:

(a) Die Funktion f_1 ist nicht surjektiv, da die Exponentialfunktion keine negativen Werte annehmen kann und deshalb den ganzen Wertebereich nicht ausfüllt. Sie ist auch nicht injektiv, da die Funktion, z. B. an den Stellen $x=1$ und $x=-1$ dieselben Werte $f(1)=f(-1)=e^0=1$ annimmt.

f_2 ist nicht injektiv, da hier wieder z. B. an der Stelle $x=1$ und $x=-1$ derselbe Funktionswert herauskommt $\big(f(1)=f(-1)=0\big)$. Sie ist aber surjektiv, da für $x\to\infty$ der Funktionswert ebenfalls gegen unendlich strebt, und der kleinste Wert ist an der Stelle $x=0$ mit $f(0)=-1$. Daher tritt der ganze Wertebereich ein.

Die Funktion f_3 kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases} x^2 & \text{für } 0\leqq x\leqq 1\\ x & \text{sonst}\end{cases}$$

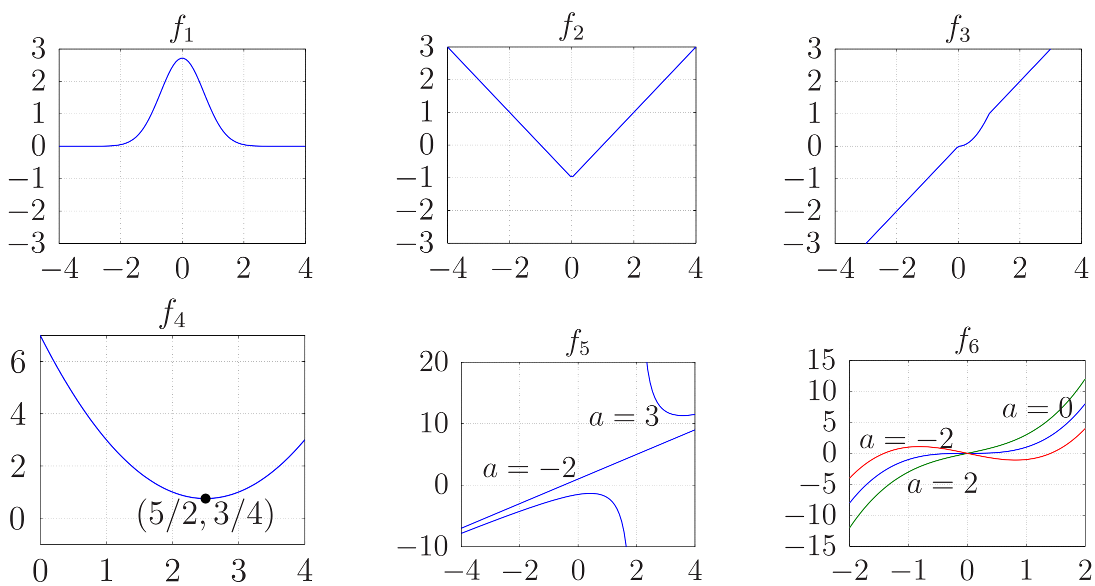
Dabei sind beide einzelnen Funktionen injektiv und surjektiv und die zusammengesetzte Funktion hat an den Stellen $x=0$ und $x=1$ einen stetigen Übergang. Daher ist die zusammengesetzte Funktion auch injektiv und surjektiv, also bijektiv.

(b) Bei der Funktion f_4 ist die kritische Stelle der Scheitel der Parabel. Dieser kann z. B. über die Ableitung herausgefunden werden. Der Scheitel ist an der Stelle $x = 5/2$, da hier die Ableitung der Funktion Null ist. Also ist der maximale Wert von a genau $5/2$.

Setzt man bei der Funktion f_5 für a minus zwei ein, erhält man eine hebbare Definitionslücke. Für alle anderen Werte für a hat man bei $x = 2$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Dabei geht die Funktion nahe bei der zwei gegen plus und minus unendlich. Für $x \to \infty$ streben die Funktionswerte ebenfalls gegen unendlich und für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen minus unendlich. Daher werden nahe bei der zwei und bei plus und minus unendlich betragsmäßig unendlich große Werte angenommen und die Funktion kann nicht injektiv sein. Die Funktion ist also nur für $a = -2$ injektiv.

Die Funktion f_6 besitzt für $a < 0$ drei Nullstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{-a}$ und $x_3 = -\sqrt{-a}$, kann hier also nicht injektiv sein. Für $a \geqq 0$ ist die Funktion streng monoton wachsend, dies kann man z. B. über die Ableitung sehen. Daher ist die Funktion für $a \geqq 0$ injektiv.

Die Graphen der verschiedenen Funktionen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H7:

Für die Funktion p_1 errät man z. B. als erste Nullstelle $x_0 = 1$. Die Polynomdivision ergibt

$$\left(X^3 + 2X^2 - X - 2\right)/(X-1) = \left(X^2 + 3X + 2\right) .$$

Die restlichen Nullstellen von X^2+3X+2 bekommt man mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen („Mitternachtsformel“)

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}, \\ x_1 &= -1, \\ x_2 &= -2. \end{aligned}$$

Damit hat man alle Lösungen der ersten Gleichung. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L}_1 = \{-2, -1, 1\} .$$

Für die Funktion p_2 errät man die Nullstelle $x_0 = 1$. Teilt man nun durch $(X-1)$, so erhält man

$$\left(X^3 - 1\right)/(X-1) = \left(X^2 + X + 1\right) .$$

Das Polynom $X^2 + X + 1$ hat keine weiteren reellen Nullstellen, die man ansonsten wieder mit der Mitternachtsformel finden könnte. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L}_2 = \{1\} .$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H8:

Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten sieht folgendermaßen aus:

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dabei erhält für eine komplexe Zahl $x + iy$ den Betrag $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Den Winkel φ bekommt man mit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$. Somit erhält man für die komplexen Zahlen z_1 und z_2 die folgenden Beträge:

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$
$$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$$

Für das Argument φ von z muss beachtet werden, dass es im richtigen Quadranten liegt.

$$z_1: \quad \tan\varphi_1 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_1 = \frac{7}{4}\pi$$
$$z_2: \quad \tan\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_2 = \frac{1}{3}\pi$$

Für z_3 gilt $|z_3| = |z_1|\cdot|z_2| = 2$ und $\varphi_3 = \varphi_1+\varphi_2 = \frac{7}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{25}{12}\pi$. Hierbei muss beachtet werden, dass $\varphi_3 < 2\pi$ sein muss, daher ist $\varphi_3 = \frac{25}{12}\pi - 2\pi = \frac{1}{12}\pi$. Die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen ist somit:

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{1}{12}\pi + i\sin\frac{1}{12}\pi\right)$$

Zu Aufgabe H9:

(a) Für $n = 2$ ist

$$\frac{\overline{x}^2_{\text{geom}}}{\overline{x}_{\text{arithm}}} = \frac{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^2}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2}{\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}} = \frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{1}{x_j}} = \overline{x}_{\text{harm}}\,.$$

(b) Insgesamt fährt das Fahrzeug 150 km in 2 Stunden, die Durchschnittsgeschwindigkeit $\tilde{v}$ beträgt also 75 km/h.

(c) Insgesamt fährt das Fahrzeug 200 km in 3 Stunden, die Durchschnittsgeschwindigkeit $\tilde{\tilde{v}}$ beträgt also $66,\overline{6}$ km/h.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

(d) Es ist
$$\tilde{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}\,,$$
also das arithmetische Mittel von v_1 und v_2. Des weiteren ist
$$\tilde{\tilde{v}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}\,,$$
also das harmonische Mittel von v_1 und v_2.

Zu Aufgabe H10:

Es werden die drei Bedingungen für den Untervektorraum bewiesen:

- Falls $u,\, v \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2) \Rightarrow u + v \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$: Sei $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ und $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ dann ist $u + v = (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, v_2$. Nun kann man $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \beta_1$ und $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \beta_2$ mit $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$ aus $\mathbb{R}$ setzen.
- Falls $u \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2) \Rightarrow s \cdot u \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$ mit beliebigen $s \in \mathbb{R}$: Sei $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ dann ist $su = s\alpha_1 v_1 + s\alpha_2 v_2$. Nun setzt man $\tilde{\alpha}_1 = s\alpha_1$ und $\tilde{\alpha}_2 = s\alpha_2$, wobei $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$ aus $\mathbb{R}$ sind. Daher ist auch diese Bedingung erfüllt.
- $0 \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$: Dafür muss man $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ setzen.

Somit ist $\mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$ ein Untervektorraum.

Zum Zusatz: Hier ist $\mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$ kein Untervektorraum, da z. B. $iv_1 \notin \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$, mit dem Faktor $i \in \mathbb{C}$ und $v_1 \in \mathrm{L}\,(v_1,\, v_2)$, ist.

Zu Aufgabe H11:

(a) Die erste Nullstelle X_0 von p_1 bekommt man durch Probieren. Man erhält $X_0 = -2$. Nun spaltet man diese Nullstelle mittel Polynomdivision ab.
$$X^3 + 8X^2 + 22X + 20 = (X + 2)\left(X^2 + 6X + 10\right)$$
Die beiden anderen Nullstellen bekommt man mit der Mitternachtsformel, wobei $\sqrt{i} = -1$ ist.
$$X_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(2i)^2}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2}$$
Also
$$X_1 = -3 + i \quad \text{und} \quad X_2 = -3 - i\,.$$
Also ist die Zerlegung in Linearfaktoren von p_1
$$p_1 = (X + 2)(X - (-3 + i))(X - (-3 - i))\,.$$

Bei p_2 löst man am besten $X^3 = 27i$. Hierbei schreibt man $27i$ in Polarkoordinaten. Das Argument, das den Winkel der komplexen Zahl angibt, ist $\frac{\pi}{2}$, da $27i$ genau auf der komplexen Achse im positiven Bereich liegt. $|0 + 27i| = \sqrt{0^2 + 27^2} = 27$, also
$$27i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Nach der Formel aus der Vorlesung für das Wurzelziehen bei komplexen Zahlen ist der Betrag der drei Nullstellen $\sqrt[3]{27} = 3$ und für das Argument der drei Lösungen bekommt man

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{\pi/2}{3} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\,,\\ \varphi_1 &= \frac{\pi/2}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}\,,\\ \varphi_2 &= \frac{\pi/2}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Also hat man am Ende folgende drei komplexe Nullstellen:

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\\ X_1 &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\\ X_2 &= -3i\end{aligned}$$

Man bekommt die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$p_2 = \left(X - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right)\left(X - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right)(X + 3i)$$

Für p_3 muss man substituieren ($u = X^2$).Somit bestimmt man die Nullstellen von

$$\tilde{p}_3 = u^2 - 2u + 4\,.$$

Man wendet die Mitternachtsformel an.

$$u_{0,1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

Damit ist $u_0 = 1 + \sqrt{3}i$ und $u_1 = 1 - \sqrt{3}i$. Da man Wurzel ziehen muss, schreibt man u_0 und u_1 in Polarkoordinaten um:

$$\begin{aligned}u_0 &= 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\\ u_1 &= 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

Nun macht man die Rücksubstitution. Der Betrag von X_0, X_1, X_2 und X_3 ist also immer $\sqrt{2}$. Für das Argument bekommt man von u_0 für $X_0 = 1/6\pi$ und $X_1 = 7/6\pi$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

und von u_1 für $X_2 = 5/6\pi$ und $X_3 = 11/6\pi$. Also erhält man folgende Zahlen:

$$X_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Somit ist die Zerlegung in Linearfaktoren:

$$\begin{aligned} p_3 = &\left(X - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(X - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &\left(X - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(b) Da man die Nullstellen kennt, kann man das Polynom sofort mittels seiner Zerlegung in Linearfaktoren aufschreiben:

$$\begin{aligned} p &= 2\,(X - (1+i))\,(X - (2+3i)) \\ &= 2\left(X^2 - ((1+i) + (2+3i))\,X + (1+i)(2+3i)\right) \\ &= 2\left(X^2 + (-3-4i)X + (-1+5i)\right) \\ &= 2X^2 + (-6-8i)X + (-2+10i)\end{aligned}$$

Also ist $a = (-6-8i)$ und $b = (-2+10i)$.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H12:

Da auf beiden Seiten positive Zahlen stehen, können beide Seiten einfach quadriert werden. Somit erhält man

$$|x|^2 - 2\,|x|\,|y| + |y|^2 \leqq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 \ .$$

Nun zieht man auf beiden Seiten $|x|^2$ und $|y|^2$ ab und bekommt

$$-2\,|x|\,|y| \leqq 2\,|x|\,|y| \ .$$

Für $|x| = 0$ oder $|y| = 0$ sind beiden Seiten Null, also beide Seiten gleich. Falls $|x| \neq 0$ und $|y| \neq 0$ kann durch $2\,|x|\,|y|$ geteilt werden

$$-1 \leqq 1\,,$$

also ist die Ungleichung bewiesen.

Zu Aufgabe H13:

(a) Zur Aufstellung der Ebenengleichung werden zwei Richtungsvektoren und der Aufpunkt benötigt. Als Aufpunkt wird P_1 und als Richtungsvektoren $v_1 = \overrightarrow{P_2P_1}$ und $v_2 = \overrightarrow{P_3P_1}$ genommen.

$$\begin{aligned} v_1 =& (1,1,1)^\intercal - (2,1,-3)^\intercal = (-1,0,4)^\intercal \\ v_2 =& (1,1,1)^\intercal - (0,-4,1)^\intercal = (1,5,0)^\intercal \end{aligned}$$

Also ist die Ebene E_1

$$E_1: \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Um zu überprüfen, ob der Punkt P_4 auf der Ebene liegt setzt man ein lineares Gleichungssystem an.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man streicht, aufgrund der Nullen, als erstes die erste Zeile, und nimmt diese später für die Probe. Aus der letzten Zeile erkennt man sofort, dass $r = 2$ sein muss. Aus der zweiten Zeile erkennt man, dass $s = -1$ ist. Dies setzt man nun in die erste Zeile ein $-2 = 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)$. Da die Bedingung in der ersten Zeile mit diesem r und s erfüllt ist, liegt der Punkt auf der Ebene E_1.

(c) Als Aufpunkt für die Gerade wird P_5 genommen. Es lässt sich überprüfen, dass P_5 nicht auf der Ebene liegt, da man hier kein r und s findet, für dass das überbestimmt

Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Als Richtungsvektor $v_3 = \overrightarrow{P_5P_6} = (3,5,\alpha)^\intercal$. Also

$$g_1: \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Da die Gerade g parallel zu der Ebenen E_1 sein soll, muss $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ sein.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile erhält man $\lambda_2 = 1$ und damit mit der ersten Zeile $\lambda_1 = -2$. Setzt man dies nun in die dritte Zeile ein erhält man für $\alpha = -2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = -8$.

Zu Aufgabe H14:

(a) Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit setzt man

$$\begin{gathered} af_1(X) + bf_2(X) + cf_3(X) + df_4(X) + ef_5(X) = \\ a + b\sin(X) + c\cos(X) + d\sin(2X) + e\cos(2X) = 0 \end{gathered}$$

mit $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ an. Durch einsetzen geeigneter Werte fÃ$\frac{1}{4}$r X erhält man ein lineares Gleichungssystem, z. B.:

$$\begin{array}{llllllll} X = 2\pi: & a & & +c & & +e & =0 & (1) \\ X = \pi: & a & & -c & & +e & =0 & (2) \\ X = 3\pi/2: & a & -b & & & -e & =0 & (3) \\ X = \pi/2: & a & +b & & & -e & =0 & (4) \\ X = \pi/4: & a & +\sqrt{2}b/2 & +\sqrt{2}c/2 & +d & & =0 & (5) \end{array}$$

Die Gleichungen $(1)-(2)$ liefern $c=0$ und $(4)-(3)$ liefern $b=0$. Setzt man dies in $(1)+(3)$ und $(1)-(3)$ ein, so erhält man $a=0$ und $e=0$. Daraus folgt mit (5) sofort $d=0$ und damit sind die Funktionen (bzw. Vektoren) $f_1 - f_5$ linear unabhängig.

(b) Aus dem Additionstheorem $2\sin(X)\cos(X) = \sin(2X)$ folgt

$$g_1(X) = 3\sin(X)\cos(X) = \frac{3}{2}\sin(2X) = \frac{3}{2}f_4(X).$$

Aus den Additionstheoremen $\cos^2(X) - \sin^2(X) = \cos(2X)$ und $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$ erhält man zunächst $2\cos^2(X) = 1 + \cos(2X)$ bzw. $\cos^2(X) = (1+\cos(2X))/2$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} g_2(X) = (1+\cos(X))^2 &= 1 + 2\cos(X) + \cos^2(X) = \frac{3}{2} + 2\cos(X) + \frac{1}{2}\cos(2X) \\ &= \frac{3}{2}f_1(X) + 2f_3(X) + \frac{1}{2}f_5(X). \end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H15:

Um zu zeigen, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind setzt man das lineare Gleichungssystem aus

$$\lambda_1(1,\,0,\,1,\,1)+\lambda_2(0,\,1,\,1,\,0)=(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_1+\lambda_2,\,\lambda_1)=0$$

an:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 & & =0 \\ & \lambda_2 & =0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & =0 \\ \lambda_1 & & =0 \end{array}$$

Damit sieht man aus der ersten Zeile, dass $\lambda_1=0$ und aus der zweiten Zeile $\lambda_2=0$ sein muss. Somit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

Dass v_1 und v_2 in U liegen erhält man durch Einsetzen.

$$\begin{array}{lcl} v_1 & : & 2\cdot 1-0+1-3\cdot 1=0 \\ v_2 & : & 2\cdot 0-1+1-3\cdot 0=0 \end{array}$$

Die Dimension des $\mathbb{R}^4$ ist vier, daher kann der Untervektorraum maximal die Dimension vier haben. Da man allerdings nicht ganz $\mathbb{R}^4$ ausfüllt (z. B. ist der Vektor $(1,\,0,\,0,\,0)$ nicht im Untervektorraum enthalten), wird die maximale Dimension nicht erreicht. Löst man die Nebenbedingung nach x_4 auf, so erhält man

$$x_4=\frac{1}{3}\,(2x_1-x_2+x_3)$$

Setzt man nun z. B. $x_1=x_2=0$ und $x_3=3$, so erhält man einen zusätzlichen Vektor $v_3=(0,\,0,\,3,\,1)$. Dieser ist linear unabhängig zu v_1 und v_2. Dies muss noch gezeigt werden. Es wird wieder mit dem linearen Gleichungssystem gerechnet.

$$\lambda_1(1,\,0,\,1,\,1)+\lambda_2(0,\,1,\,1,\,0)+\lambda_3(0,\,0,\,3,\,1)=(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\,\lambda_1+\lambda_3)=0$$

Also

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 & & & =0 \\ & \lambda_2 & & =0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & =0 \\ \lambda_1 & & +\ \lambda_3 & =0 \end{array}.$$

Aus der ersten und zweiten Zeile erhält man wieder $\lambda_1=\lambda_2=0$. Also mit Hilfe der vierten Zeile, da $\lambda_1=0$ ist, $\lambda_3=0$, also wieder die lineare Unabhängigkeit. Somit bilden diese drei Vektoren eine Basis. Es kann keine vierter Vektor mehr dazu kommen, da die Dimension vier nicht erreicht wird.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H16:

(a) Für einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $M = (x_m, y_m)$ gilt immer die Gleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 .$$

Nun löst man die Klammern auf

$$x^2 - 2xx_m + x_m^2 + y^2 - 2yy_m + y_m^2 = r^2$$

und sortiert um

$$\left(x_m^2 + y_m^2 - r^2\right) - 2x_m x - 2y_m y = -\left(x^2 + y^2\right) .$$

(b) Nun ersetzt man die Unbekannten $(x_m^2 + y_m^2 - r^2) = \alpha_1$, $-2x_m = \alpha_2$ und $-2y_m = \alpha_3$. Damit bekommt man die lineare Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = -\left(x^2 + y^2\right) .$$

wobei (x, y) die Koordinaten der Punkte auf dem Kreis sind und α_1, α_2 und α_3 die Unbekannten. Setzt man nun die Punkte A, B und C ein, entsteht folgendes Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & -2\alpha_2 & +4\alpha_3 & = -20 \\ \alpha_1 & -3\alpha_2 & & = -9 \\ \alpha_1 & & & = 0 \ . \end{array}$$

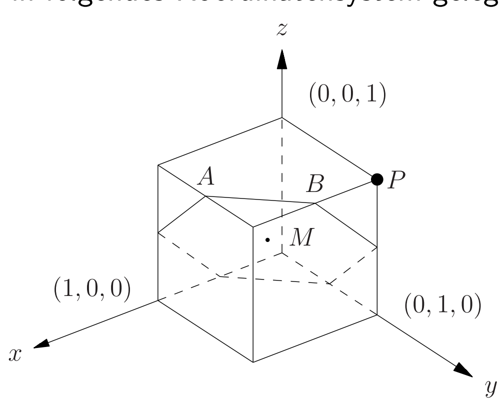
(c) Mit der letzten Gleichung bekommt man $\alpha_1 = 0$, danach mit der zweiten $\alpha_2 = 3$ und dann aus der ersten $\alpha_3 = -7/2$. Nun muss man die Ersetzung wieder rückgängig machen

$$\begin{aligned} 0 &= x_m^2 + y_m^2 - r^2 \\ 3 &= -2x_m \\ -\frac{7}{2} &= -2y_m \end{aligned}$$

und bekommt damit $x_m = -3/2$, $y_m = 7/4$ und $r^2 = 85/16$, also $r = \frac{\sqrt{85}}{4}$.

Zu Aufgabe H17:

Als erstes wurde der Würfel in folgendes Koordinatensystem gelegt:



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Damit erhält man für den Diagonalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, der orthogonal zum Sechseck ist und damit der Normalenvektor der Ebene. Ebenso erkennt man, dass der Mittelpunkt des Würfels

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

in dem des Sechsecks liegt und erhält die Ebenengleichung:

$$E: \qquad x + y - z = \frac{1}{2}\,.$$

(a) Es wurde hier die obere Würfelfläche mit dem Normalenvektor

$$n_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

genommen. Damit erhält man den Winkel $\tilde{\alpha}$

$$\cos\tilde{\alpha} = \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{\alpha} \approx 125.26^\circ\,.$$

Man will allerdings immer den Winkel zwischen Null und 90°, daher ist es

$$\alpha = 180^\circ - 125.26^\circ = 54.74^\circ\,.$$

(b) Schneidet man die Ebene mit einer Kante, so erhält man z. B. für $x = 1$ und $z = 1$ den Wert $y = \frac{1}{2}$ und für $y = 1$ und $z = 1$ den Wert $x = \frac{1}{2}$. Die Ecken des Sechsecks liegen also in der Mitte der jeweiligen Kanten.

Der Flächeninhalt eines von den Vektoren a und b aufgespannten Dreiecks berechnet sich mit Hilfe des Vektorproduktes:

$$\frac{1}{2}\left|\, a \times b \,\right| = \frac{1}{2}\,|a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi\,.$$

Mit $A = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ und $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gilt

$$a = \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$|a| = |b| = |c| = \sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Da das Sechseck sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, multipliziert man den Flächeninhalt eines Dreiecks noch mit sechs und erhält somit den Gesamtflächeninhalt. Um den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist es die Flächenformel für ein gleichseitiges Dreieck zu nehmen

$$A = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} .$$

Eine andere Möglichkeit ist das Vektorprodukt

$$A = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \left| a \times b \right| \right) = 6 \cdot \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right| = 6 \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

oder über die Gleichheit beim Vektorprodukt, da man den Winkel $\varphi = 60^\circ$ zwischen den beiden Vektoren kennt

$$A = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi \right) = 6 \cdot \frac{1}{4} \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299038 .$$

(c) In diesem Koordinatensystem hat der Punkt P folgende Koordinaten $(0, 1, 1)$. Mit der Hesse-Normalform ergibt sich sofort der Abstand

$$d(E, P) = \frac{\left|0 + 1 - 1 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.288675 .$$

Zu Aufgabe H18:

Es genügt, die Linearität im ersten Argument zu zeigen, da dann mit der Antisymmetrie ($a \times b = -b \times a$) auch die Linearität im zweiten Argument folgt.

$$\begin{aligned}
(\alpha a + \beta b) \times c &= \begin{pmatrix} (\alpha a_2 + \beta b_2)c_3 - (\alpha a_3 + \beta b_3)c_2 \\ (\alpha a_3 + \beta b_3)c_1 - (\alpha a_1 + \beta b_1)c_3 \\ (\alpha a_1 + \beta b_1)c_2 - (\alpha a_2 + \beta b_2)c_1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha(a \times c) + \beta(b \times c) .
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe H19:

Wegen der Linearität in $a = a_1 e_x + a_2 e_y + a_3 e_z$ der Grassmann-Identität

$$(a \times b) \times c = a_1(e_x \times b) \times c + a_2(e_y \times b) \times c + a_3(e_z \times b) \times c$$

und

$$\begin{aligned}\langle a, c\rangle\, b - \langle b, c\rangle\, a = {} & a_1\langle e_x, c\rangle\, b - a_1\langle b, c\rangle\, e_x \\ & + a_2\langle e_y, c\rangle\, b - a_2\langle b, c\rangle\, e_y \\ & + a_3\langle e_z, c\rangle\, b - a_3\langle b, c\rangle\, e_z\end{aligned}$$

sowie der Lagrange-Identität

$$\langle (a \times b), (c \times d)\rangle = a_1\langle (e_x \times b), (c \times d) + a_2\langle (e_y \times b), (c \times d) + a_3\langle (e_z \times b), (c \times d)$$

und

$$\begin{aligned}\langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle = {} & a_1\langle e_x, c\rangle\langle b, d\rangle - a_1\langle e_x, d\rangle\langle b, c\rangle \\ & + a_2\langle e_y, c\rangle\langle b, d\rangle - a_2\langle e_y, d\rangle\langle b, c\rangle \\ & + a_3\langle e_z, c\rangle\langle b, d\rangle - a_3\langle e_z, d\rangle\langle b, c\rangle\end{aligned}$$

genügt es, die Identitäten für $a = e_x$ zu zeigen (für $a = e_y$ bzw. $a = e_z$ verläuft der Beweis analog). Des weiteren genügt es aufgrund der Linearität in b die Fälle $b = e_x$, $b = e_y$ und $b = e_z$ zu betrachten.

- Fall: $b = e_x$
  In diesem Fall erhält man für beide Seiten beider Identitäten trivialerweise Null, die Identitäten sind also korrekt.
- Fall: $b = e_y$
  Hier erhält man für die linke Seite der Grassmann-Identität

  $$(e_x \times e_y) \times c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Dies stimmt mit der rechten Seite

  $$c_1 e_y - c_2 e_x$$

  überein.
  Die Lagrange-Identität lautet in diesem Fall

  $$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 d_2 - d_1 c_2\,,$$

  ist also offensichtlich auch korrekt.

- Fall: $b = e_z$

  Dieser Fall verläuft analog zum Fall $b = e_y$. Man erhält für die linke Seite der Grassmann-Identität

$$(e_x \times e_z) \times c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

  was mit der rechten Seite

$$c_1 e_z - c_3 e_x$$

  übereinstimmt.

  Die Lagrange-Identität lautet in diesem Fall

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ c_3 d_1 - c_1 d_3 \\ \cdots \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 d_3 - d_1 c_3 ,$$

  ist also offensichtlich auch korrekt.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H20:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 & 40 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ -18 & -16 & -14 & -12 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 21 & 28 & -1 \\ 61 & 68 & -9 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H21:

(a) Man wendet den Gauß-Algorithmus an:

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2Z1+Z3 \\ 2Z1+Z4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z2+Z3 \\ Z2+2Z4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Nun wird die dritte Zeile mit der vierten Zeile vertauscht und die neue vierte Zeile durch 2 dividiert.

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Nun rechnet man weiter:

$$\begin{array}{r} 7\ \text{Z1-Z3} \\ 7\ \text{Z2+Z3} \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 7 & 0 & 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 14 & 0 & 16 & -20 & -12 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{7}\ \text{Z1} \\ \frac{1}{14}\ \text{Z2} \\ -\frac{1}{7}\ \text{Z3} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{10}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\frac{5}{7}\ \text{Z4+Z1} \\ -\frac{8}{7}\ \text{Z4+ Z2} \\ \frac{9}{7}\ \text{Z4+Z3} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Damit erhält man für das inhomogene Gleichungssystem die eine Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ und $x_5 = 0$. Für das homogene Gleichungssystem setzt man $x_5 = 14t$. Damit ist $x_4 = 21t$, $x_3 = 29t$, $x_2 = -4t$ und $x_1 = -13t$. Somit als Lösungsraum

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13 \\ -4 \\ 29 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(b) Man wendet den Gauß-Algorithmus an:

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccc||c} t & 1 & (t-1)^2 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (-t)\cdot\text{Z3+Z1} \end{array}\left[\begin{array}{ccc||c} t & 1 & (t-1)^2 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3\,t+1 & -2\,t+(t-1)^2 & t \end{array}\right]$$

Dieser Schritt (Multiplikation der dritten Zeile mit $(-t)$) geht nur, wenn $t \neq 0$ ist; der

Fall $t = 0$ wird weiter unten extra behandelt:

$$
(3\,t-1)\cdot \mathrm{Z2}+\mathrm{Z3}\quad \left[\begin{array}{ccc|c} t & 1 & (t-1)^2 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t(t-1) & t \end{array}\right]
$$

Will man nun in der dritten Zeile den letzten Eintrag auf eins setzten müsste man durch $t(t-1)$ teilen. Dies darf nur gemacht werden, wenn $t \neq 0$ und $t \neq 1$ ist. In diesen Fällen treten also Sonderfälle auf. Für $t = 0$ wird die rechte Seite ebenfalls Null. Für $t = 1$ wird die rechte Seite nicht Null, also steht in der letzten Zeile

$$
0 \cdot x_3 = 1\,.
$$

Dies hat keine Lösung, also tritt hier der Fall **ii)** ein. Nun wird der Fall $t = 0$ untersucht. Man hat das folgende Gleichungssystem.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]
$$

Somit muss die Gleichung $x_2 + x_3 = 0$ erfüllt sein und $x_1 = -3x_2 - 2x_3$ ist. Sei $x_3 = t$, dann ist $x_2 = -t$, dann ist $x_1 = t$, also ist die Parameterdarstellung der allgemeinen Lösung

$$
t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ,t \in \mathbb{R}
$$

Dies ist die Lösung für **iii)**. Nun setzt man $t \neq 1$ und $t \neq 0$ und teilt die letzte Zeile durch $t(t-1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} t & 1 & (t-1)^2 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(t-1)} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -(t-1)^2\cdot \text{ Z3+Z1} \\ \text{-Z2+Z3} \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(t-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(t-1)} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{Z2-Z3} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} t & 0 & 0 & \frac{1}{(t-1)}+1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(t-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(t-1)} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{t}\text{Z1} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{(t-1)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(t-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(t-1)} \end{array}\right]$$

Damit erhält man für die eindeutige Lösung, also Fall $\mathbf{i)}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(t-1)} \\ -\frac{1}{(t-1)} \\ \frac{1}{(t-1)} \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst tritt also für $t \neq 0$ und $t \neq 1$ $\mathbf{i)}$, für $t = 1$ $\mathbf{ii)}$ und für $t = 0$ $\mathbf{iii)}$ ein.

Zu Aufgabe H22:

(a) Die Abbildung f_1 ist linear. Es gilt

$$f_1\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) = \begin{pmatrix} 3(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+2y_1 \\ x_1+2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2+2y_2 \\ x_2+2y_2 \end{pmatrix}$$
$$= f_1\left(x_1,y_1\right) + f_1\left(x_2,y_2\right) \quad \text{und}$$
$$f_1\left(\lambda x, \lambda y\right) = \begin{pmatrix} 3\lambda x+2\lambda y \\ \lambda x+2\lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{pmatrix} = \lambda f_1\left(x,y\right) .$$

(b) Die Abbildung ist nicht linear, da

$$f_2(1+1, 0+0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = f_2(1,0)+f_2(1,0)\,.$$

(c) f_3 ist linear, da

$$\begin{aligned} f_3\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right) &= x_1+x_2+\sqrt{2}\left(y_1+y_2\right) = x_1+\sqrt{2}y_1+x_2+\sqrt{2}y_2 \\ &= f_3\left(x_1, y_1\right)+f_3\left(x_2, y_2\right) \\ f_3(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x+\sqrt{2}\lambda y = \lambda\left(x+\sqrt{2}y\right) = \lambda f_3(x, y) \end{aligned}$$

(d) f_4 ist nicht linear. Es seien $a+bi$ und $c+di$ zwei beliebige komplexe Zahlen mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und ein Skalar $\lambda = e+fi$ mit $e,f \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$\begin{aligned} f_4(a+bi+c+di) &= (a+b)-(c+d)i = a-ci+b-di = f_4(a+bi)+f_4(c+di) \\ f_4((e+fi)(a+bi)) &= (ae-bf)-(be+af)i \neq (ae+bf)-(be-af)i \\ &= (e+fi)(a-bi) = (e+fi)f_4(a+bi) \end{aligned}$$

Daher sieht man, dass zwar die erste Eigenschaft erhalten bleibt, allerdings nicht die zweite. Als Gegenbeispiel kann man zum Beispiel

$$f_4((0+i)(1+0i)) = -i \neq i = (0+i)f_4(1+0i)$$

nehmen.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H23:

Die lineare Abbildung ist schon durch das Bild von zwei Punkten festgelegt, da dadurch die Matrix eindeutig ist. Nimmt man hier die Punkte P_1 und P_2 und die allgemeine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dann erhält man

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a-b \\ -c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet p_{1x} die x-Koordinate des Bildes des ersten Punktes. Addiert und subtrahiert man nun beide Gleichungen und dividiert dann durch minus zwei, so bekommt man

$$\begin{aligned} b &= -\frac{p_{1x}+p_{2x}}{2} \\ d &= -\frac{p_{1y}+p_{2y}}{2} \\ a &= \frac{-p_{1x}+p_{2x}}{2} \\ c &= \frac{-p_{1y}+p_{2y}}{2} . \end{aligned}$$

Nun untersucht man alle Möglichkeiten auf die der Punkt P_1 und der Punkt P_2 abgebildet werden können. Man kann sofort die Matrizen aufschreiben.

- $P_1 \to P_1$ und $P_2 \to P_2$
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  Dies ist die identische Abbildung.
- $P_1 \to P_1$ und $P_2 \to P_3$
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  Dies geht allerdings nicht, da mit dieser Matrix auch der Punkt P_3 auf P_3 abgebildet wird.
- $P_1 \to P_1$ und $P_2 \to P_4$
  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  Dies entspricht einer Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

- $P_1 \to P_2$ und $P_2 \to P_1$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Spiegelung an der y-Achse.
- $P_1 \to P_2$ und $P_2 \to P_3$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Drehung um $90°$.
- $P_1 \to P_2$ und $P_2 \to P_4$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies geht auch nicht, da P_3 ebenfalls auf P_4 abgebildet wird.
- $P_1 \to P_3$ und $P_2 \to P_1$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies geht auch nicht, da P_3 ebenfalls auf P_1 abgebildet wird.
- $P_1 \to P_3$ und $P_2 \to P_2$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Spiegelung an der Geraden durch P_2 und P_4.
- $P_1 \to P_3$ und $P_2 \to P_4$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Drehung um $180°$.
- $P_1 \to P_4$ und $P_2 \to P_1$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Drehung um $270°$.
- $P_1 \to P_4$ und $P_2 \to P_2$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dies geht auch nicht, da P_3 ebenfalls auf P_2 abgebildet wird.
- $P_1 \to P_4$ und $P_2 \to P_3$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Dies entspricht einer Spiegelung an der y-Achse.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Insgesamt erhält man also folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe H24:

- Mit $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}\,(\alpha) \subseteqq V$ ist
$$\alpha(v_1+v_2) \overset{\alpha \text{ additiv}}{=} \underbrace{\alpha(v_1)}_{=0} + \underbrace{\alpha(v_2)}_{=0} = 0\,,$$
d. h. $v_1 + v_2$ ist wieder in $\mathrm{Kern}\,(\alpha)$
- Weiter ist mit $s \in \mathbb{K}$
$$\alpha(sv_1) \overset{\alpha \text{ homogen}}{=} s\,\underbrace{\alpha(v_1)}_{=0} = 0\,,$$
d. h. auch sv_1 ist wieder in $\mathrm{Kern}\,(\alpha)$.
- Aus $\alpha(0) = 0$ folgt schließlich, dass $0 \in \mathrm{Kern}\,(\alpha)$ gilt und damit ist $\mathrm{Kern}\,(\alpha)$ ein Untervektorraum von V.
- Mit $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}\,(\alpha) \subseteqq W$ existieren also $u_1, u_2 \in V$ mit $\alpha(u_1) = w_1$ und $\alpha(u_2) = w_2$. Damit folgt
$$\alpha(u_1+u_2) \overset{\alpha \text{ additiv}}{=} \alpha(u_1) + \alpha(u_2) = w_1 + w_2\,,$$
und da $u_1 + u_2 \in V$ gilt, ist somit $w_1 + w_2 \in \mathrm{Bild}\,(\alpha)$.
- Weiter ist mit $t \in \mathbb{K}$
$$\alpha(tu_1) \overset{\alpha \text{ homogen}}{=} t\alpha(u1) = tw_1\,,$$
und da $tu_1 \in V$ gilt, ist somit auch $tw_1 \in \mathrm{Bild}\,(\alpha)$.
- Schließlich folgt aus $\alpha(0) = 0$, dass auch $\mathbf{0} \in \mathrm{Bild}\,(\alpha)$ gilt und damit ist $\mathrm{Bild}\,(\alpha)$ ein Untervektorraum von W.

Zu Aufgabe H25:

(a) Man multipliziert zuerst beide Matrizen:
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}+\alpha c_{21} & c_{12}+\alpha c_{22} \\ c_{21}+\alpha c_{11} & c_{22}+\alpha c_{12} \end{pmatrix}$$
Damit erhält man zwei lineare Gleichungssysteme
$$\begin{aligned} c_{11} + \alpha c_{21} &= 0 \\ \alpha c_{11} + c_{21} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{12} + \alpha c_{22} &= 0 \\ \alpha c_{12} + c_{22} &= 0\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun die beiden ersten Gleichungen mit $-\alpha$ und addiert sie zur zweiten, erhält man

$$\begin{aligned} c_{21}\left(-\alpha^2+1\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \pm 1 \\ c_{22}\left(-\alpha^2+1\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \pm 1\,. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \pm 1$ bekommt man also die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{22} \\ -c_{11} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{22} \\ c_{11} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mit $c_{11} \neq 0$ oder $c_{22} \neq 0$.
Für das Produkt CA bekommt man damit für $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & -c_{22} \\ -c_{11} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}-c_{22} & c_{11}-c_{22} \\ -c_{11}+c_{22} & -c_{11}+c_{22} \end{pmatrix}$$

und für $\alpha = -1$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{22} \\ c_{11} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}-c_{22} & -c_{11}+c_{22} \\ c_{11}-c_{22} & -c_{11}+c_{22} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Inverse Matrix soll

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

sein. Nun multipliziert man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}a+\tilde{c}b & \tilde{b}a+\tilde{d}b \\ \tilde{a}c+\tilde{c}d & \tilde{b}c+\tilde{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da man die Einträge von A^{-1} berechnen will, hat man wieder zwei Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \tilde{a}a + \tilde{c}b &= 1 \\ \tilde{a}c + \tilde{c}d &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{b}a + \tilde{d}b &= 0 \\ \tilde{b}c + \tilde{d}d &= 1\,. \end{aligned}$$

Nun multipliziert man jeweils die erste Gleichung mit $-c$ und die zweite mit a, dann bekommt man

$$\begin{aligned} \tilde{c}\,(ad-bc) &= -c \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = \frac{-c}{ad-bc} \\ \tilde{d}\,(ad-bc) &= a \quad \Rightarrow \quad \tilde{d} = \frac{a}{ad-bc}\,. \end{aligned}$$

Um die $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ zu berechnen multipliziert man die erste Gleichung mit $-d$ und addiert sie zur b-fachen der zweiten Zeile.

$$\begin{aligned} \tilde{a}\,(ad-bc) &= d \quad \Rightarrow \quad \tilde{a} = \frac{d}{ad-bc} \\ \tilde{b}\,(ad-bc) &= -b \quad \Rightarrow \quad \tilde{b} = \frac{-b}{ad-bc} \end{aligned}$$

Somit ist die Inverse Matrix A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Damit die inverse Matrix also existiert muss

$$ad - bc \neq 0$$

sein.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H26:

Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -19 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{2} & -\frac{13}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{53} & -\frac{2}{53} & -\frac{5}{53} \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{53} & \frac{16}{53} & -\frac{13}{53} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{53} & -\frac{3}{53} & \frac{19}{53} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{53} & -\frac{2}{53} & -\frac{5}{53} \end{array}\right) .$$

Somit ist $A^{-1} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 2 & 16 & -13 \\ -7 & -3 & 19 \\ 13 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Die Probe ergibt $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{E}_3$.

Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & i & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i+1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & i & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i+1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right)$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & i & 1+i & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & i+1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1-i & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & i-1 & -i-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1-i & 1+i \end{array}\right)$$

Somit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & -1 & 1-i & 1+i \end{pmatrix}$. Die Probe ergibt $B^{-1}B = BB^{-1} = \mathrm{E}_4$.

Zu Aufgabe H27:

(a) Die Matrix ${}_{\mathbf{E}}\varphi_{\mathbf{E}}$ ist

$$ {}_{\mathbf{E}}\varphi_{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

In der Matrix ${}_{\mathbf{E}}\mathrm{id}_{\mathbf{B}}$ stehen die Basisvektoren b_1, b_2 und b_3 als Spalten, also

$$ {}_{\mathbf{E}}\mathrm{id}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix ${}_{\mathbf{B}}\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ ist die inverse Matrix von ${}_{\mathbf{E}}\mathrm{id}_{\mathbf{B}}$, also

$$ {}_{\mathbf{B}}\mathrm{id}_{\mathbf{E}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Somit ergibt sich die Matrix ${}_{\mathbf{B}}\varphi_{\mathbf{B}}$ mit der folgenden Matrizenmultiplikation

$$ {}_{\mathbf{B}}\mathrm{id}_{\mathbf{E}} \cdot {}_{\mathbf{E}}\varphi_{\mathbf{E}} \cdot {}_{\mathbf{E}}\mathrm{id}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 16 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & 27 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H28:

(a) Die Abbildungsmatrix besteht aus den Spalten b_1, b_2, b_3, also

$$_E\alpha_E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Oberfläche ergibt sich als Summe der einzelnen Parallelogrammflächen, also

$$\begin{aligned} O &= 2\left(|b_1 \times b_2| + |b_2 \times b_3| + |b_3 \times b_1|\right) \\ &= 2\left(\left|\begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right) = 2\left(2\sqrt{185} + 2\sqrt{65} + 3\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

(c) Für das Volumen des Spats erhält man mit Hilfe des Spatprodukts

$$V = |\langle b_3 \,|\, b_1 \times b_2\rangle| = 30\,.$$

(d) Man berechnet

$$\det\left({}_E\alpha_E\right) = 30\,.$$

Durch Vergleich der Definitionen 3.11.2 und 3.11.3 erkennt man, dass das Spatprodukt dreier Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ immer gleich der Determinante der Matrix bestehend aus den Spalten (bzw. Zeilen) x, y, z ist.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H29:

Induktionsanfang: $n = 1$

Für eine 1×1-Matrix setzt man $n = 1$, also nach der Formel $\det A = 1$ und mit Hilfe der Berechnung der Determinanten $\det A = \det(1) = 1$.

Induktionsschluss: $n \to n+1$

Die neue Matrix ist eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix. Sie ist

$$\det A_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_{n+1} & c_n & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man entwickelt nun nach der ersten Spalte:

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} c_{n+1} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Die erste Determinante ist nach Induktion $1 - b_2c_2 - \cdots - b_nc_n$. Bei der zweiten Determinanten entwickelt man wieder nach der ersten Zeile, also

$$(-1)^{n+2} c_{n+1} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 1 & \cdots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_2 \end{pmatrix} = (-1)^{n+2}(-1)^{n+1} c_{n+1} b_{n+1} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

Am Ende steht die Einheitsmatrix, deren Determinante eins ist. Das Produkt ist $(-1)^{n+2}(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+3} = (-1)^{2n+2}(-1)^1 = 1 \cdot (-1) = -1$. Also erhält man die gewünschte Form

$$\det A_{n+1} = 1 - b_2c_2 - \cdots - b_nc_n - c_{n+1}b_{n+1} .$$

Zu Aufgabe H30:

(a) Um zu überprüfen, ob die affine Abbildung α_1 oder α_2 eine Bewegung ist, muss man untersuchen, ob A_1 oder A_2 eine orthogonale Matrix ist. Für orthogonale Matrizen gilt $A^\intercal A = E_n$. Also berechnet man

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^\intercal \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ist α_1 eine Bewegung und α_2 nicht.

(b) Der lineare Anteil ist

$$B = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

und der Translationsanteil ist

$$A_2 t_1 + t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Verknüpfung ist keine Bewegung da hier $B^{\mathsf{T}}B$ nicht die Einheitsmatrix ergibt.

(c) Die affine Abbildung α_1^{-1} geht leichter, da für die inverse Matrix $A_1^{-1} = A_1^{\mathsf{T}}$ gilt, also

$$\alpha_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bei der affinen Abbildung α_2 wird es komplizierte, da erst A_2 invertiert werden muss. Es ist

$$A_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\alpha_2^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe H31:

Es ist

$$(AB)^{\mathsf{T}}(AB) = B^{\mathsf{T}} \underbrace{A^{\mathsf{T}}A}_{=E} B = B^{\mathsf{T}}B = E\,,$$

d. h. AB ist orthogonal. Des weiteren ist

$$(A^{-1})^{\mathsf{T}}A^{-1} = (A^{\mathsf{T}})^{-1}A^{-1} = (\underbrace{A^{\mathsf{T}}A}_{=E})^{-1} = E\,,$$

d. h. A^{-1} ist ebenfalls orthogonal.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H32:

(a) Die Fixpunkte ergeben sich aus der Bedingung $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, also aus den Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & x_2 & + & 1 & = & x_1 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2 & = & x_2 \end{array} \quad .$$

Sortiert man diese um, so erhält man

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & x_2 & = & -1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{array} \quad .$$

Die untere Gleichung ist das doppelte der ersten und kann daher weggelassen werden. Damit ergibt sich die Geradengleichung

$$x_2 = 2x_1 + 1 \, .$$

(b) $\mathbb{G}$ ist auch ein kartesisches Koordinatensystem, da a_1 und a_2 senkrecht aufeinander stehen und beide die Länge eins haben.

(c) Der Vektor a_1 geht in Richtung der Scherungsachse, der Vektor a_2 steht senkrecht auf der Scherungsachse und der Punkt A liegt auf der Scherungsachse. Nun bildet man den Punkt $P = A + a_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathsf{T}}$ im Standardkoordinatensystem ab:

$${}_{\mathbb{E}}(\alpha(P)) = {}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}P) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{\sqrt{5}} \\ 1 - \frac{9}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = A + a_2 - 5a_1 \, , \quad \text{also} \quad {}_{\mathbb{G}}(\alpha(P) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich die Beschreibung ${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$.

(d) Die Koordinatentransformationen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right. \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Koordinatentransformationen kann man die Beschreibung ${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}}$ unserer Scherung bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ natürlich auch aus der Beschreibung bezüglich des Standardkoordinatensystems ausrechnen.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2007/08

Zu Aufgabe H33:

(a) Eine Drehung um den Ursprung wird beschrieben durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Nun setzt man den Drehwinkel ein und erhält die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Um die Abbildung α zu erhalten, verschiebt man den abzubildenden Punkt erst um $(2,\,-3)^{\mathsf{T}}$, dreht und verschiebt dann wieder zurück. Damit erhält man die Beschreibung

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} - 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Es sei nun $\widetilde{\mathbb{E}} = (P;\, e_1,\, e_2)$ das verschobene Standardkoordinatensystem. Dann hält unsere Drehung den Koordinatenursprung fest, wird also in Koordinaten bezüglich $\widetilde{\mathbb{E}}$ durch eine lineare Abbildung beschrieben. Die Abbildungsmatrix A ergibt sich folgendermaßen

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{B}}\mathrm{id}_{\widetilde{\mathbb{E}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} {}_{\widetilde{\mathbb{E}}}\mathrm{id}_{\mathbb{D}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Koordinatentransformationen sind

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{D}}\kappa_{\mathbb{E}} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} v + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \end{pmatrix} \\
{}_{\mathbb{B}}\kappa_{\mathbb{D}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} v \\
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H34:

(a) Man berechnet die Vektoren $f_1 = \overrightarrow{PF_1}$, $f_2 = \overrightarrow{PF_2}$ und $f_3 = \overrightarrow{PF_3}$ und erhält

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, aber nicht normiert. Deswegen bilden sie zwar eine Basis des $\mathbb{R}^3$, aber keine ONB. Also ist $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ ein affines aber kein kartesisches Koordinatensystem.

Analoges gilt für die Vektoren $g_1 = \overrightarrow{QG_1}$, $g_2 = \overrightarrow{QG_2}$ und $g_3 = \overrightarrow{QG_3}$. Diese lauten

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2, g_3)$ bildet ein affines aber kein kartesisches Koordinatensystem.

(b) Als erstes werden die Matrizen F und G aus den Basisvektoren aufgestellt und invertiert:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und analog

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}(v-P) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= Fv + P \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= G^{-1}(v-Q) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= Gv + Q \end{aligned}$$

Die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ ergeben sich durch Komposition:

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= ({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}})(v) \\ &= F^{-1}(Gv + Q - P) = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= ({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}})(v) \\ &= G^{-1}(Fv + P - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H35:

(a) Rechnet man mit dem ersten Eigenvektor und Eigenwert

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

so erhält man drei Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a - c = 1 &\quad\Rightarrow\quad a = 1 + c && (1)\\ b - e = 0 &\quad\Rightarrow\quad e = b && (2)\\ c - f - 1 &\quad\Rightarrow\quad f = 1 + c\,. && (3) \end{aligned}$$

Mit beiden anderen Eigenvektoren erhält man ebenfalls drei Gleichungen (4) bis (6) bzw. (7) bis (9).

$$\begin{aligned} a + b + c &= -1 && (4)\\ b + d + e &= -1 && (5)\\ c + e + f &= -1 && (6)\\ -a + 2b - c &= -2 && (7)\\ -b + 2d - e &= 4 && (8)\\ -c + 2e - f &= -2\,. && (9) \end{aligned}$$

Setzt man nun Gleichung (1) in die Gleichungen (4) und (7) ein

$$\begin{aligned} b + 2c &= -2 \\ 2b - 2c &= -1 \end{aligned}$$

und löst diese nach c und b auf, so erhält man $b = -1$ und $c = -\frac{1}{2}$. Damit bekommt man $a = \frac{1}{2}$. Nun kann man b in Gleichung (2) und c in Gleichung (3) einsetzen, dann erhält man $e = -1$ und $f = \frac{1}{2}$. Die Unbekannte d bekommt man z. B. aus Gleichung (5) mit $d = 1$. Somit ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Der Vektor ist $(0,\,1,\,0)^\intercal = \frac{1}{3}\,(v_2 + v_3)$. Für v_2 erhält man

$$-\frac{1}{3} A v_2 = \frac{1}{3} v_2$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

und für v_3 ist

$$\frac{1}{6}Av_3 = \frac{1}{3}v_3\,.$$

Damit ist $x = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{6}v_3 = \left(-\frac{1}{2},\, 0,\, -\frac{1}{2}\right)^{\mathsf{T}}$.

Zu Aufgabe H36:

(a) Induktionsanfang bei $n = 1$: wir wissen dass $A^1v = Av = \lambda v$, denn v ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Induktionshypothese: es gilt $A^{n-1}v = \lambda^{n-1}v$.

Induktionsschluss: es ist $A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}(\lambda v) = \lambda A^{n-1}v = \lambda \cdot \lambda^{n-1}v = \lambda^n v$. Der vorletzte Schluss benutzt die Induktionshypothese.

(b) Die Matrix C aus P35 ist ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, denn $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -1, aber C hat keine reellen Eigenwerte.

Zu Aufgabe H37:

(a) Die Eigenwerte ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = -4\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^2\,(4+\lambda)\ .$$

Damit hat man die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit $e_0 = 2$ und $\lambda_2 = -4$ mit $e_{-4} = 1$. Der Eigenvektor $f_3 = (0,\, 0,\, 1)^{\mathsf{T}}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$ ist sofort ersichtlich. Die Dimension des Eigenraums $V(0)$ ist eins. Man muss die folgenden Gleichungen lösen

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\,i\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad 0 = x_1 - i\,x_2\\
0 &= -\sqrt{2}\,i\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad 0 = -i\,x_1 - x_2\\
0 &= 0\cdot x_1 - 0\cdot x_2 - 4\cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0\,.
\end{aligned}$$

Damit erhält man z. B. den Eigenvektor $f_1 = (i,\, 1,\, 0)^{\mathsf{T}}$. Damit ergeben sich folgende Eigenräume

$$V(0) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V(-4) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

(b) Man erhält das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
i &= \sqrt{2}\cdot x_1 - \sqrt{2}\,i\cdot x_2 + 0\cdot x_3\\
1 &= -\sqrt{2}\,i\cdot x_1 - \sqrt{2}\cdot x_2 + 0\cdot x_3\\
0 &= 0\cdot x_1 - 0\cdot x_2 - 4\cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0\,.
\end{aligned}$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Man kann z. B. für $f_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{\mathsf{T}}$ wählen und erhält damit die Matrixdarstellung

$$_F\varphi_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H38:

(a) Es ist

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) B ist bereits in Diagonalform und besitzt damit offensichtlich die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ mit den zugehörigen Eigenvektoren e_1, e_2 und e_3.

(c) Nach Satz 5.2.2 besitzen A und B als konjugierte Matrizen dieselben Eigenwerte und falls v ein Eigenvektor von B ist, ist Tv ein Eigenvektor von A zum selben Eigenwert. Eigenvektoren von A sind demnach:

$$v_1 = Te_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = Te_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = Te_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alle Eigenvektoren erhält man, indem man auch noch Vielfache von v_1, v_2 bzw. v_3 berücksichtigt (wobei man natürlich den Nullvektor vermeiden muss).

Zu Aufgabe H39:

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = (-2-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{5}{16}\lambda + \frac{1}{64}\right).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{16}$ und $\lambda_3 = -2$. Die entsprechenden normierten Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Transformationsmatrix T ist also

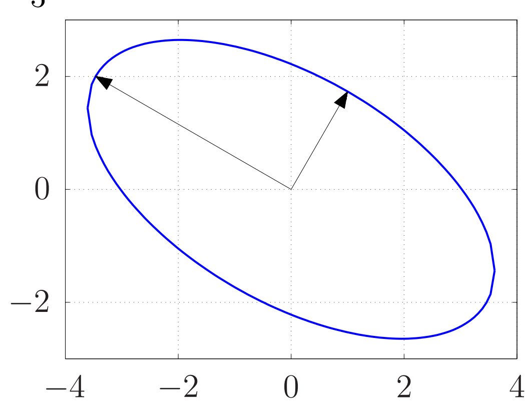
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dies entspricht einer Drehung um die x_3-Achse mit Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$. (Durch andere Wahl der Vorzeichen bei den Eigenvektoren erhält man andere Transformationsmatrizen, die teilweise gar keine Drehungen oder aber solche um andere Achsen und mit anderen Winkeln beschreiben.) Damit ergibt sich die folgende Diagonalmatrix

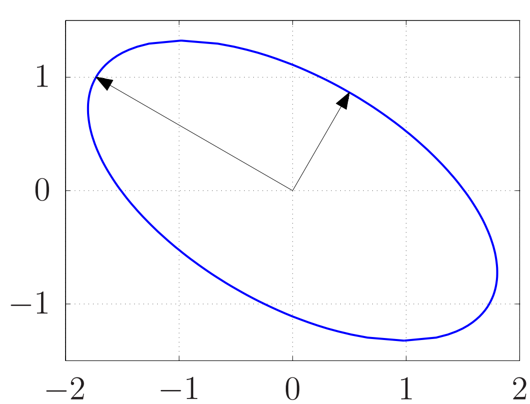
$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{16} & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittkurven mit den x_3-Werten sind folgende:

- Für $x_3 = 0$ ist es nur der Punkt $(0,0,0)$.
- Für $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist es eine Ellipse mit den Halbachsenlängen vier und zwei, die um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ gedreht ist.



- Für $x_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ist es ebenfalls eine Ellipse mit den Halbachsenlängen zwei und eins, die um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ gedreht ist.



Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H40:

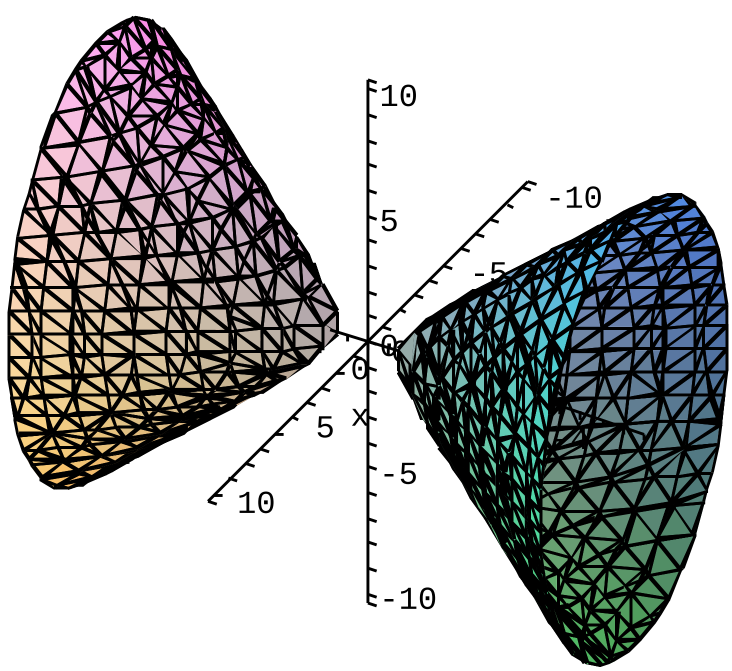
(a) Der quadratische Teil ist $3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$, der lineare Teil ist 0 und der konstante Teil der Quadrik ist -1.

(b) Mittels einer Matrix lässt sich die Gleichung der Quadrik folgendermaßen schreiben:

$$x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x - 1 = 0.$$

(c) Da sowohl die Matrix des quadratischen Teils als auch die erweiterte Matrix Diagonalmatrizen mit vollem Rang sind, ergibt sich aus der Tabelle, dass Q eine Mittelpunktsquadrik ist.

(d) Q ist ein zweischaliges Hyperboloid, dessen Hauptachsen die Koordinatenachsen sind.



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

Prof. Dr. M. Stroppel

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H41:

Es ist

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} c^2-4+3c-\lambda & c^2-4-3c \\ c^2-4-3c & c^2-4+3c-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^2-4+3c-\lambda & c^2-4-3c \\ \lambda-6c & 6c-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2c^2-8-\lambda & c^2-4-3c \\ 0 & 6c-\lambda \end{vmatrix} = (6c-\lambda)(2c^2-8-\lambda),$$

d. h. die Eigenwerte der Matrix A sind $\lambda_1 = 6c$ und $\lambda_2 = 2c^2-8$. Für $c>0$ ist λ_1 positiv und entsprechend ist für $c<0$ der Eigenwert λ_1 negativ. Des weiteren ist für $|c|>2$ der Eigenwert λ_2 positiv und für $|c|<2$ negativ.

Damit ist q für $c>2$ positiv definit, für $-2<c<0$ negativ definit und für $c<-2$ sowie für $0<c<2$ indefinit.

Zu Aufgabe H42:

Die Quadrik in Matrixform ist $Q\colon x^{\mathsf T}A\,x + 2a^{\mathsf T}x + c = 0$ mit den Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \alpha$$

Für die Bestimmung des Typs wird der Rang der Matrix A bestimmt und dafür diese auf Diagonalgestalt gebracht:

$$\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{array}$$

Man sieht für:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Rg } A = 2 \\ \alpha \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Rg } A = 3 \end{aligned}$$

Nun muss man den Rang der erweiterten Matrix bestimmen. Dafür stellt man A_{erw} auf und formt diese auf Diagonalgestalt um.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} \alpha & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 & \alpha & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 & \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} \alpha & \sqrt{5} & 0 & 0 & \alpha-5 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}$$

Damit bekommt man:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\implies \text{Rg } A_{\text{erw}} = 3 \\ \alpha = 5 &\implies \text{Rg } A_{\text{erw}} = 3 \\ \alpha \neq 0 \text{ und } \alpha \neq 5 &\implies \text{Rg } A_{\text{erw}} = 4 \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$\alpha = 5$	kegelige Quadrik
$\alpha \neq 5$	Mittelpunktsquadrik

Zu Aufgabe H43:

Für die Matrixschreibweise der Quadrik Q stellt man die symmetrische Matrix A, den Vektor a für den linearen Anteil und die Konstante c auf

$$x^\intercal \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x + 10 = 0\,.$$

Nun berechnet man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, um die Transformationsmatrix T für die erste Koordinatentransformation zu erhalten. Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 40\lambda$$

folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 10$. Die entsprechenden Eigenvektoren werden in die Transformationsmatrix T eingetragen. Damit erhält man

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = T^\intercal\,.$$

Also lautet die erste Koordinatentransformation $y = T^{-1}x = T^\intercal x$.

Mit $D = T^{-1}AT = T^\intercal AT$ und $b = T^{-1}a = T^\intercal a$ (die Multiplikation mit zwei von $2a^\intercal x$ darf nicht vergessen werden) erhält man

$$Q : -4y_2^2 + 10y_3^2 - 2\sqrt{5}y_1 + \frac{24}{\sqrt{14}}y_2 + \frac{40}{\sqrt{70}}y_3 + 10 = 0\,.$$

Durch quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} -4\left(y_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{9}{14} + 10\left(y_3 + \frac{2}{\sqrt{70}}\right)^2 - 10 \cdot \frac{4}{70} - 2\sqrt{5}y_1 + 10 &= 0 \\ -4\left(y_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + 10\left(y_3 + \frac{2}{\sqrt{70}}\right)^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 12 &= 0 \\ -4\left(y_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + 10\left(y_3 + \frac{2}{\sqrt{70}}\right)^2 - 2\sqrt{5}\left(y_1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ist die zweite Koordinatentransformation $z_3 = y_1 - \frac{6}{\sqrt{5}}$, $z_1 = y_2 - \frac{3}{\sqrt{14}}$ und $z_2 = y_3 + \frac{2}{\sqrt{70}}$. Nun bekommt man die Form

$$-4z_1^2 + 10z_2^2 - 2\sqrt{5}z_3 = 0\,.$$

Damit es die euklidische Normalform ist, muss man noch die Gleichung durch $-\sqrt{5}$ teilen. Somit ist die euklidische Normalform

$$\frac{4}{\sqrt{5}}z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2^2 + 2z_3 = 0\,.$$

Es handelt sich also um ein **hyperbolisches Paraboloid**.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H44:

(a) $\cos(n\pi/6)$ nimmt abwechselnd die Werte 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ und -1 an. Dies sind also die Häufungspunkte dieser Folge.

(b) Es ist

$$\frac{3n+1}{(-1)^n(1-n)} = (-1)^n \frac{3n-3+4}{1-n} = (-1)^n \left(-3 + \frac{4}{1-n}\right)$$

und da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{1-n} = 0$ gilt, sind 3 und -3 die Häufungspunkte dieser Folge.

(c) Da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ gilt, ist dies der einzige Häufungspunkt der Folge.

(d) Genau für $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ ist $[\log_2(n)] = k$, die Differenz

$$n - 2^{[\log_2(n)]} = n - 2^k$$

nimmt für diese Werte von n also alle ganzzahligen Werte größer gleich $2^k - 2^k = 0$ und kleiner $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ an. Für wachsendes n sind somit alle nicht-negativen ganzen Zahlen Häufungspunkte der Folge.

Zu Aufgabe H45:

Bei der Folge a_n geht der Bruch $\dfrac{n+2}{2n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{n}$ für $n \to \infty$ gegen $\dfrac{1}{2}$. Allerdings nimmt der vordere Teil abwechselnd die Werte 1, -1 und 0 an, daher hat die Folge die Häufungspunkte $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ und 0.

Um die Konvergenz und deren Grenzwerte der Folgen b_n, c_n und d_n zu untersuchen, wendet man den Trick an, indem man den Bruch aufteilt. Danach werden die Grenzwerte der einzelnen Summanden untersucht und gegebenfalls addiert.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{n} - \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^5} &&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \\
c_n &= 4 - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4} &&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 4 \\
d_n &= 4n - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} &&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_n = \infty
\end{aligned}$$

Die Folge e_n ist ein Produkt aus zwei konvergenten Folgen, also werden die einzelnen Grenzwerte multipliziert.

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e \cdot 2 = 2\,e$$

Bei g_n wird die dritte Binomische Formel angewendet und mit $\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)$ erweitert.

$$g_n = \frac{\left(\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

Nun ist der Zähler die Konstante eins und für $n \to \infty$ geht der Nenner gegen unendlich, daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0\,.$$

Zu Aufgabe H46:

(a) Um den Induktionsbeweis tatsächlich führen zu können, wollen wir mehr beweisen, als in der Aufgabe gefordert ist. Wir zeigen:

$$A^i = \begin{pmatrix} f_{i-1} & f_i \\ f_i & f_{i+1} \end{pmatrix} \quad \text{für } i \geqq 2.$$

Den Induktionsanfang liefert die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Für den Induktionsschluss schliessen wir von n auf $n+1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n A &= \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1}+f_n \\ f_{n+1} & f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir zweimal die rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen.

(b)

$$(T^{-1}DT)^k = \underbrace{(T^{-1}DT)(T^{-1}DT)\dots(T^{-1}DT)}_{k \text{ mal}} = T^{-1}D\underbrace{(TT^{-1})}_{=E}D(T\dots T^{-1})DT = T^{-1}D^kT$$

(c) Zunächst diagonalisieren wir die Matrix A. Deren charakteristisches Polynom ist $\chi_A(t) = t^2 - t - 1$, die Eigenwerte sind also $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Die zugehörigen Eigenvektoren stecken wir gleich in eine Matrix und erhalten die Transformationsmatrix und ihre Inverse:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt $A^k = TD^kT^{-1}$. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ? & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die restlichen Matrizeneinträge müssen wir nicht ausrechnen, denn uns interessiert ja nur die Formel für die k-te Fibonacci-Zahl. Diese lautet also

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right).$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H47:

Die Folge a_n konvergiert gegen 1, da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n^2}{1+1/n^2} = 1$$

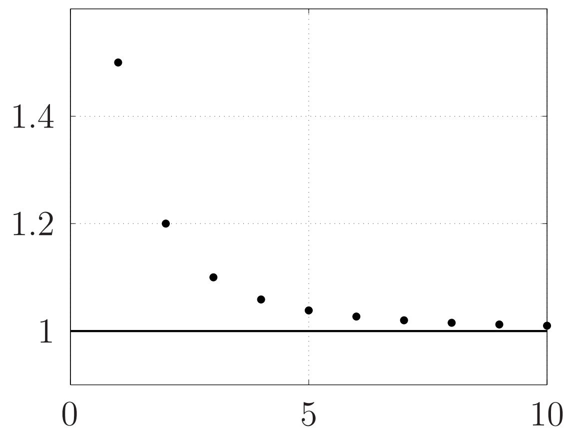
ist. Daher ist dies eine Cauchy-Folge.

Die Folge b_n konvergiert gegen 0, da $4 > e$ ist. Daher ist dies auch eine Cauchy-Folge.

Die Folge c_n geht gegen ∞, ist also nicht konvergent. Dies ist daher auch keine Cauchy-Folge.

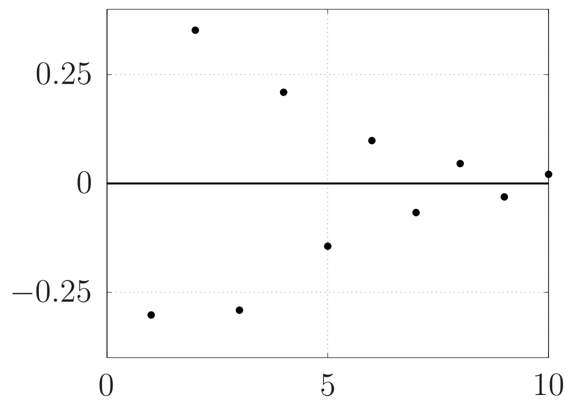
Will man nun für die Folgen a_n und b_n das $n_{0.01}$ bestimmen, so untersucht man den genaueren Verlauf der Folgenelemente.

Die Folge a_n ist streng monoton fallend, man untersucht hier welches Folgenelement als erstes den Abstand kleiner 0.01 von 1 hat. Es müssen immer zwei beliebige Folgenelemente den maximalen Abstand 0.01 haben und die Folgenelemente streben gegen 1.



Man bekommt dies als erstes für $n = 10$ mit $a_{10} \approx 1.0099$. Daher ist hier $n_{0.01} = 9$.

Bei der Folge b_n ist dies ein bißchen komplizierter, da diese Folge alternierend ist.



Hier untersucht man, ab wann der maximale Abstand zweier aufeinanderfolgender Folgenelemente kleiner als 0.01 ist, denn dies ist der größte Abstand der erzeugt werden kann für beliebige k und ℓ. Dies tritt bei $n = 14$ mit $b_{14} \approx 0.0045$ und $b_{15} \approx -0.0030$ auf. Daher ist hier $n_{0.01} = 13$.

Zu Aufgabe H48:

(a) Für $\alpha \geqq 0$ ist $a_0 = \alpha + 1 \geqq 1 > 0$. Setzt man nun voraus, dass $a_{n-1} > 0$ gilt, so folgt sofort, dass auch

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2}$$

positiv ist.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt{\alpha} \leqq a_0 = \alpha + 1 \\ \iff \quad & \alpha \leqq \alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ \iff \quad & 0 \leqq \alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Des weiteren ist

$$\begin{aligned} & \sqrt{\alpha} \leqq a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2} \\ \iff \quad & 2\sqrt{\alpha}a_{n-1} \leqq a_{n-1}^2 + \alpha \\ \iff \quad & 0 \leqq a_{n-1}^2 - 2\sqrt{\alpha}a_{n-1} + \alpha = (a_{n-1} - \sqrt{\alpha})^2\,, \end{aligned}$$

d. h. für alle $n \geqq 0$ ist $a_n \geqq \sqrt{\alpha}$.

(c) Man erhält

$$\begin{aligned} & a_{n-1} \geqq a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2} \\ \iff \quad & 2a_{n-1}^2 \geqq a_{n-1}^2 + \alpha \\ \iff \quad & a_{n-1}^2 \geqq \alpha\,, \end{aligned}$$

was nach obigem erfüllt ist, d. h. die Folge (a_n) fällt monoton.

(d) Da die Folge konvergiert, existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$. Aus der Rekursionsvorschrift folgt

$$\begin{aligned} & a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2} \\ \iff \quad & 2a_n a_{n-1} = a_{n-1}^2 + \alpha \\ \iff \quad & 2a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2 - \alpha = 0 \end{aligned}$$

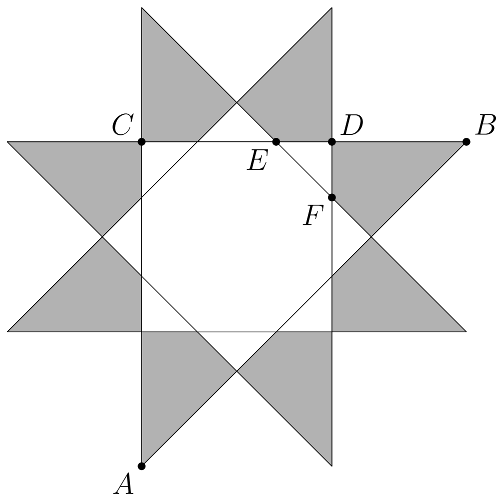
und nach Grenzwertbildung

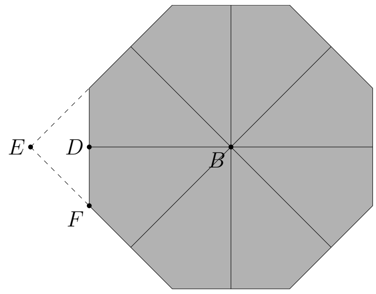
$$a^2 - \alpha = 0\,.$$

Da a_n immer positiv ist, kommt nur die positive Wurzel in Frage, d. h

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\alpha}\,.$$

Zu Aufgabe H49:





Alle Strecken innerhalb des Sternes lassen sich mit Hilfe des Abstandes $\ell_n = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ ausdrücken. Dabei ist zu beachten, dass die Dreiecke ABC und DEF rechtwinklig und gleichschenklig sind, die Katheten also die $\frac{\sqrt{2}}{2}$-fache Länge der Hypotenusen haben:

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= \ell_n\,,\\
\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| &= \sqrt{\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell_n\,,\\
\left|\overrightarrow{BD}\right| &= \ell_n - \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ell_n\,,\\
\left|\overrightarrow{CD}\right| &= \ell_n - 2\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)\ell_n\,.
\end{aligned}$$

Desweiteren ist zu beachten, dass $\overrightarrow{CE}$ und $\overrightarrow{BD}$ Seiten zweier kongruenter rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke sind:

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DF}\right| &= \left|\overrightarrow{CD}\right| - \left|\overrightarrow{CE}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| - \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left(\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\ell_n = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\right)\ell_n\,,\\
\left|\overrightarrow{EF}\right| &= \sqrt{2}\left|\overrightarrow{DF}\right| = \left(3-2\sqrt{2}\right)\ell_n\,.
\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Seitenlängen von Sternen aufeinanderfolgender Stufen ist demnach

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{\left|\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \sqrt{2}-1\,,$$

und die Seitenlänge des Sterns n-ter Stufe beträgt wegen $\ell_0 = 1$

$$\ell_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^n .$$

Damit ist die Gesamtlänge der Randlinie

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} 8\ell_n = \sum_{n=0}^{\infty} 8(\sqrt{2}-1)^n = 8\,\frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{8}{2-\sqrt{2}} = 4(2+\sqrt{2})\,.$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und gleichschenklig, also ist der Winkel zwischen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich $\pi/4$. Die grau eingefärbten Flächen lassen sich demnach so anordnen, dass Sie ein Achteck bilden, welches beim Stern der Stufe n den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} f_n &= \left(2\left|\overrightarrow{BD}\right|\right)^2 - 2\left|\overrightarrow{EF}\right|^2 = \left(2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ell_n\right)^2 - 2\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)\ell_n\right)^2 \\ &= 4\left(5\sqrt{2}-7\right)\ell_n^2 \end{aligned}$$

hat. Somit ist die Gesamtfläche

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} 4\left(5\sqrt{2}-7\right)\ell_n^2 = 4\left(5\sqrt{2}-7\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} \\ &= 4\left(5\sqrt{2}-7\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n \\ &= 4\left(5\sqrt{2}-7\right)\frac{1}{1-\left(3-2\sqrt{2}\right)} = 4\,\frac{5\sqrt{2}-7}{-2+2\sqrt{2}} \\ &= 2\,\frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{-1+2} = 2\left(5\sqrt{2}-7+10-7\sqrt{2}\right) \\ &= 2\left(3-2\sqrt{2}\right)\,. \end{aligned}$$