B.Chen, M.Jedlitschky,
B.Krinn, M.Kutter,
M.Werth

1. Gruppenübung zur Vorlesung

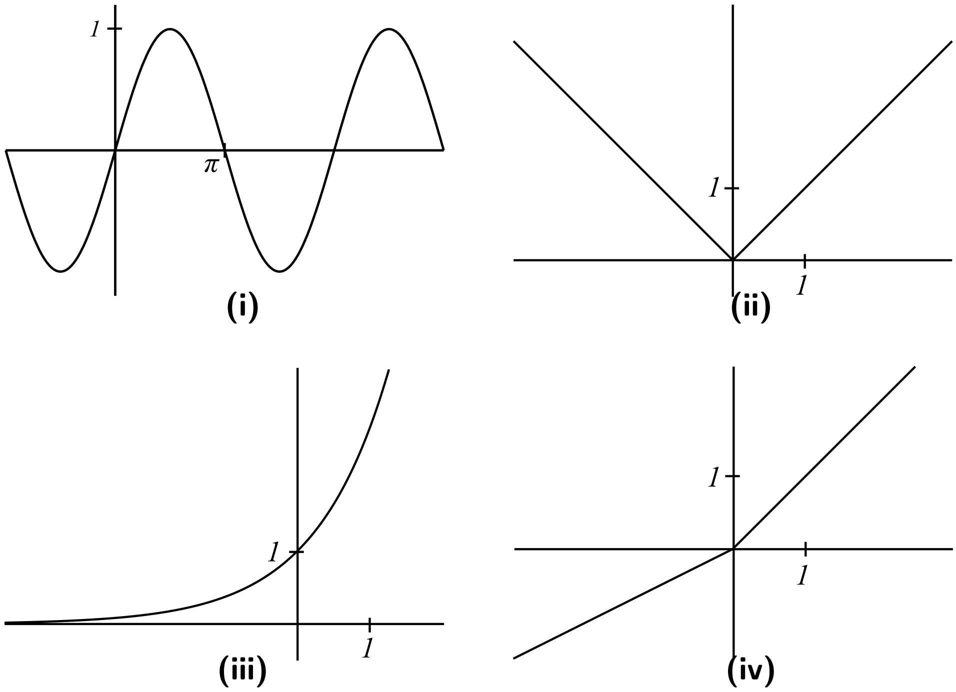
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2013/2014

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Funktionsgraphen*



Ordnen Sie jedem der obigen Funktionsgraphen jeweils eine der unteren Funktionen zu und begründen Sie jede dieser Zuordnungen.

(a) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ 2x & x \geqq 0 \end{cases}$

(b) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \cos\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big)$

(c) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \exp(x)$

(d) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ |x| & x \geqq 0 \end{cases}$

(e) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \sin\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big)$

(f) $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,:\ x \mapsto \sqrt{x^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(i) Die zugehörige Funktion ist **(b)**, da der Graph von $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ aus dem von $\cos(x)$ dadurch entsteht, indem dieser um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben wird.

(ii) Die zugehörige Funktion ist **(f)**, da $\sqrt{x^2} = |x|$ ist.

(iii) Die zugehörige Funktion ist selbstverständlich die e-Funktion.

(iv) Die zugehörige Funktion ist **(d)**. Der Graph ist aus zwei Teilen zusammengesetzt und $|x|$ stimmt auf $\mathbb{R}_0^+$ mit x überein.

Aufgabe H 2. *Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{j=0}^{k} \binom{5+j}{j} = \binom{5+k+1}{k}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $|\sin(n\alpha)| \leqq n|\sin(\alpha)|$.
Hinweis: Man kann $\sin(\beta+\gamma) = \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma)$ verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $k = 0$ erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{k=0} \binom{5+j}{j} = \binom{5}{0} = 1 = \binom{6}{0}.$$

IH Es gelte $a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{5+j}{j} = \binom{5+k+1}{k}$.

IS Für $k+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} \binom{5+j}{j} &= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{5+j}{j}}_{a_k} + \binom{5+k+1}{k+1} \\
&= \binom{5+k+1}{k} + \binom{5+k+1}{k+1} \\
&= \binom{(5+k+1)+1}{k+1} \\
&= \binom{5+(k+1)+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

(b) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = |\sin\alpha| = |\sin\alpha|$.

IH Es gelte $a_n = |\sin(n\alpha)| \leqq n|\sin\alpha|$ für $n \in \mathbb{N}$.

IS Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& |\sin(n+1)\alpha)| \\
= \; & |\sin(n\alpha+\alpha)| \\
= \; & |\sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha| \\
\leqq \; & |\sin n\alpha \cos\alpha| + |\cos n\alpha \sin\alpha| \\
= \; & \underbrace{|\sin n\alpha|}_{a_n} |\cos\alpha| + |\cos n\alpha||\sin\alpha| \\
< \; & n|\sin\alpha| + |\sin\alpha| = (n+1)|\sin\alpha|, \quad (\text{da} \quad |\sin\alpha| \leqq 1, |\cos\alpha| \leqq 1)
\end{aligned}$$

Aufgabe H 3. *Induktion*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $49^n + 16n - 1$ durch 64 teilbar.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ ist $(1 + \frac{1}{n})^n < n$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 0$ erhalten wir $a_0 = 1 - 1 = 0$, was durch 64 teilbar ist.

IH Es gelte $a_n = 49^n + 16n - 1$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 64 teilbar.

IS Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 49^{n+1} + 16(n+1) - 1 \\ &= 49(49^n + 16n - 1 - 16n + 1) + 16n + 16 - 1 \\ &= 49a_n - 16 \cdot 49n + 49 + 16n + 16 - 1 \\ &= 49a_n - \underbrace{16 \cdot 48}_{=64 \cdot 12} n + 64 \\ &= 49a_n + (1 - 12n) \cdot 64 \end{aligned}$$

Und da a_n nach IH durch 64 teilbar ist, ist damit auch a_{n+1} durch 64 teilbar.

(b) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 3$ erhalten wir $a_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} < 3$.

IH Es gelte $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < n$ ist für $3 < n \in \mathbb{N}$.

IS Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1 + \tfrac{1}{n+1})^{n+1} \\ &= (1 + \tfrac{1}{n+1})^n (1 + \tfrac{1}{n+1}) \\ &< \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{a_n} (1 + \tfrac{1}{n+1}) \qquad (\text{da } \tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n}) \\ &< n(1 + \tfrac{1}{n+1}) \\ &= n + \tfrac{n}{n+1} \\ &< n + 1. \end{aligned}$$

(c) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 2$ erhalten wir $a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

IH Es gelte $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$.

(IS) Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} \\
= & \textstyle\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots \frac{1}{(n+1)+n-1} + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+n+1} \\
= & \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{n+n}}_{a_n} + \textstyle\frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} \\
> & \textstyle\frac{13}{24} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} \geqq 0$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
& \textstyle\frac{(n+1)(2n+2)+(n+1)(2n+1)-(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} \\
= & \textstyle\frac{(2n^2+4n+3)+(2n^2+3n+2)-(4n^2+6n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} \\
= & \textstyle\frac{n+3}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} \\
> & 0.
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie gegebenenfalls eine Umkehrabbildung an.

(a) Sei R die Menge der Rechtecke mit positivem Flächeninhalt in der Ebene.
Sei $F\colon R \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto$ (Flächeninhalt von x).

(b) Sei $u\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-5\} \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\colon y \mapsto \dfrac{1}{y+5}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Injektivität: Das Rechteck r_1 mit den Eckpunkten
$$(0,0), \quad (1,0), \quad (1,1), \quad \text{und} \quad (0,1)$$
und das Rechteck r_2 mit den Eckpunkten
$$(0,0), \quad (2,0), \quad (2,1/2), \quad \text{und} \quad (0,1/2)$$
haben den selben Flächeninhalt. Damit gilt $r_1 \neq r_2$ und $F(r_1) = F(r_2)$. Die Abbildung F ist nicht injektiv.
- Surjektivität: Für eine beliebige Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ sei r_y das Rechteck mit den Eckpunkten
$$(0,0), \quad (y,0), \quad (y,1), \quad \text{und} \quad (0,1)\,.$$
Es gilt $F(r_y) = y$. Damit ist F surjektiv.
- Bijektivität: Da F nicht injektiv ist, ist F nicht bijektiv.
- Umkehrabbildung: Da F nicht bijektiv ist, existiert keine Umkehrabbildung.

(b)
- Injektivität: Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-5\}$ mit $u(y_1) = u(y_2)$. Es gilt also
$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1+5} &= \frac{1}{y_2+5} \\ y_2+5 &= y_1+5 \\ y_2 &= y_1\,. \end{aligned}$$
Damit ist u injektiv.
- Surjektivität: Sei $z \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Wir suchen $y_z \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-5\}$ mit $u(y_z) = z$.
$$\begin{aligned} \frac{1}{y_z+5} &= z \\ 1 &= z(y_z+5) \\ \frac{1}{z} &= y_z+5 \\ \frac{1}{z}-5 &= y_z \end{aligned}$$
Damit ist y_z surjektiv.

- Bijektivität: Da u injektiv und surjektiv ist, ist u bijektiv.
- Umkehrabbildung: Wie oben berechnet wurde, ist

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{-5\} : x \mapsto \frac{1}{x} - 5$$

eine Umkehrabbildung.

Aufgabe H 5. *Ungleichungen*

(a) Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist $(x + y + 2z)^2 \leqq 6(x^2 + y^2 + z^2)$?
Hinweis: Schwarzsche Ungleichung.

(b) Zeigen Sie folgende Ungleichung für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$.

$$(1 + x)^n \;\geqq\; 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$$

Ist die Ungleichung für $x = -1/2$ auch noch für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Schwarzsche Ungleichung lautet

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)$$

für beliebige Zahlen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $n = 3$ und $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$ sowie $b_1 = x, b_2 = y, b_3 = z$ liefert, dass für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x + y + 2z)^2 \leqq (1 + 1 + 4)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Also gilt die Ungleichung für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned}
(1 + x)^n &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} x^j \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \sum_{j=3}^{n} \binom{n}{j} x^j \\
&= 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \sum_{j=3}^{n} \binom{n}{j} x^j
\end{aligned}$$

Da alle Summanden positiv sind, gilt $\sum_{j=3}^{n} \binom{n}{j} x^j > 0$ und damit

$$(1 + x)^n \;\geqq\; 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 .$$

Für $x = -1/2$ ist die Ungleichung nicht mehr für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig, da sich für $n = 3$

$$\frac{1}{8} \geqq \frac{1}{4}$$

ergibt.

Aufgabe H 6. *Abbildungen*

Finden Sie

(a) eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$, die injektiv ist. Ist Ihr Beispiel surjektiv?

(b) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(c) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to (0,1]$, die bijektiv ist.

(d) eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \{0,1,2,3\}$, die surjektiv ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]\colon n \mapsto \frac{1}{n}$. Nun muss die Injektivität der Abbildung nachgewiesen werden: Seien dazu $n, m \in \mathbb{N}$ gewählt für die $n \neq m$ gilt. Es ist zu zeigen, dass auch $f(n) \neq f(m)$ gilt. Aber aus $n \neq m$ folgt sofort $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m}$.

Das Beispiel ist nicht surjektiv, da etwa $\sqrt{2}$ nicht im Bild enthalten ist. (Genau genommen kann kein Beispiel surjektiv sein, da es sich bei $\mathbb{N}$ um eine abzählbare Menge handelt, bei $[0,1]$ jedoch nicht.)

(b) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to [0,1]\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqq x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $f(-1000) = 0 = f(1000)$ gilt, ist f nicht injektiv. Es bleibt zu prüfen, ob f auch surjektiv ist. Sei also $y \in [0,1]$ vorgegeben. Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}$, dass $f(x) = y$ erfüllt. Für die gegebene Funktion erfüllt $x = y$ diese Bedingung: Da $y \in [0,1]$ gilt, ist $f(y) = y$. Dies war zu zeigen.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to (0,1]\colon x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Die Abbildung f hat Bildwerte in $(0,1]$, denn aus $x \geqq 0$ folgt $x + 1 \geqq 1$ und daraus wiederum $1 \geqq \frac{1}{x+1} > 0$. Die Abbildung ist auch surjektiv: Sei dazu $y \in (0,1]$. Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}_0^+$, welches $f(x) = y$ erfüllt. Benötigt wird also eine Lösung für die Gleichung

$$(*) \qquad y = \frac{1}{x+1}$$

wobei das y als eine Konstante mit der Eigenschaft $0 < y \leqq 1$ anzusehen ist. Es gilt

$$y = \frac{1}{x+1} \quad \overset{y \neq 0}{\iff} \quad x + 1 = \frac{1}{y} \quad \iff \quad x = \frac{1}{y} - 1.$$

Es existiert also zumindest eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ für die Gleichung $(*)$. Damit f aber surjektiv ist, muss das gefundene x aus dem Definitionsbereich der Abbildung f sein.

Es bleibt also zu prüfen, ob $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist. Da $y \leqq 1$ gilt ist $1 \leqq \frac{1}{y}$ (hierzu wird außerdem $y > 0$ verwendet, andernfalls würde sich die Ungleichung umkehren). Aber daraus folgt sofort $0 \leqq \frac{1}{y} - 1$.

Die Injektivität zeigt man ähnlich wie in Aufgabenteil **(a)**.

(d) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \{0,1,2,3\} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = (0,0), \\ 1 & \text{für } x = (1,0), \\ 2 & \text{für } x = (2,0), \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung f ist klar surjektiv.

Aufgabe H 7. *Skizzieren von Mengen*

Gegeben sind

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0\right\} \qquad B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-8}\right\}$$

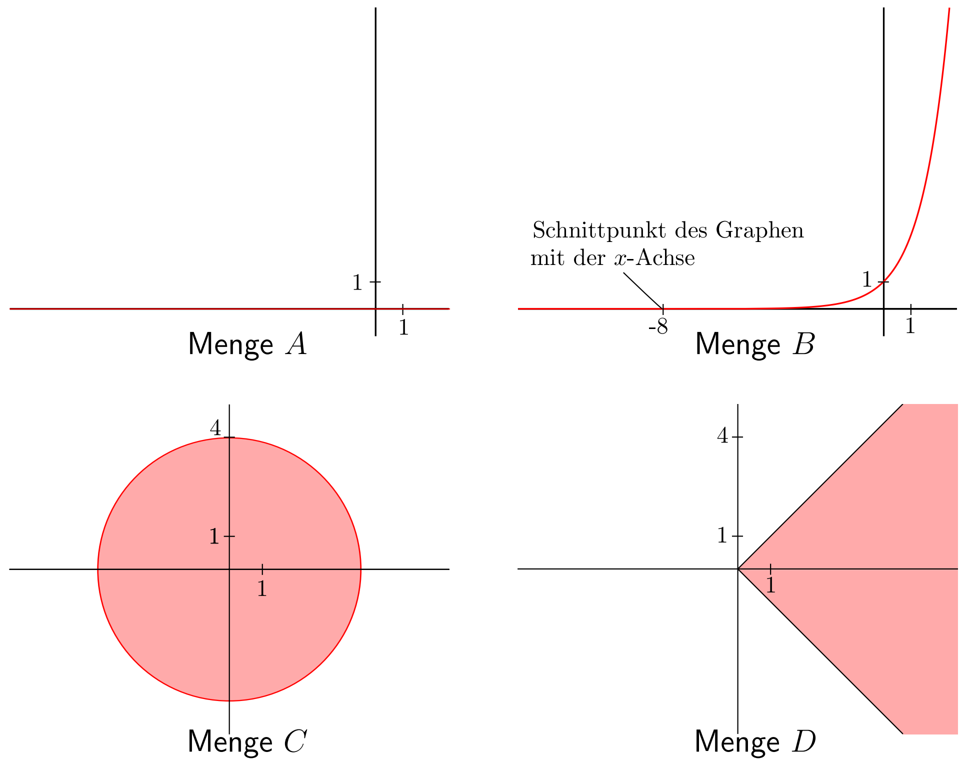
$$C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 4^2\right\} \qquad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > |y|\right\}$$

Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(a) A, B, C und D **(b)** $\complement_{\mathbb{R}^2}(A) \cup \complement_{\mathbb{R}^2}(B)$ **(c)** $C \smallsetminus (D \cup \{(1,2)\})$

Lösungshinweise hierzu:

(a)



Die Mengen A und B sind Graphen von Funktionen. Für Menge C betrachtet man die Kreisgleichung $x^2+y^2 = r^2$ für die spezielle Wahl von $r = 4$. Die Ungleichung bedeutet dann, dass die Menge C aus der Kreislinie und dem Inneren des Kreises besteht. Für Menge D interpretiert man zuerst $x = |y|$ als den Graphen einer Funktion wobei hier x und y vertauschte Rollen haben zur sonst üblichen Schreibweise. Das heißt die Funktion $t \mapsto |t|$ ist mit vertauschten Achsen in das Bild einzutragen. Die strikte Ungleichung bedeutet dann, dass alle Punkte rechtsseitig der Linie $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = |y|\}$ zur Menge gehören.

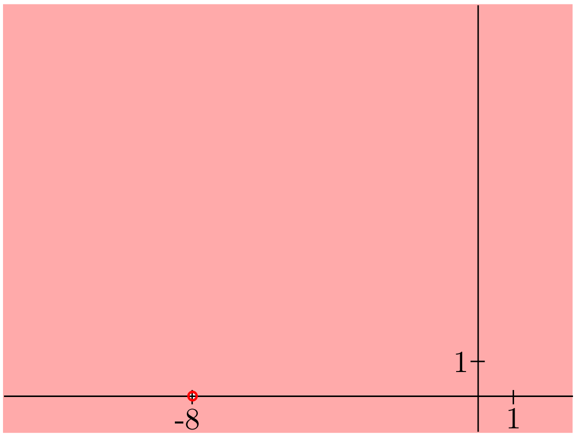
(b) Nach der Regel von De Morgan gilt $E := \complement_{\mathbb{R}^2}(A) \cup \complement_{\mathbb{R}^2}(B) = \complement_{\mathbb{R}^2}(A \cap B)$. Die Menge $A \cap B$ besteht aus allen Punkten (x, y) die gleichzeitig $y = 0$ und $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-8}$ erfüllen. Zu lösen ist also die Gleichung

$$0 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-8}$$

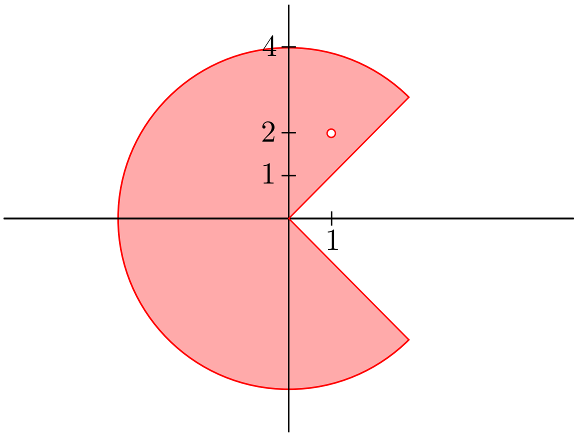
Es gilt

$$0 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-8} \iff \mathrm{e}^{-8} = \mathrm{e}^x \iff -8 = x.$$

Das heißt, es gilt $A \cap B = \{(-8, 0)\}$. Also besteht die Menge E aus allen Punkten der Ebene außer dem Punkt $(-8, 0)$. Die Skizze ist:



(c) Die Menge $\mathrm{pacman} := C \setminus (D \cup \{(1, 2)\})$ besteht aus allen Punkten von C die nicht in D liegen und nicht der Punkt $(1, 2)$ sind. Es ergibt sich also die Skizze der Menge pacman



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 8. *Gleichungen im Komplexen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + |z| = 0$?

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} = 4$ und $|z + 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}| = 4$? Bestimmen Sie dies auf rechnerischem und auf zeichnerischem Weg.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(x - y\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$. Vereinfachen ergibt $x^2 + y^2 - 3y - 3\mathrm{i}x = 1 + 3\mathrm{i}$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3y &= 1 \\ -3x &= 3 \end{cases}$$

und $x = -1$, $y = 0$ oder 3. Die Lösungen der Gleichung sind $z = -1$ und $z = -1+3\mathrm{i}$.

(b) Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x + y\mathrm{i})^2 + |(x + y\mathrm{i})| = 0$. Vereinfachen ergibt $x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} &= 0 \\ 2xy &= 0 \end{cases}$$

- $x = 0$: Dann ist $y^2 = \sqrt{y^2}$. Folglich gilt $y^2 = y$ falls $y \geqq 0$, und $y^2 = -y$ falls $y < 0$. Es gibt drei Lösungen: $z = 0$, $z = \mathrm{i}$ und $z = -\mathrm{i}$.
- $y = 0$: Dann ist $x^2 + \sqrt{x^2} = 0$. Folglich gilt $x = 0$.

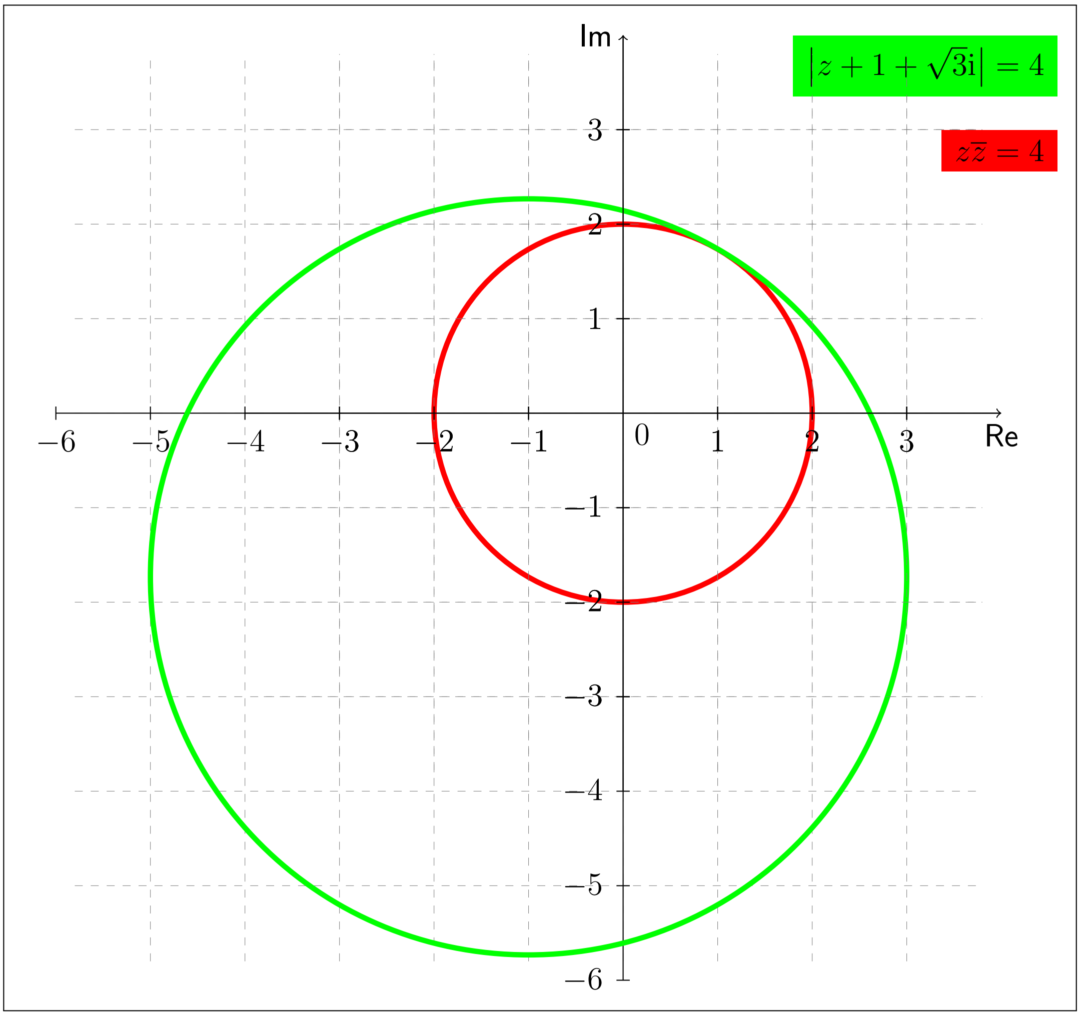
Die Lösung der Gleichung sind dann $z = 0$, $z = \mathrm{i}$ und $z = -\mathrm{i}$.

(c) Rechnerisch: Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichungen sind dann $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = 4$ und $|x + y\mathrm{i} + 1 + \sqrt{3}| = 4$. Weiterhin gilt $x^2 + y^2 = 4$ und $(x + 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 16$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ (x + 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 &= 16 \end{cases}$$

Daraus folgt $2x + 2\sqrt{3}y = 8$. Deshalb ist $x = 4 - \sqrt{3}y$. Folglich ist $y = \sqrt{3}$ und $x = 1$. Die Gleichungen haben eine eindeutige Lösung $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

Zeichnerisch:



Aufgabe H 9. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1-\mathrm{i}| > 2\right\}$

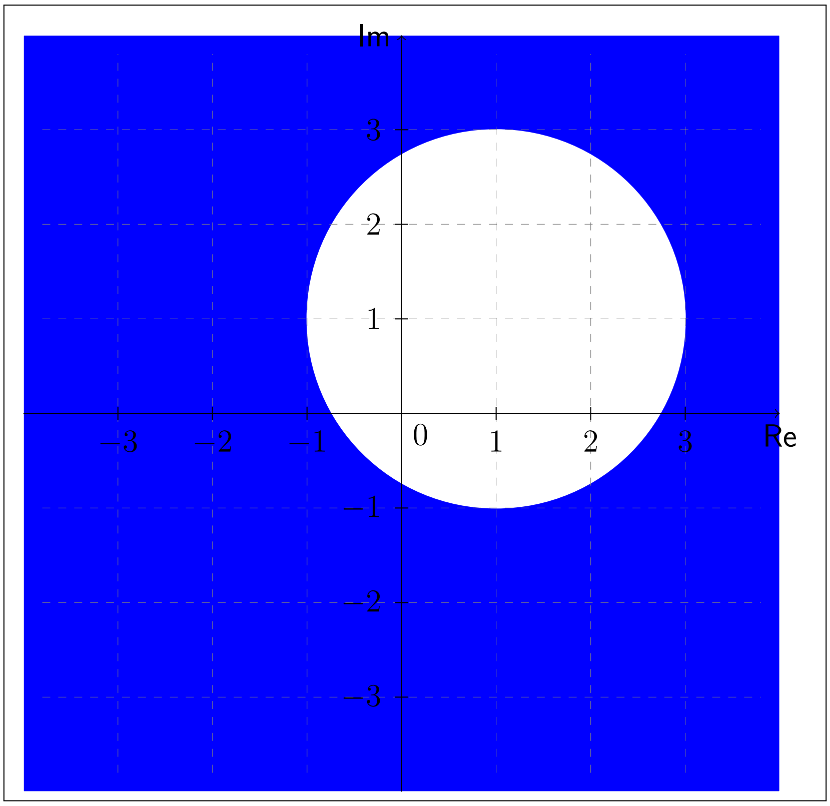
(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1-\mathrm{i}| > |z-1+\mathrm{i}|\right\}$

(c) $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(z)^4\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Skizze sieht so aus:

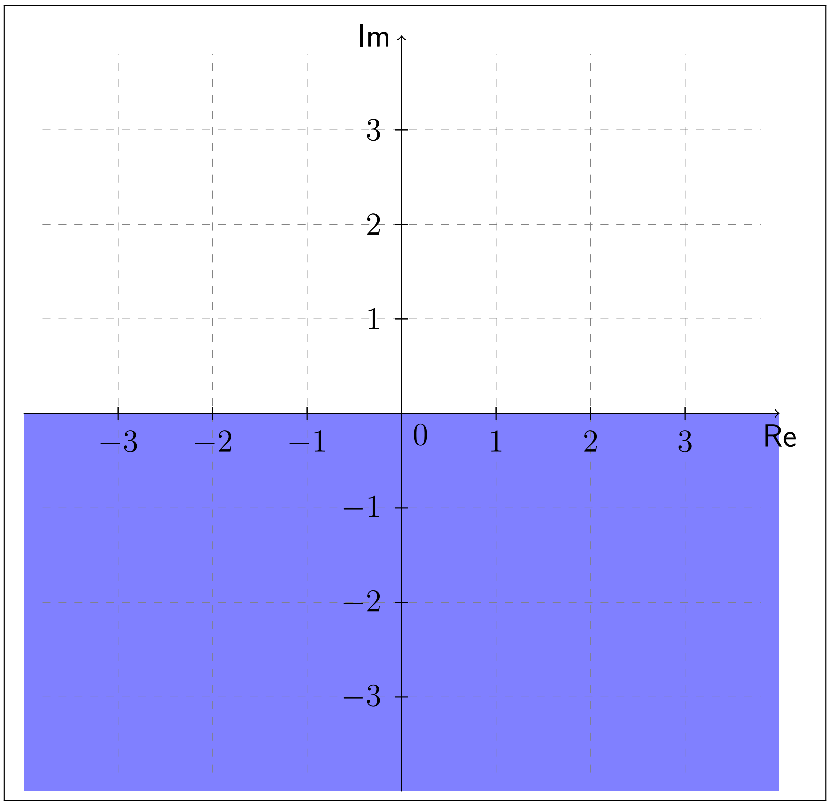


Der Rand gehört nicht zur Menge.

(b) Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1-\mathrm{i}| > |z-1+\mathrm{i}| \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, |a+b\mathrm{i}-1-\mathrm{i}| > |a+b\mathrm{i}-1+\mathrm{i}| \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, |(a-1)+(b-1)\mathrm{i}| > |(a-1)+(b+1)\mathrm{i}| \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} > \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2} \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, (a-1)^2+(b-1)^2 > (a-1)^2+(b+1)^2 \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, (b-1)^2 > (b+1)^2 \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, b^2-2b+1 > b^2+2b+1 \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, -2b > 2b \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 > 4b \right\} \\
= & \left\{ a+b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 > b \right\}
\end{aligned}
$$

Dies liefert folgende Skizze:



Der Rand gehört nicht zur Menge.

(c) Es gilt

$$\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad \text{und} \quad \arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6}\,.$$

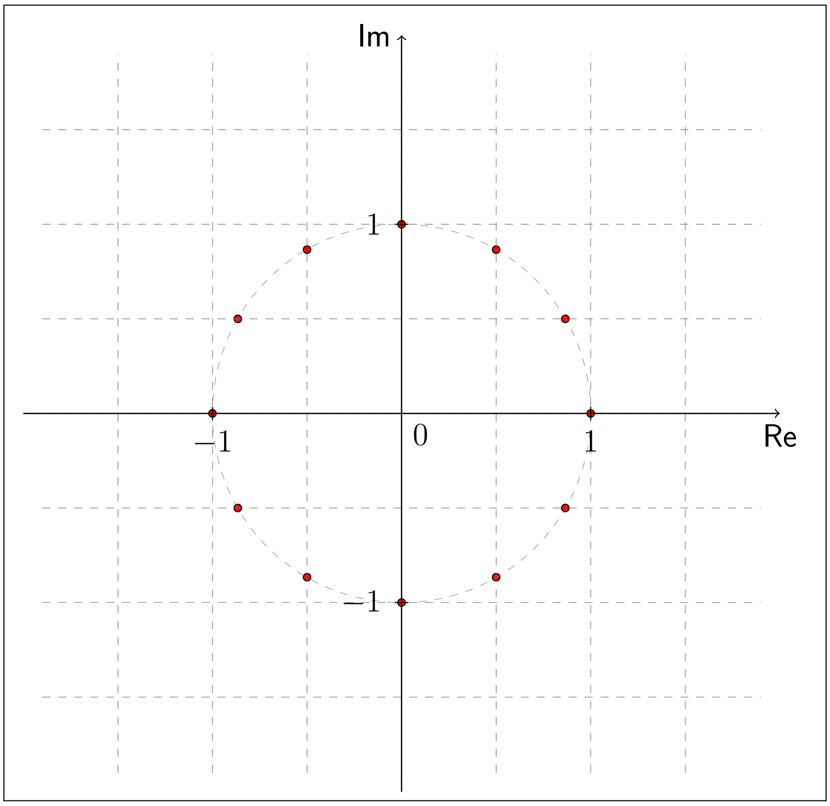
Also erhalten wir

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^{12} = 1\,.$$

Also gilt

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\qquad\text{falls } n=12k+1$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\qquad\text{falls } n=12k+2$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\qquad\text{falls } n=12k+3$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\qquad\text{falls } n=12k+4$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\qquad\text{falls } n=12k+5$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi\right)\qquad\text{falls } n=12k+6$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\qquad\text{falls } n=12k+7$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\qquad\text{falls } n=12k+8$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\qquad\text{falls } n=12k+9$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\qquad\text{falls } n=12k+10$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\qquad\text{falls } n=12k+11$$
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\left(0\right)+\mathrm{i}\sin\left(0\right)\qquad\text{falls } n=12k$$

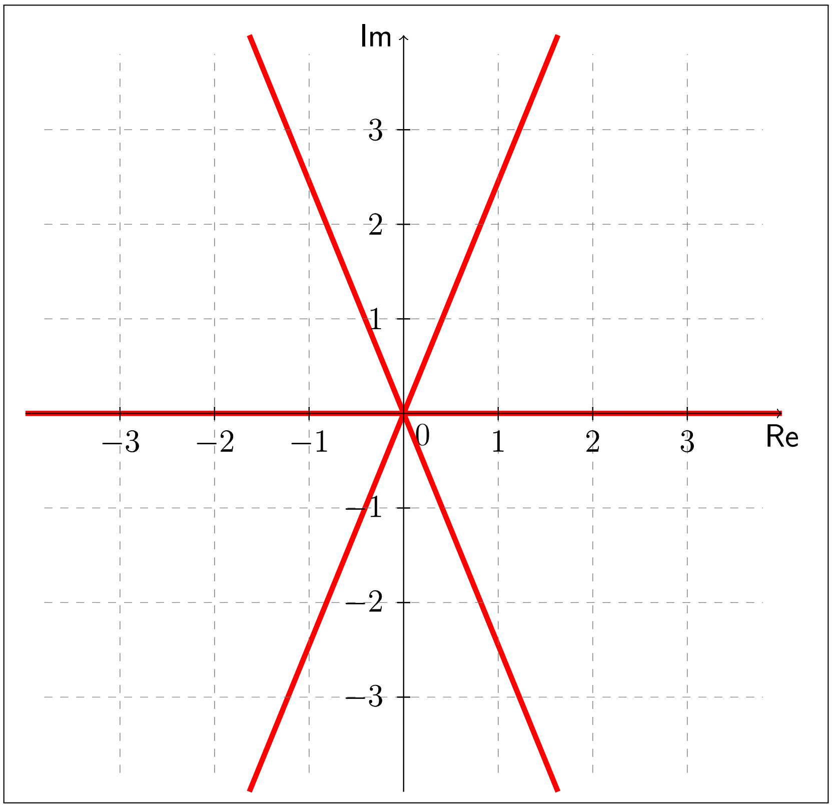
Die Menge besteht also aus 12 isolierten Punkten auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.



(d) Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z^4) = \operatorname{Re}(z)^4 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}((a+b\mathrm{i})^4) = a^4 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(a^4 + 4a^3b\mathrm{i} + 6a^2b^2\mathrm{i}^2 + 4ab^3\mathrm{i}^3 + b^4\mathrm{i}^4\right) = a^4 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(a^4 + 4a^3b\mathrm{i} - 6a^2b^2 - 4ab^3\mathrm{i} + b^4\right) = a^4 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = a^4 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, b^2(-6a^2 + b^2) = 0 \right\} \\
= \; & \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, (b = 0) \vee (b = \sqrt{6}a) \vee (b = -\sqrt{6}a) \right\}
\end{aligned}
$$

Die Menge besteht also aus drei Geraden:



Aufgabe H 10. *Abbildungen im Komplexen*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z + \frac{1}{z}\ , \qquad g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z + \frac{\mathrm{i}}{z}$$

sowie die Menge $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$.

(a) Zeichnen Sie A, $f(A)$ und $g(A)$ in die komplexe Ebene ein.

(b) Bestimmen Sie $\left\{ \arg(z) \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \wedge f(z) = 1 \right\}$.

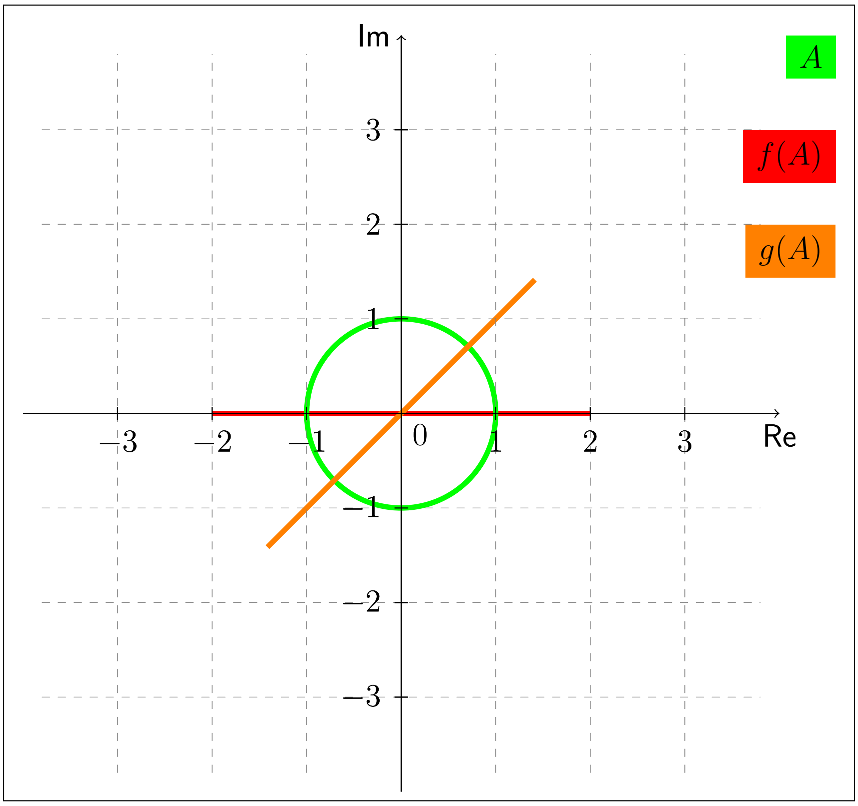
Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = x + y\mathrm{i} \in A$. Dann gilt

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + y\mathrm{i} + \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} = 2x$$

und

$$g(z) = z + \frac{\mathrm{i}}{z} = (x + y\mathrm{i}) + \frac{\mathrm{i}(x - y\mathrm{i})}{x^2 + y^2} = (x + y) + (x + y)\mathrm{i}\,.$$



(b) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z) = 1$. Das heißt $1 = z + \frac{1}{z}$. Es folgt, dass $z^2 + 1 = z$ gelten muss. Quadratisches ergänzen liefert

$$\begin{aligned}
z^2 + 1 - z &= 0 \\
\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= 0 \\
\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} \\
z - \frac{1}{2} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\
z &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\left\{\arg(z) \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \wedge f(z) = 1\right\} = \{\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*

Auf dem reellen Vektorraum $V := \mathcal{C}^0([0,1])$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ ist durch

$$\langle\, f \mid g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

ein Skalarprodukt definiert (vergleiche 2.6.3). Sei $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x$.

(a) Bestimmen Sie die Teilmenge $P \subseteqq V$ der Polynome f von Grad $\leqq 2$ (mit reellen Koeffizienten), für welche $\langle\, f \mid h \rangle = 0$ ist. Ist P ein Untervektorraum von V?

Lösungshinweise hierzu: Jedes Polynom f von Grad $\leqq 2$ (mit reellen Koeffizienten) hat die Form

$$f = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad \text{wobei } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 = \langle\, f \mid h \rangle &= \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_0^1 (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)3x\ \mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 3\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x\ \mathrm{d}\,x = \left[\frac{3}{4}\alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{3}{2}\gamma x^2\right]_0^1 = \frac{3}{4}\alpha + \beta + \frac{3}{2}\gamma \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\frac{3}{4}\alpha + \beta + \frac{3}{2}\gamma = 0 \quad\iff\quad 3\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0.$$

Also gilt

$$P = \left\{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } 3\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0\right\}.$$

Ist P Untervektorraum? Ja. Dies wird durch Überprüfung der Bedingungen von Definition 2.4.4 begründet:

(i) *z.Z.: Gegeben $f, g \in P$, dann ist auch $f + g \in P$.*
Begründung: Da f und g Elemente von P sind kann man schreiben

$$f = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 \quad \text{wobei } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R} \text{ und } 3\alpha_1 + 4\beta_1 + 6\gamma_1 = 0,$$

sowie

$$g = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2 \quad \text{wobei } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R} \text{ und } 3\alpha_2 + 4\beta_2 + 6\gamma_2 = 0.$$

Das Polynom $f + g$ ist nun gegeben durch

$$\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=:\alpha_3} x^2 + \underbrace{(\beta_1 + \beta_2)}_{=:\beta_3} x + \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2)}_{=:\gamma_3}.$$

Es gilt

$$f + g \in P \iff 3\alpha_3 + 4\beta_3 + 6\gamma_3 = 0.$$

Also bleibt $3\alpha_3 + 4\beta_3 + 6\gamma_3 = 0$ nachzurechnen:

$$\begin{aligned} 3\alpha_3 + 4\beta_3 + 6\gamma_3 &= 3(\alpha_1 + \alpha_2) + 4(\beta_1 + \beta_2) + 6(\gamma_1 + \gamma_2) \\ &= \underbrace{3\alpha_1 + 4\beta_1 + 6\gamma_1}_{=0} + \underbrace{3\alpha_2 + 4\beta_2 + 6\gamma_2}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch so begründen: Für Polynome f und g zweiten Grades gilt

$$f \in P \iff \langle f \,|\, h \rangle = 0$$

und ebenso

$$g \in P \iff \langle g \,|\, h \rangle = 0.$$

Nun gilt

$$\langle f + g \,|\, h \rangle = \underbrace{\langle f \,|\, h \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle g \,|\, h \rangle}_{=0} = 0.$$

Also ist $f + g \in P$, da $f + g$ als Summe zweier Polynome höchstens zweiten Grades auch ein Polynom höchstens zweiten Grades ist.

(ii) *z.Z.: Gegeben $f \in P, \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\lambda f \in P$.*
Begründung: Es gilt

$$\lambda f = \underbrace{\lambda\alpha}_{=:\alpha'} x^2 + \underbrace{\lambda\beta}_{=:\beta'} x + \underbrace{\lambda\gamma}_{=:\gamma'} \qquad \text{wobei } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } 3\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0.$$

Also ist λf das Polynom $\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$. Es bleibt zu zeigen, dass $3\alpha' + 4\beta' + 6\gamma' = 0$ gilt.

$$3\alpha' + 4\beta' + 6\gamma' = 3\lambda\alpha + 4\lambda\beta + 6\lambda\gamma = \lambda\underbrace{(3\alpha + 4\beta + 6\gamma)}_{=0} = 0.$$

Also ist tatsächlich $\lambda f \in P$.
Alternativ kann man wie in (ii) für $f \in P$ auch $\langle \lambda f \,|\, h \rangle = 0$ nachrechnen:

$$\langle \lambda f \,|\, h \rangle = \lambda \underbrace{\langle f \,|\, h \rangle}_{=0} = 0$$

(iii) *z.Z.: $0 \in P$*
Begründung: Das Nullpolynom 0 lässt sich schreiben als

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Es ist also das Polynom der Form $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, dass man für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ erhält. Für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist die Gleichung $3\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0$ erfüllt. Also ist $0 \in P$.
Alternativ kann man auch $\langle 0 \,|\, h \rangle = 0$ nachrechnen:

$$\langle 0 \,|\, h \rangle = \int_0^1 0 \cdot 3x \,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}\,x = \Big[0\Big]_0^1 = 0$$

(b) Sei $Q \subseteqq V$ die Teilmenge der Polynome f von Grad $\leqq 3$, die $\langle f - h \mid f - h \rangle = 3$ erfüllen. Ist Q ein Untervektorraum von V?

Lösungshinweise hierzu: Zuerst kann man die Bedingung $\langle f - h \mid f - h \rangle = 3$ etwas vereinfachen: Es gilt

$$(*) \quad \langle f - h \mid f - h \rangle = \langle f \mid f \rangle - \langle f \mid h \rangle - \underbrace{\langle h \mid f \rangle}_{=\langle f \mid h \rangle} + \langle h \mid h \rangle = \langle f \mid f \rangle - 2\langle f \mid h \rangle + \langle h \mid h \rangle .$$

sowie

$$(**) \quad \langle h \mid h \rangle = \int_0^1 3x \cdot 3x \, \mathrm{d}\,x = \int_0^1 9x^2 \, \mathrm{d}\,x = \Big[3x^3\Big]_0^1 = 3.$$

Kombiniert man $(*)$ und $(**)$, so erhält man

$$\begin{aligned} & \langle f - h \mid f - h \rangle = 3 \\ \overset{\text{wg. }(*)}{\iff} \quad & \langle f \mid f \rangle - 2\langle f \mid h \rangle + \langle h \mid h \rangle = 3 \\ \overset{\text{wg. }(**)}{\iff} \quad & \langle f \mid f \rangle - 2\langle f \mid h \rangle = 0 \\ \iff \quad & \langle f \mid f \rangle = 2\langle f \mid h \rangle \end{aligned}$$

Also kann man anstatt der Bedingung $\langle f - h \mid f - h \rangle = 3$ auch die gleichwertige Bedingung $\langle f \mid f \rangle = 2\langle f \mid h \rangle$ überprüfen. Etwa $f = 2h$ erfüllt diese Bedingung, denn

$$\langle f \mid f \rangle \overset{f=2h}{=} \langle f \mid 2h \rangle = 2\langle f \mid h \rangle .$$

Aber h selbst erfüllt die Bedingung nicht, denn

$$\langle h \mid h \rangle = 3 \neq 6 = 2\langle h \mid h \rangle .$$

Also ist eine Element f aus Q gefunden (nämlich $f = 2h$) zu dem ein Vielfaches (nämlich $\frac{1}{2}f = h$) nicht in Q liegt. Das darf bei Untervektoräumen nicht passieren und Q ist somit keiner.

(c) Sei $R := \left\{ f \in V \;\middle|\; f(\frac{1}{2}) = 0 \right\}$. Ist R ein Untervektorraum von V?

Lösungshinweise hierzu: Wie in Teil **(a)** müssen die Bedingungen von Definition 2.4.4 überprüft werden:

(i) *z.Z.: Gegeben $f, g \in R$, dann ist auch $f + g \in R$.* Zuerst einmal ist zu klären was $f + g$ bedeutet. Da f und g zwei Funktionen sind ist auch $f + g$ wieder eine Funktion und zwar

$$f + g \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(x) + g(x).$$

Der Funktionswert der Funktion $f + g$ an der Stelle x ist also gegeben durch $f(x) + g(x)$ (in Formeln: $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x)$). Zu prüfen ist nun, dass

$$f(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ und } g(\tfrac{1}{2}) = 0 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \big(f + g\big)(\tfrac{1}{2}) = 0$$

gilt. Eine Aussage, die ein ' $\Longrightarrow$ ' enthält, zeigt man, indem man das auf der linken Seite vom ' $\Longrightarrow$ ' als Voraussetzung annimmt (also die Gleichungen $f(\frac{1}{2}) = 0$ und $g(\frac{1}{2}) = 0$ dürfen verwendet werden) und dann nachrechnet, dass das, was auf der rechten Seite vom ' $\Longrightarrow$ ' steht, auch richtig ist (also $\big(f+g\big)(\frac{1}{2}) = 0$ ist nachzurechnen). Dies gilt aber, denn

$$\big(f+g\big)(\tfrac{1}{2}) \overset{\text{s.o.}}{=} \underbrace{f(\tfrac{1}{2})}_{=0} + \underbrace{g(\tfrac{1}{2})}_{=0} = 0.$$

(ii) *z.Z.: Gegeben $f \in R$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dann ist auch $\lambda f \in R$.* Die Abbildung λf ist gegeben durch

$$\lambda f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \lambda f(x),$$

das heißt die Funktion λf hat an der Stelle x den Funktionswert $\lambda f(x)$. (In Formeln: $\big(\lambda f\big)(x) = \lambda f(x)$) Also ist zu prüfen, dass

$$f(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \big(\lambda f\big)(\tfrac{1}{2}) = 0$$

gilt. Dies ist richtig, da

$$\big(\lambda f\big)(\tfrac{1}{2}) \overset{\text{s.o.}}{=} \lambda \underbrace{f(\tfrac{1}{2})}_{=0} = 0.$$

(iii) *z.Z.: $0 \in R$.*
Der Nullvektor $\mathbf{0}$ des Vektorraumes V ist gegeben durch die Funktion

$$\mathbf{0} \colon [0,1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 0,$$

also die Funktion die an jeder Stelle den Bildwert 0 hat. (In Formeln $\mathbf{0}(x) = 0$). Es ist zu zeigen, dass $\mathbf{0} \in R$ liegt. Aber $\mathbf{0}(\frac{1}{2}) = 0$, also ist $\mathbf{0} \in R$.

Aufgabe H 12. *Nullstellen von Polynomen*

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des jeweiligen Polynoms und zeichnen Sie diese in die komplexe Zahlenebene ein. Zerlegen Sie das jeweilige Polynom in $\operatorname{Pol}\mathbb{C}$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

(a) $z^8 - 1$

(b) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$

(c) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

(d) $u^4 - 13u^3 - 2u + 26$

Lösungshinweise hierzu:

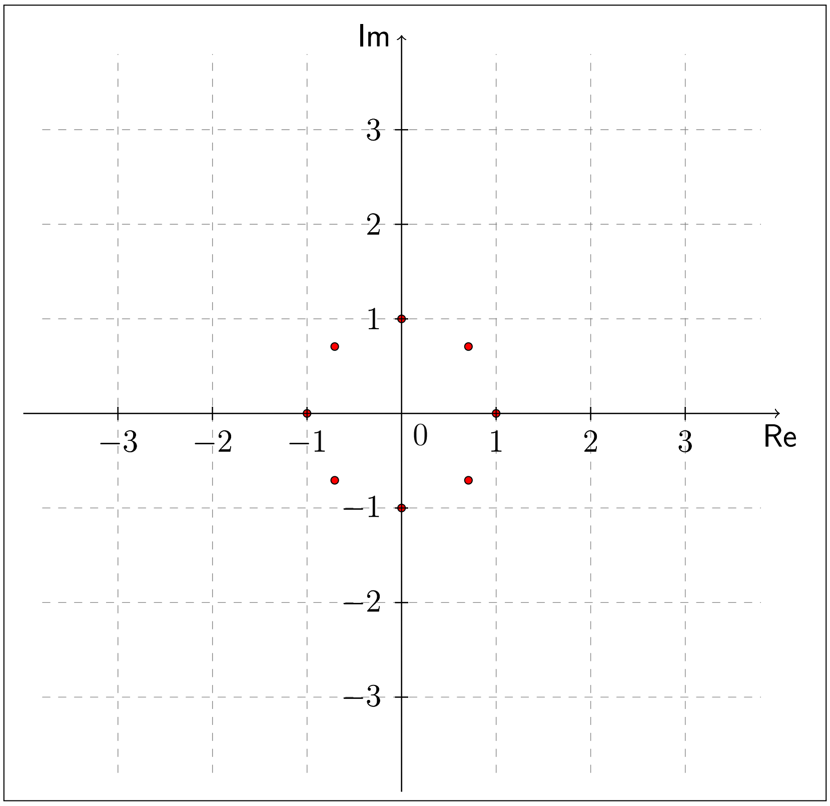
(a) Wir suchen nach Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$. Die komplexe Zahl 1 hat in Polarkoordinaten die Darstellung $\cos(0) + \mathrm{i}\,\sin(0)$. Nach 1.8.4 hat die Gleichung $z^8 = 1$ also die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1\left(\cos(0) + \mathrm{i}\,\sin(0)\right)\\
z_2 &= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
z_3 &= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
z_4 &= 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\
z_5 &= 1\left(\cos(\pi) + \mathrm{i}\,\sin(\pi)\right)\\
z_6 &= 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\\
z_7 &= 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\\
z_8 &= 1\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Das Polynom können wir also in

$$\begin{aligned}
z^8 - 1 = &\left(z - \left(\cos(0) + \mathrm{i}\,\sin(0)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&\left(z - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&\left(z - \left(\cos(\pi) + \mathrm{i}\,\sin(\pi)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&\left(z - \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

zerlegen.



(b) Durch probieren stellen wir fest, dass das Polynom $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$ bei $x_1 = -1$ eine Nullstelle hat. Polynomdivision ergibt

$$(x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2) \colon (x + 1) = x^4 + 2x^3 + x + 2\,.$$

Durch probieren stellen wir fest, dass das Polynom $x^4 + 2x^3 + x + 2$ bei $x_2 = -2$ eine Nullstelle hat. Poloynomdivision ergibt

$$(x^4 + 2x^3 + x + 2) \colon (x + 2) = x^3 + 1\,.$$

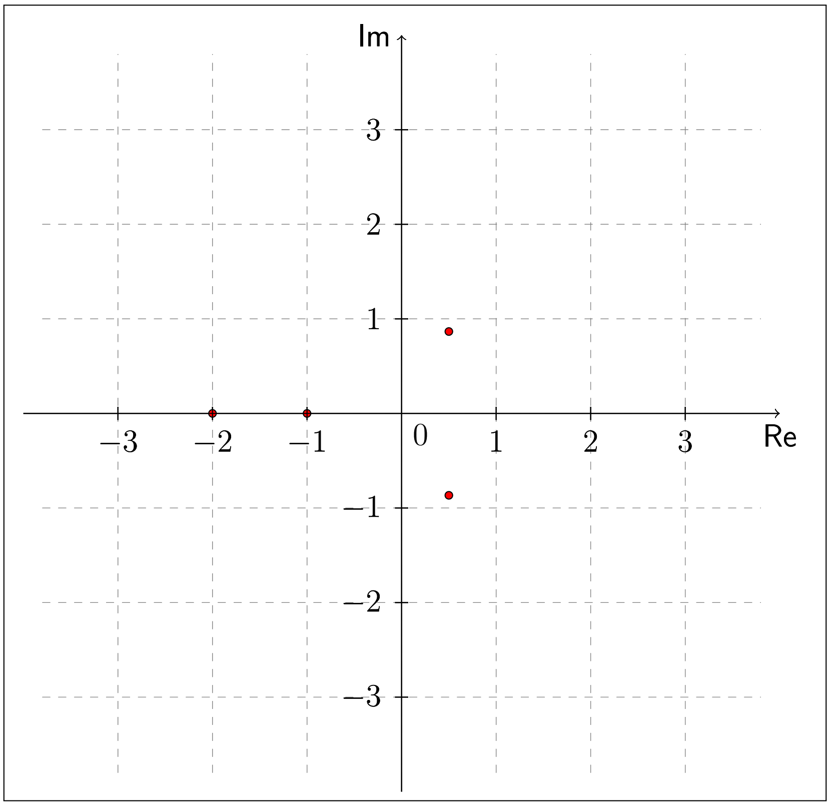
Die Gleichung $x^3 = -1$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x_3 &= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ x_4 &= 1\left(\cos\left(\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\pi\right)\right) \\ x_5 &= 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Das Polynom können wir also in

$$\begin{aligned} x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 &= (x+1)^2(x+2)\left(x - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \\ &\quad \left(x - \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

zerlegen.



(c) Wiederholtes Raten und Polynomdivision ergibt, dass $x = -1$ eine dreifache Nullstelle des Polynoms $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ ist und

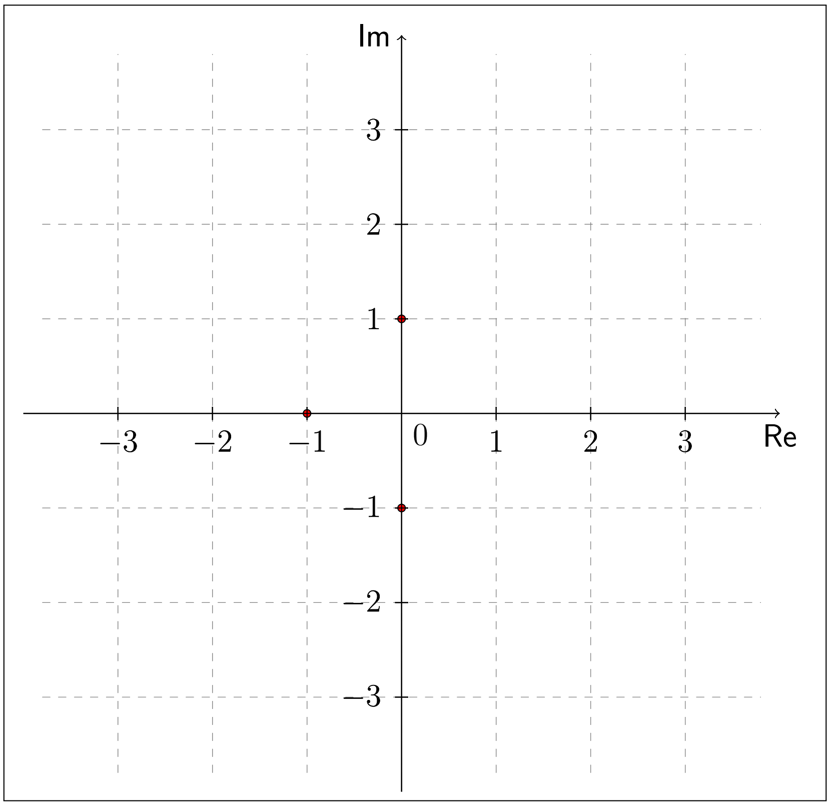
$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3(x^2 + 1)$$

gilt. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat die Lösungen $x_4 = \mathrm{i}$ und $x_5 = -\mathrm{i}$. Insgesamt hat das Polynom $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ also die Nullstellen

$$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,\ x_4 = \mathrm{i}\ \text{und}\ x_5 = -\mathrm{i}$$

und die Zerlegung

$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})\,.$$

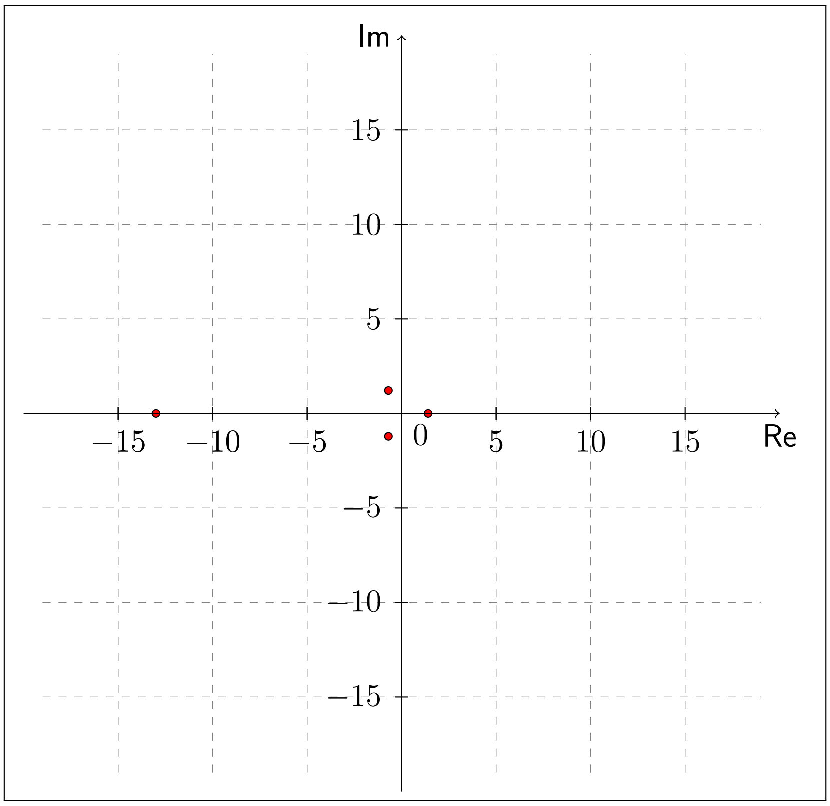


(d) Durch probieren stellen wir fest, dass das Polynom $u^4 - 13u^3 - 2u + 26$ die Nullstelle $u_1 = 13$ hat. Daraus ergibt sich $u^4 - 13u^3 - 2u + 26 = (u - 13)(u^3 - 2)$. Die Gleichung $u^3 = 2$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt[3]{2}\,(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) \\ u_3 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ u_4 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Zerlegung

$$\begin{aligned} u^4 - 13u^3 - 2u + 26 &= (u-13)\left(u - \sqrt[3]{2}\right)\left(u - \left(\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)\right) \\ &\quad \left(u - \left(\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right)\right) . \end{aligned}$$



Aufgabe H 13. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte

$$P = (0, 2, 5)\,, \quad Q = (3, 5, 6) \quad \text{und} \quad R = (-1, 0, 0) \quad \text{aus} \quad \mathbb{R}^3\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch die Punkte P und Q geht. Mit welchen Parameterwerten wird dabei die Strecke von P nach Q beschrieben?

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene, die durch P, Q und R geht.

(c) Parametrisieren Sie die Dreiecksfläche mit den Ecken P, Q und R mittels zweier Parameter.

(d) Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{ \alpha P + \beta Q + \gamma R \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+ \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 1 \right\}\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Verbindungsvektor von P und Q ist $(3, 3, 1)^\intercal$. Also ist

$$g\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

eine Parameterdarstellung der Geraden g. Parameterwerte $0 \leqq t \leqq 1$ ergeben die Strecke zwischen P und Q.

(b) Der Verbindungsvektor von P und R ist $(-1,-2,-5)^\intercal$. Also ist

$$E\colon \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix} \qquad t,r\in\mathbb{R}$$

eine Parameterdarstellung der gesuchten Ebene.

(c) Die gesuchte Dreiecksfläche D ist eine Teilmenge der Ebene E. Also lässt sich die Parametrisierung von D aus der Parametrisierung von E gewinnen. Wenn wir in die Parameterdarstellung von E den Wert $r=0$ einsetzen, erhalten wir die Verbindungsgerade von P und Q. *Werte von $r \geqq 0$ ergeben die Halbebene, die von der Verbindungsgeraden von P und Q begrenzt wird, und in der R liegt.*

Wenn wir in die Parameterdarstellung von E den Wert $t=0$ einsetzen, erhalten wir die Verbindungsgerade von P und R. *Werte von $t \geqq 0$ ergeben die Halbebene, die von der Verbindungsgeraden von P und R begrenzt wird, und in der Q liegt.*

Wenn wir in die Parameterdarstellung von E für r den Wert $r = 1-t$ einsetzen, erhalten wir die Verbindungsgerade von Q und R, denn

$$\begin{aligned} & \left\{P + t(Q-P) + (1-t)(R-P) \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\} \\ = \; & \left\{P + tQ - tP + R - P - tR + tP \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\} \\ = \; & \left\{R + t(Q-R) \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\} . \end{aligned}$$

Werte von $r+t \leqq 1$ ergeben die Halbebene, die von der Verbindungsgeraden von Q und R begrenzt wird, und in der P liegt.

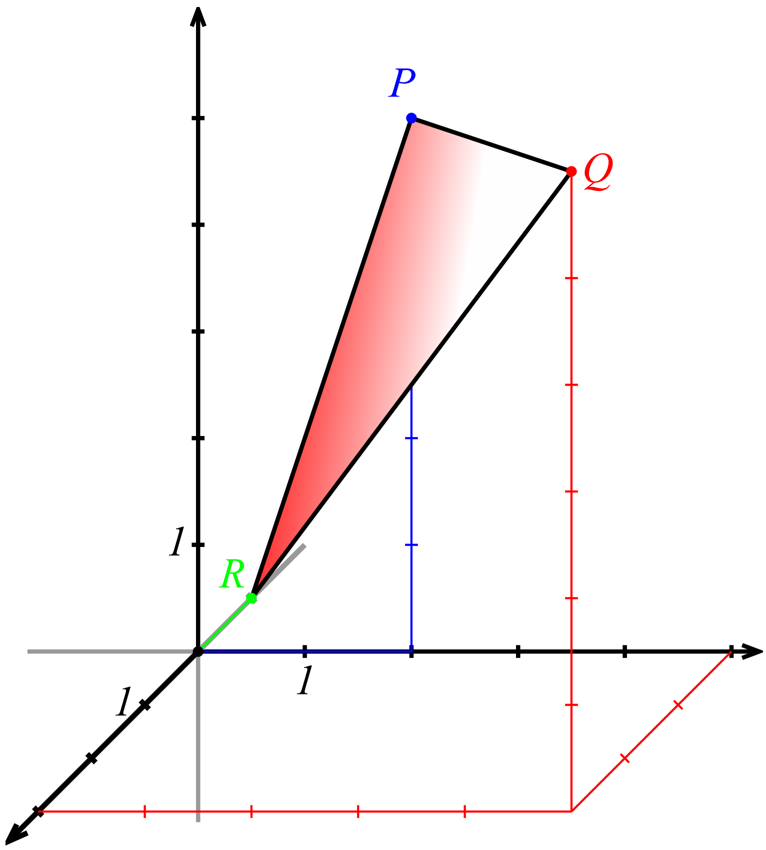
Der Schnitt dieser drei Halbebenen ist das gesuchte Dreieck.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix} \,\middle|\, t,\, r \in \mathbb{R}_0^+ \text{ und } t+r \leqq 1 \right\}$$

(d)

$$\begin{aligned} & \left\{\alpha P + \beta Q + \gamma R \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_0^+ \text{ und } \alpha+\beta+\gamma = 1\right\} \\ = \; & \left\{\alpha P + \beta(Q-P) + \beta P + \gamma(R-P) + \gamma P \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_0^+ \text{ und } \alpha+\beta+\gamma = 1\right\} \\ = \; & \left\{(\alpha+\beta+\gamma) P + \beta(Q-P) + \gamma(R-P) \,\middle|\, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_0^+ \text{ und } \alpha+\beta+\gamma = 1\right\} \\ = \; & \left\{P + \beta(Q-P) + \gamma(R-P) \,\middle|\, \beta,\gamma\in\mathbb{R}_0^+ \text{ und } \beta+\gamma \leqq 1\right\} \end{aligned}$$

Also erhalten wir das Dreieck aus Teil (c).


P
Q
R
1
1
1

B.Chen, M.Jedlitschky,
B.Krinn, M.Kutter,
M.Werth

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Wintersemester 2013/2014

M. Künzer
M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 14. *Hesse-Normalform und Vektorprodukt*

Es seien die Punkte $A = (5, 1, 6)$, $B = (1, -4, 3)$, $C = (-3, -1, 8)$ und $D_t = (1, t, 7 + t)$ gegeben, wobei t ein reeller Parameter ist.

(a) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, die A, B und C enthält.

(c) Bestimmen Sie $\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, D_t \in E\right\}$.

(d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

(e) Bestimmen Sie den Parameter t so, dass $ABCD_t$ eine Raute bildet. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Raute.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei O der Ursprung. Dann ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4, -5, -3)$ und $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-8, -2, 2)$. Das Vektorprodukt der Vektoren ist $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-16, 32, -32)$.

(b) Somit ist der Normalenvektor $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$. Die Hessesche Normalform der gesuchten Ebene E ist dann $\frac{x-2y+2z}{3} = d$. Für ein noch zu bestimmendes d. Da B in der Ebene liegen soll, setzen wir B in die Hessesche Normalform ein und erhalten $d = 5$.

(c) Wir setzen D_t in die linke Seite der Hesseschen Normalform ein und erhalten $\frac{1-2t+2(7+t)}{3} = \frac{15}{3} = 5$. Deshalb liegen die Punkte D_t in der Ebene E für alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) Der Abstand zwischen A und B ist $\sqrt{(5-1)^2 + (1+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Der Abstand zwischen A und C ist $6\sqrt{2}$ und der Abstand zwischen C und B ist $5\sqrt{2}$. Somit ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Sei α der Winkel zwischen den Vektoren $u := \overrightarrow{BA} = (4, 5, 3)$ und $v := \overrightarrow{BC} = (-4, 3, 5)$. Dann ist $\cos\alpha = \frac{\langle u \,|\, v\rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{14}{50}$. Folglich ist $\sin\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2}|u||v|\sin\alpha = 24$.

(e) Damit $ABCD_t$ eine ebene Raute bilden, muss t so gewählt werden, dass die Abstände zwischen A und D_t sowie zwischen C und D_t gleich $5\sqrt{2}$ sind. Das heißt, $\sqrt{(5-1)^2 + (t-1)^2 + (t+7-6)^2} = 5\sqrt{2}$. Folglich ist $t = 4$ oder $t = -4$. Da D und B verschiedene Punkte sein müssen, ist $t = 4$ und somit $D_4 = (1, 4, 11)$. Der Flächeninhalt der Raute entspricht dem Betrag des zu Beginn bestimmten Vektorproduktes $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, also

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{(-16)^2 + 32^2 + (-32)^2}| &= |\sqrt{16^2((-1)^2 + 2^2 + (-2)^2)}| \\
&= 16 \cdot |\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}| \\
&= 16 \cdot |\sqrt{9}| = 48.
\end{aligned}
$$

(d)/(e) Alternative: Klar ist, dass die Raute aus **(e)** den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks aus **(e)** hat. Also kann der Flächeninhalt des Dreiecks auch berechnet werden wie in **(e)**, wenn man anschließend noch durch 2 teilt. Umgekehrt kann der Flächeninhalt der Raute auch berechnet werden wie in **(d)**, wenn man anschließend noch mit 2 multipliziert.

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe $\mathbf{2.6.3}$):

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1, \qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x),$$
$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x), \qquad f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(2x).$$

(a) Bestehe C aus den Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4. Zeigen Sie, dass C eine Basis von $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ ist.

(b) Sei

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\sin(x) + \cos(x))\sin(x)$$

und

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)\,.$$

Liegen g und h in $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$? Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis C.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten eine Linearkombination der Funktionen. Es soll für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \cos(2x) + \lambda_3 \sin(x) + \lambda_4 \sin(2x). \end{aligned}$$

Wir setzen nun verschiedene Werte für x ein, um die Koeffizienten λ_i zu bestimmen. Sei $x = \frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3.$$

Sei nun $x = \frac{3\pi}{2}$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Und somit $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2$. Sei nun $x = 0$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + \lambda_1 + 0 + 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Zuletzt sei $x = \frac{\pi}{4}$, dann gilt

$$0 = \lambda_4.$$

Also sind die Koeffizienten $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ und somit sind die Funktionen linear unabhängig und bilden eine Basis ihrer linearen Hülle $L(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

(b) Die Funktion g ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
g(x) &= (\sin(x)+\cos(x))\sin(x) \\
&= (\sin(x))^2+\cos(x)\sin(x) \\
&\overset{\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)}{=} (\sin(x))^2+\frac{1}{2}\sin(2x) \\
&\overset{\cos(2x)=1-2(\sin(x))^2}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot f_1(x)-\frac{1}{2}\cdot f_2(x)+\frac{1}{2}\cdot f_4(x).
\end{aligned}$$

Die Funktion g ist als Linearkombination der Funktionen f_1, f_2 und f_4 darstellbar mit Koordinatenvektor $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$.

(c) Falls h als Linearkombination darstellbar ist, dann muss

$$\cos(x)=\lambda_1+\lambda_2\cos(2x)+\lambda_3\sin(x)+\lambda_4\sin(2x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ gelten. Sei nun $x=0$, so gilt

$$1=\lambda_1+\lambda_2,$$

und für $x=\pi$ gilt

$$-1=\lambda_1+\lambda_2$$

Dies ist ein Widerspruch, d.h. h ist nicht als Linearkombination der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 darstellbar.

Aufgabe H 16. *Basen*

Wir betrachten den komplexen Vektorraum $V:=\operatorname{Pol}_4\mathbb{C}$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ von Grad $\leqq 4$. Gegeben seien darin die Polynome

$$1,\ \mathrm{i}+X,\ (\mathrm{i}+X)^2 \quad\text{und}\quad (\mathrm{i}+X)^3\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Polynome linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von V, die alle diese Polynome enthält.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Polynoms X^3 bezüglich B.

(d) Sei $U:=\mathrm{L}\left(X^2-1,(X+\mathrm{i})^2,(X-\mathrm{i})^2,X^2\right)$. Bestimmen Sie $\dim U$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Linearkombination der Polynome:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \lambda_1+\lambda_2(\mathrm{i}+X)+\lambda_3(\mathrm{i}+X)^2+\lambda_4(\mathrm{i}+X)^3 \\
&\quad\text{(Da die Polynome auf beiden Seiten gleichen Grad haben müssen,} \\
&\quad\text{sind die } \lambda_i=0 \text{ für } i=2,3,4 \text{ und dann } \lambda_1=0\text{), oder wir berechnen weiter} \\
&= \lambda_1+\lambda_2(\mathrm{i}+X)+\lambda_3(-1+2\mathrm{i}X+X^2)+\lambda_4(-\mathrm{i}-3X+3\mathrm{i}X^2+X^3) \\
&= (\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_4)\mathrm{i}+(\lambda_2+2\mathrm{i}\lambda_3-3\lambda_4)X+(\lambda_3+3\mathrm{i}\lambda_4)X^2+\lambda_4X^3
\end{aligned}$$

Vergleichen der Koeffizienten ergibt

$$\begin{cases} 0 &= \lambda_1 - \lambda_3 + (\lambda_2 - \lambda_4)\mathrm{i} \\ 0 &= \lambda_2 + 2\mathrm{i}\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ 0 &= \lambda_3 + 3\mathrm{i}\lambda_4 \\ 0 &= \lambda_4 \end{cases}$$

Einsetzen von unten nach oben liefert: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Polynome sind also linear unabhängig.

(b) Da $V := \mathrm{Pol}_4\,\mathbb{C}$ alle Polynome von Grad $\leqq 4$ enthält, brauchen wir noch ein Polynom von Grad 4, z.B, X^4. Zu zeigen: Die Polynome

$$1,\ \mathrm{i}+X,\ (\mathrm{i}+X)^2,\ (\mathrm{i}+X)^3 \quad \text{und} \quad X^4$$

sind linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von V.
Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit betrachten wir die Linearkombination:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \lambda_1 + \lambda_2(\mathrm{i}+X) + \lambda_3(\mathrm{i}+X)^2 + \lambda_4(\mathrm{i}+X)^3 + \lambda_5 X^4 \\ &= \lambda_1 + \lambda_2(\mathrm{i}+X) + \lambda_3(-1+2\mathrm{i}X+X^2) + \lambda_4(-\mathrm{i}-3X+3\mathrm{i}X^2+X^3) + \lambda_5 X^4 \\ &= (\lambda_1-\lambda_3) + (\lambda_2-\lambda_4)\mathrm{i} + (\lambda_2+2\mathrm{i}\lambda_3-3\lambda_4)X + (\lambda_3+3\mathrm{i}\lambda_4)X^2 + \lambda_4 X^3 + \lambda_5 X^4 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt wie in Teil **(a)**, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ und die lineare Unabhängigkeit ist bewiesen.
Zum Nachweis der Eigenschaft als Erzeugendensystem betrachten wir ein allgemeines Polynom von Grad 4:

$$\begin{aligned} &aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \\ &\overset{!}{=} \lambda_1 + \lambda_2(\mathrm{i}+X) + \lambda_3(\mathrm{i}+X)^2 + \lambda_4(\mathrm{i}+X)^3 + \lambda_4 X^4 \\ &= (\lambda_1-\lambda_3) + (\lambda_2-\lambda_4)\mathrm{i} + (\lambda_2+2\mathrm{i}\lambda_3-3\lambda_4)X + (\lambda_3+3\mathrm{i}\lambda_4)X^2 + \lambda_4 X^3 + \lambda_4 X^4 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} e &= \lambda_1 - \lambda_3 + (\lambda_2 - \lambda_4)\mathrm{i} \\ d &= \lambda_2 + 2\mathrm{i}\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ c &= \lambda_3 + 3\mathrm{i}\lambda_4 \\ b &= \lambda_4 \\ a &= \lambda_5 \end{cases}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist

$$\begin{cases} \lambda_1 &= e - d\mathrm{i} - c + b\mathrm{i} \\ \lambda_2 &= d - 2\mathrm{i}c - 3b \\ \lambda_3 &= c - 3\mathrm{i}b \\ \lambda_4 &= b \\ \lambda_5 &= a \end{cases}$$

Damit lässt sich jedes Polynom aus V als Linearkombination unserer 5 Polynome darstellen und diese bilden ein Erzeugendensystem.

(c) Wir wollen unser Ergebnis aus Teil **(b)** anwenden. Für das Polynom X^3 ist $a = c = d = e = 0$ und $b = 1$. Einsetzen in die Formeln ergibt: Der Koordinatenvektor des Polynoms X^3 bezüglich B ist $(\mathrm{i}, -3, -3\mathrm{i}, 1, 0)$.

(d) Wir betrachten die Polynome X^2, $X^2 - 1$ und $(X + i)^2$. Diese sind linear unabhängig, denn: Sei $0 \stackrel{!}{=} \lambda_1 X^2 + \lambda_2(X^2 - 1) + \lambda_3(X + \mathrm{i})^2$. Dann erhalten wir mittels Koeffizientenvergleich

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_3 \mathrm{i} & = & 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Folglich sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und deshalb ist $\dim U \geqq 3$.
Da $(X - \mathrm{i})^2 = X^2 - 2X\mathrm{i} - 1 = 2(X^2 - 1) - (X + \mathrm{i})^2$ ist, folgt, dass $(X - \mathrm{i})^2$ eine Linearkombination aus $X^2 - 1$ und $(X + \mathrm{i})^2$ ist. Deshalb ist $\mathrm{L}\,(X^2 - 1, (X + \mathrm{i})^2, (X - \mathrm{i})^2, X^2) = \mathrm{L}\,(X^2 - 1, (X + \mathrm{i})^2, X^2)$ und damit gilt $\dim U = 3$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Matrizen*

Es bezeichnen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$.

Bestimmen Sie die jeweilige Menge

(a) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, für die $e_1^\intercal A e_2 = e_2^\intercal A e_1$ gilt.

(b) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die $e_2^\intercal A e_2 = 0$ und $A^2 = A$ erfüllen.

(c) aller $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die $AA^\intercal = \mathbf{0}$ erfüllen.

(d) aller $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, die $AA^\intercal = \mathbf{0}$ erfüllen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die Bedingung der Aufgabenstellung lautet dann

$$(1,0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a,b)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

und

$$(0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (c,d)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c\,.$$

Die gesuchte Menge ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$(0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (c,d)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d\,.$$

Wir erhalten also die Bedingung $d = 0$. Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= a \\ ab &= b \\ ac &= c \\ bc &= 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert $b = 0$ oder $c = 0$.

- Fall 1: $b=0$. Die Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} a^2 &= a \\ ac &= c\,. \end{aligned}$$

  Die erste der beiden Gleichungen hat die Lösungen $a=0$ und $a=1$. Für $a=0$ erhalten wir aus der zweiten Gleichung $c=0$. Für $a=1$ ist die zweite Gleichung für jeden Wert von c erfüllt. Wir erhalten also die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1&0\\c&0\end{pmatrix}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

- Fall 2: $c=0$. Die Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} a^2 &= a \\ ab &= b\,. \end{aligned}$$

  Die erste der beiden Gleichungen hat die Lösungen $a=0$ und $a=1$. Für $a=0$ erhalten wir aus der zweiten Gleichung $b=0$. Für $a=1$ ist die zweite Gleichung für jeden Wert von b erfüllt. Wir erhalten also die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}\,\middle|\,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Zusammen erhalten wir also die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1&0\\c&0\end{pmatrix}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}\,\middle|\,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

(c) Sei $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&b^2+c^2\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 0 \\ ac+bd &= 0 \\ c^2+d^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die erste diese Gleichungen ist über den reellen Zahlen nur für $a=0$ und $b=0$ erfüllt. Die dritte dieser Gleichungen ist nur für $c=$ und $d=0$ erfüllt. Die gesuchte Menge besteht also nur aus der Nullmatrix.

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wie oben erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 0 \\ ac + bd &= 0 \\ c^2 + d^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen hat über den komplexen Zahlen die Lösungen $a = b\mathrm{i}$ und $a = -b\mathrm{i}$, die dritte Gleichung hat die Lösungen $c = d\mathrm{i}$ und $c = -d\mathrm{i}$

- Fall 1: $a = b\mathrm{i}$ und $c = d\mathrm{i}$. In diesem Fall erhalten wir $b\mathrm{i}d\mathrm{i} + bd = bd - bd = 0$. Die Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & b \\ d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\}$$
gehört also zur Lösung.
- Fall 2: $a = -b\mathrm{i}$ und $c = d\mathrm{i}$. In diesem Fall erhalten wir $-b\mathrm{i}d\mathrm{i} + bd = 2bd = 0$. Dies ist für $b = 0$ oder $d = 0$ erfüllt. Die Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\}$$
gehört also zur Lösung.
- Fall 3: $a = b\mathrm{i}$ und $c = -d\mathrm{i}$. In diesem Fall erhalten wir $-b\mathrm{i}d\mathrm{i} + bd = 2bd = 0$. Dies ist für $b = 0$ oder $d = 0$ erfüllt. Die Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\}$$
gehört also zur Lösung.
- Fall 4: $a = -b\mathrm{i}$ und $c = -d\mathrm{i}$. In diesem Fall erhalten wir $b\mathrm{i}d\mathrm{i} + bd = 0$. Die Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\}$$
gehört also zur Lösung.

Insgesamt erhalten wir also die Menge

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & b \\ d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\} \\ = \;&\left\{ \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & b \\ d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -b\mathrm{i} & b \\ -d\mathrm{i} & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{C} \right\}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H 18. *Dimension von Untervektorräumen*
Seien Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$U := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

und

$$W := \left\{v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von U, W und $U \cap W$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; Ax = 0 \right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Um eine Basis für

$$U = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

zu finden betrachtet man die fünf erzeugenden Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Jeder dieser fünf erzeugenden Vektoren lässt sich als Linearkombination aus

$$u^{(1)} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in U \quad \text{und} \quad u^{(2)} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in U$$

darstellen. Dies sieht man, indem man die Linearkombinationen explizit ausrechnet:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot u^{(1)} \qquad \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = -2 \cdot u^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix}7\\2\\0\\2\end{pmatrix} = 7 \cdot u^{(1)} + 2 \cdot u^{(2)} \qquad \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\-5\end{pmatrix} = 2 \cdot u^{(1)} - 5 \cdot u^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot u^{(1)} + 2 \cdot u^{(2)}$$

Also bilden die Vektoren $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ ein Erzeugendensystem für U. Sie bilden eine Basis, wenn sie zusätzlich linear unabhängig sind. Dies ist hier der Fall da $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ keine Vielfachen voneinander sind. Also ist $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ eine Basis von U und U hat damit Dimension 2.

Wichtig: Die Argumentation mit den Vielfachen funktioniert hier nur, weil wir die lineare Unabhängigkeit von *zwei* Vektoren überprüfen wollen. Für *drei und mehr* Vektoren muss man ein lineares Gleichungssystem aufstellen!

Als nächstes ist eine Basis für W zu bestimmen. Der Untervektorraum W besteht aus all den Vektoren des $\mathbb{R}^4$, für die die Summe aus den Einträgen 0 ergibt. Es gilt

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_4 = -v_1 - v_2 - v_3.$$

Also lässt sich schreiben:

$$W = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren die man für die Wahl $v_1 = 1, v_2 = v_3 = 0$ sowie $v_1 = v_3 = 0, v_2 = 1$ und $v_1 = v_2 = 0, v_3 = 1$ erhält sind

$$w^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt für jede Wahl von $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also lässt sich jeder Vektor aus W als Linearkombination aus $w^{(1)}, w^{(2)}$ und $w^{(3)}$ schreiben. Also bilden $w^{(1)}, w^{(2)}$ und $w^{(3)}$ ein Erzeugendensystem von W. Es bleibt lineare Unabhängigkeit zu prüfen. Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um lineare Unabhängigkeit zu zeigen, muss man nun überprüfen, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung ist. Durch Zusammenfassen der linken Seite der Gleichung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten 3 Zeilen der Gleichung ergeben $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Also bilden $w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}$ eine Basis von W und W hat damit Dimension 3.

Nun bleibt noch eine Basis für $U \cap W$ zu bestimmen. Dazu wird zuerst einmal $U \cap W$ bestimmt. Es gilt

$$U \cap W = \left\{ u \in U \,\middle|\, u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \right\}.$$

Jedes $u \in U$ lässt sich eindeutig als $u = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)}$ schreiben (mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), da $u^{(1)}, u^{(2)}$ eine Basis von U sind. Das heißt es gilt

$$u = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_1 + \lambda_2 + 0 + \lambda_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_1 = -2\lambda_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Also ist $(-2, 1, 0, 1)^\intercal$ Basis von $U \cap W$, denn $U \cap W$ wird - wie eben gesehen - von $(-2, 1, 0, 1)^\intercal$ erzeugt und ein einzelner Vektor, der nicht der Nullvektor ist, ist immer linear unabhängig. Die Dimension von $U \cap W$ ist 1.

Lösungshinweise hierzu: Gesucht ist also ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A, das als Lösungsmenge U hat. Es gibt sehr viele solche Matrizen A, die hier vorgestellte Lösung ist also nicht die einzig mögliche. In Aufgabenteil **(a)** wurde die Basis

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für U bestimmt. Der erste Schritt ist es A so zu bestimmen, dass $Au^{(1)} = 0$ und $Au^{(2)} = 0$ gilt. Etwa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt dies, wie man durch nachrechnen sieht. Bisher hat man damit eine Matrix A gefunden, die

$$U = \mathrm{L}\left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) \subseteqq \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0\right\}$$

erfüllt. Es muss aber an dieser Stelle nicht „$U \supseteqq \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0\right\}$“ gelten. (Zum Besipiel für die Nullmatrix gilt „$U \supseteqq \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0\right\}$“ nicht.)

Durch Bestimmung der Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$ zeigen wir, dass wirklich $U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0\right\}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich die Gleichungen $x_2 = x_4$ und $x_3 = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0\right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3 = 0 \text{ und } x_2 = x_4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = U. \end{aligned}$$

Aufgabe H 19. *Matrizen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Menge

$$\left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 2} \,\middle|\, A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

enthält mindestens zwei Elemente.

(b) Für jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ gibt es eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $CD = \mathrm{E}_2$.

(c) Sei $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $F^2 = \mathrm{E}_2$. Dann ist $F \in \{-\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_2\}$.

(d) Es gibt eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $G^2 = -\,\mathrm{E}_2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \\ e+f \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \\ e & 2f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \\ e+f \end{pmatrix}$$

und wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b &= 2 \\ c+d &= 2 \\ e+f &= 0 \\ a+2b &= 3 \\ c+2d &= 3 \\ e+2f &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion von Gleichungen ergibt $b = 1$, $d = 1$ sowie $f = 0$. Einsetzen ergibt $a = 1$, $c = 1$ und $e = 0$. Also besteht die Menge nur aus dem einen Element $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und die Aussage ist falsch.

(b) Die Aussage ist falsch, denn für die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und für eine beliebige Matrix $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $CD = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_2$.

(c) Die Aussage ist falsch, denn für $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Die Aussage ist wahr, denn für $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $G^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 20. *Lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S\ :\ \left\{\begin{array}{rcr} -x_2-2x_3+11x_4-3x_5 &=& 15\\ -2x_1+x_2+2x_3-4x_4+3x_5 &=& -3\\ -5x_1+2x_2+4x_3-5x_4+6x_5 &=& -1\\ 6x_1-x_2-2x_3-10x_4-3x_5 &=& -21\\ -x_1+2x_2+4x_3-19x_4+6x_5 &=& -25 \end{array}\right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu (b).

(d) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung -25 durch -24 und bestimmen Sie nun die Lösungsmenge.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix für S ist

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & -1 & -2 & 11 & -3 & 15\\ -2 & 1 & 2 & -4 & 3 & -3\\ -5 & 2 & 4 & -5 & 6 & -1\\ 6 & -1 & -2 & -10 & -3 & -21\\ -1 & 2 & 4 & -19 & 6 & -25 \end{array}\right].$$

Addieren wir die zweite, dritte und vierte Zeile zur fünften erhalten wir

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & -1 & -2 & 11 & -3 & 15\\ -2 & 1 & 2 & -4 & 3 & -3\\ -5 & 2 & 4 & -5 & 6 & -1\\ 6 & -1 & -2 & -10 & -3 & -21\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Addieren wir die zweite Zeile zur ersten und vierten erhalten wir das System

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} -2 & 0 & 0 & 7 & 0 & 12\\ -2 & 1 & 2 & -4 & 3 & -3\\ -5 & 2 & 4 & -5 & 6 & -1\\ 4 & 0 & 0 & -14 & 0 & -24\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Addieren wir das -2-fache der zweiten Zeile zu der dritten Zeile und das 2-fache der ersten Zeile zu der vierten Zeile, bekommen wir das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} -2 & 0 & 0 & 7 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Addieren wir das -2-fache der dritten Zeile zur zweiten und vierten Zeile und multiplizieren die dritten Zeile mit -1, bekommen wir

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 3 & -13 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Addieren wir das 10-fache der ersten Zeile zur zweiten und das 3-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile, bekommen wir

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vertauschen wir die erste mit der dritte Zeile und die dritte mit der vierte Spalte bekommen wir

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(b) Eine spezielle Lösung von S is dann (nachdem die Variablenvertauschung rückgängig gemacht wurde) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist (mit den vertauschten Spalten wie oben)

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist also nach Satz 3.7.6

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(d) Ersetzen wir in der letzten Gleichung -25 durch -24, dann lautet die fünfte Gleichung $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 19x_4 + 6x_5 = -24$. Addieren wir die zweite, dritte und vierte Zeile, dann erhalten wir $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 19x_4 + 6x_5 = -25$. Folglich ist $-24 = -25$. Das heißt, das Gleichungssystem besitzt keine Lösungen. Die Lösungsmenge ist die leere Menge.

Aufgabe H 21. *Die komplexen Zahlen als reeller Vektorraum*

Wir können $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen. Dieser hat die Basis $B : 1, \mathrm{i}$.
Für $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\alpha_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto zw$.

(a) Bestimmen Sie ${}_B(\alpha_{1+3\mathrm{i}})_B$.

(b) Finden Sie für jedes $w \in \mathbb{C}$ ein $u \in \mathbb{C}$ mit $\left({}_B(\alpha_w)_B\right)^2 = {}_B(\alpha_u)_B$.

(c) Finden Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $\left({}_B(\alpha_w)_B\right)^3 = -2\,\mathrm{E}_2$.

(d) Beschreiben Sie die Abbildung α_i in der Zahlenebene geometrisch. Liegt eine Spiegelung vor?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Satz **3.8.6** gilt

$$\begin{aligned} {}_B{\alpha_{1+3\mathrm{i}}}_B &= \begin{pmatrix} {}_B\alpha_{1+3\mathrm{i}}(1) & {}_B\alpha_{1+3\mathrm{i}}(\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_B(1+3\mathrm{i}) & {}_B(-3+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Sei $w = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} {}_B{\alpha_w}_B = {}_B{\alpha_{a+b\mathrm{i}}}_B &= \begin{pmatrix} {}_B\alpha_{a+b\mathrm{i}}(1) & {}_B\alpha_{a+b\mathrm{i}}(\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_B(a+b\mathrm{i}) & {}_B(-b+a\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist $({}_B\alpha_{w}{}_B)^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$.

Sei $u = (a^2-b^2) + 2ab\mathrm{i}$. Dann gilt $({}_B\alpha_{w}{}_B)^2 = {}_B\alpha_{u}{}_B$.

(c) Sei $w = a + b\mathrm{i}$. Dann gilt

$$-2\,\mathrm{E}_2 = ({}_B\alpha_{w}{}_B)^3 = \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right]^3 = \begin{pmatrix} a^3-3ab^2 & -(3a^2b-b^3) \\ 3a^2b-b^3 & a^3-3ab^2 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 &= 2 \\ b^3 - 3a^2b &= 0 \end{cases}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind $a = -\sqrt[3]{2}, b = 0$, oder $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, b = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

(d) Die Matrix ist ${}_B\alpha_{\mathrm{i}}{}_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es liegt keine Spielgung vor.

Geometrisch bekommt man das Bild, indem man $\frac{\pi}{2}$ zum Argument addiert, also um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht.

Aufgabe H 22. *Einschränkung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$.

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\} \subseteqq \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie zwei Basen B und C von U.

(b) Weisen Sie nach, dass $f(U) \subseteqq U$ ist.

(c) Sei $g\colon U \to U\colon x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_Bg_B$ und ${}_Bg_C$.

(d) Ist g bijektiv?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da U eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist, ist die Dimension von U gleich 2. Die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$ sind in U. Dann sind $B : a, b$ und $C : a, c$ zwei Basen von U.

(b) Da B eine Basis von U ist, und

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a \in U,$$

$$f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a + b \in U,$$

gilt $f(U) \subseteqq U$.

(c) Nach Satz **3.8.6** gilt

$$\begin{aligned} {}_Bg_B &= \begin{pmatrix} {}_Bg\,(a) & {}_Bg\,(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_Bf\,(a) & {}_Bf\,(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_B(2a) & {}_B(a+b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da

$$f(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = a + c \in U,$$

Nach Satz **3.8.6** gilt

$$\begin{aligned} {}_Cg_C &= \begin{pmatrix} {}_Cg\,(a) & {}_Cg\,(c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_Cf\,(a) & {}_Cf\,(c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_C(2a) & {}_C(a+c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) **Injektiv:** Um die Injektivität zu zeigen, betrachten wir zwei Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ von U mit

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = g(y).$$

Zu zeigen $x = y$:
Wir bekommen das folgende Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_3 &= y_1 + y_3 \\ x_2 + x_3 &= y_2 + y_3 \\ x_1 + x_3 &= y_1 + y_3 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 \\ y_1 + y_2 &= 2y_3 \end{aligned} \right.$$

Folglich sind $x_i = y_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $x = y$. Deshalb ist g injektiv.

Surjektiv: Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ein Vektor von U. Um die Surjektivität zu zeigen, müssen wir ein Vektor x von U mit $g(x) = y$ finden. Deshalb finden wir die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{y_1+y_3-y_2}{2} \\ x_2 &= \frac{y_2+y_3-y_1}{2} \\ x_3 &= \frac{y_1+y_2-y_3}{2} \end{cases}$$

Da $y_1 + y_2 = 2y_3$, ist $x_1 + x_2 = 2x_3$ und x liegt in U. So ist g surjektiv.

Alternativ:

Injektiv: Eine linear Abbildung ist genau dann injektiv wenn ihr Kern gleich Null ist. Deshalb betrachten wir den Kern von g. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ein Vektor von U, welches im Kern von g liegt. Dann $g(x) = 0$, das heißt,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Folglich sind Dann haben wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 \end{cases}$$

Folglich ist $x = 0$ und g ist injektiv.

Surjektiv: Da U zwei dimension ist und $g(U) = f(U)$ die Vektoren $g(a) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g(b) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält, welche lineare unabhägig sind, ist die Dimension von $g(U)$ 2. Deshalb ist g surjektiv ($g(U)$ ist ein Untervektorraum von U).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 23. *Parameterabhängiges LGS*

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha \\ -2 & -\alpha & -4-\alpha \\ 1 & 2\alpha & 2+\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix},$$

die die lineare Abbildung $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto A_\alpha x$ beschreibt.

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Bild von φ_α und seine Dimension, sowie den Kern von φ_α und seine Dimension.

(c) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$, wobei

$$b_\alpha := (2+2\alpha, -2-\alpha, 1+3\alpha)^\intercal.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt dieses LGS

(i) genau eine Lösung? Bestimmen Sie diese.

(ii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(iii) keine Lösung?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Determinante von A_α berechnet sich z.B. mit der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det A_\alpha =& -2\alpha(2+\alpha+\alpha^2) - 2\alpha(4+\alpha) - 4\alpha(4+2\alpha) \\ & + \alpha(4+2\alpha) + 4\alpha(4+\alpha) + 4\alpha(2+\alpha+\alpha^2) \\ =& 2\alpha^2(\alpha-1) \end{aligned}$$

Ein alternatives Vorgehen ist folgendes: Man führe die ersten Schritte des Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_2+Z_1: \\ Z_3-\frac{1}{2}Z_1: \\ \\ \\ Z_3-Z_2: \end{array} \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha \\ -2 & -\alpha & -4-\alpha \\ 1 & 2\alpha & 2+\alpha+\alpha^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha \end{bmatrix} \end{array}$$

Dabei wurden nur Vielfache jeweils einer Zeile zu anderen Zeilen addiert. Die Determinante von A_α ändert sich dadurch nicht, siehe Lemma 3.12.1. Aus der sich ergebenden Dreiecksgestalt erhält man $\det(A_\alpha)$ direkt als Produkt der Hauptdiagonalelemente:

$$\det(A_\alpha) = 2\alpha^2(\alpha - 1).$$

Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass man nun den Rang ablesen kann: Die dritte Zeile wird zur Nullzeile für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$, die zweite Zeile wird zur Nullzeile für $\alpha = 0$, die erste Zeile ist für alle α keine Nullzeile. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(A_\alpha) &= 1 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, \\ \mathrm{Rg}(A_\alpha) &= 2 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \\ \mathrm{Rg}(A_\alpha) &= 3 \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \end{aligned}$$

(b) Das Bild von φ_α wird von den Spalten von A_α erzeugt, also ist

$$\dim(\mathrm{Bild}(A_\alpha)) = \mathrm{Rg}(A_\alpha).$$

Die Dimensionen von Bild und Kern von φ_α erhält man dann aus der Dimensionsformel 3.8.17:

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Bild}(A_\alpha)) &= 1, \quad \dim(\mathrm{Kern}(A_\alpha)) = 2 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, \\ \dim(\mathrm{Bild}(A_\alpha)) &= 2, \quad \dim(\mathrm{Kern}(A_\alpha)) = 1 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \\ \dim(\mathrm{Bild}(A_\alpha)) &= 3, \quad \dim(\mathrm{Kern}(A_\alpha)) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist also

$$\mathrm{Bild}(A_\alpha) = \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{Kern}(A_\alpha) = \{\mathbf{0}\}.$$

Für $\alpha = 0$ ist

$$\mathrm{Bild}(A_0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \quad \text{(der Aufspann der Spalten von } A_0\text{)}$$

Um den Kern zu bestimmen bringt man den Gauß-Algorithmus aus (a) zu Ende (mit $\alpha = 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und erhält

$$\mathrm{Kern}(A_0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Das gleiche Prozedere für $\alpha = 1$ liefert

$$\mathrm{Bild}(A_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Kern}(A_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Aus den bisherigen Ergebnissen ergibt sich direkt, dass das LGS für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ eindeutig lösbar ist. Um die weiteren Fragen zu beantworten und gegebenenfalls Lösungen zu bestimmen muss man noch ein bißchen arbeiten:
Nimmt man zum Gauß-Algorithmus aus (a) die rechte Seite b_α hinzu, so ergibt sich

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha & 2+2\alpha \\ -2 & -\alpha & -4-\alpha & -2-\alpha \\ 1 & 2\alpha & 2+\alpha+\alpha^2 & 1+3\alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 - \frac{1}{2}Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha & 2+2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 & 2\alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & 4+2\alpha & 2+2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}(Z_1 - 2Z_2) : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \end{array}\right],$$

und weiter

(i) für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{\alpha}Z_2 : \\ \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2Z_3 : \\ Z_2 - Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right].$$

Die eindeutige Lösung des LGS für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist also

$$x = \frac{1}{\alpha - 1}\begin{pmatrix} \alpha - 3 \\ \alpha - 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) für $\alpha = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS ist demnach $(1,0,0)^\intercal$, und die Lösungsmenge ergibt sich mit (b) zu

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) für $\alpha = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Es ensteht der Widerspruch $0 = 1$ in der dritten Zeile. Es gibt folglich keine Lösung in diesem Fall.

Aufgabe H 24. *einseitige Inverse*

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge $\left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid AX = \mathrm{E}_3 \right\}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid BX = \mathrm{E}_2 \right\}$.

(c) Bestimmen Sie die Menge $\left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid CX = \mathrm{E}_2 \right\}$.

(d) Welche der Matrizen A, B, C sind invertierbar?
Geben Sie, falls möglich, die Inverse an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Alle Lösungen des Gleichungssystems $AX = E_3$ zu bestimmen, entspricht gerade der Bestimmung aller Inversen von A. Nach Lemma 3.10.4 ist die Inverse eindeutig. Wir berechnen also

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Zur zweiten Zeile die erste addieren und von der dritten Zeile das doppelte der ersten abziehen liefert

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1. Anschließend addieren wir das doppelte der neu entstandenen dritten Zeile zur zweiten und ziehen das dreifache der dritten Zeile von der ersten ab.

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Nun noch das doppelte der zweiten Zeile zur ersten addieren und wir können A^{-1} ablesen.

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

(b) Wir suchen alle Rechtsinversen von B. Rechtsinverse von B existieren, da der Rang von B der Anzahl der Zeilen entspricht. Also lösen wir das Gleichungssystem $BX = E_2$ wie folgt:

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Das doppelte der ersten Zeile von der zweiten abziehen liefert

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Die zweite Zeile zur ersten addieren und anschließend die zweite Zeile mit -1 multiplizieren führt zu

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Hier können wir nun wie in Abschnitt 3.7 beschrieben die Lösungsmengen ablesen:

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Und die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \,\middle|\, BX = \mathrm{E}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1+t & 1+s \\ 2 & -1 \\ -t & -s \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) C hat keine Rechtsinversen, da der Rang von C kleiner ist als die Anzahl der Zeilen von C.

(d) Die Inverse von A haben wir oben berechnet. Da B nicht quadratisch ist, kann B nicht invertierbar sein. Da C nicht vollen Rang hat, ist C ebenfalls nicht invertierbar.

Aufgabe H 25. *Lineare Abbildung*

Sei F die Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung, auf welcher der Vektor $b = (1,1,1)^\intercal$ senkrecht steht. Sei $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene F.

(a) Bestimmen Sie eine Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass b_1 und b_2 in F enthalten sind und b_3 auf F senkrecht steht.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\sigma_B$.

(c) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$, wobei E: e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie ${}_E\sigma_E$ unter Verwendung von (b) und (c). Berechnen Sie $\left({}_E\sigma_E\right)^2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Möglichkeit für eine solche Basis wäre

$$B : b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um nachzuweisen, dass diese Vektoren tatsächlich eine Basis des Raums $\mathbb{R}^3$ bilden, können wir mit den bekannten Methoden entweder nachprüfen, dass die Vektoren linear unabhängig sind oder dass die Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden. Da der $\mathbb{R}^3$ dreidimensional ist, sind wir danach fertig.

Die Vorüberlegungen führen aber schneller zum Ziel: b_1 und b_2 liegen in der Ebene F und sind offensichtlich linear unabhängig. Da b_3 als Vektor senkrecht zur Ebene insbesondere nicht in der Ebene liegt, sind die drei Vektoren also insgesamt linear unabhängig.

(b) ${}_B\sigma_B$ kann man bestimmen, indem man feststellt, dass die Ebene selbst beim Spiegeln festgehalten wird und Vektoren, die senkrecht auf dieser stehen, beim Spiegeln gerade auf ihr Negatives abgebildet werden. Das heißt $b_1 \mapsto b_1$, $b_2 \mapsto b_2$ und $b_3 \mapsto -b_3$. Damit die Matrix

$${}_B\sigma_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Basiswechselmatrix ${}_E\mathrm{id}_B$ erhält man, indem man die Vektoren der Basis B der Reihe nach in die Matrix einträgt. Also ist ${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Basiswechselmatrix ${}_B\mathrm{id}_E$ erhält man, indem man die Basiswechselmatrix ${}_E\mathrm{id}_B$ invertiert. Also ist ${}_B\mathrm{id}_E = {}_E\mathrm{id}_B{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(d) Damit können wir ${}_E\sigma_E$ berechnen und erhalten:

$$ {}_E\mathrm{id}_B\, {}_B\sigma_B\, {}_B\mathrm{id}_E = {}_E\sigma_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} $$

Führt man eine Spiegelung zweimal hintereinander aus, so erhält man die identische Abbildung. Also ist ${}_E\sigma_E{}^2 = E_3$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ unter f.

(c) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu f.

(d) Existiert eine affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}?$$

Wie kann die Antwort allein mit der Geradentreue begründet werden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir suchen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und einen Vektor $t = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a + b + e &= 6 \\
c + d + f &= 2 \\
-2a + 5b + e &= 1 \\
-2c + 5d + f &= -4 \\
3a + b + e &= 12 \\
3c + d + f &= 6
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen

$$\begin{aligned}
a &= 3 \\
b &= 1 \\
c &= 2 \\
d &= 0 \\
e &= 2 \\
f &= 0\,.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Abbildung ist also

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Die beiden Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben die Bilder $f(P_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist das Bild der Geraden die Verbindungsgerade $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(c) Die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Damit ist die inverse Abbildung

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

oder

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(d) Die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ liegen auf der Geraden $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$. Nach Satz 4.6.3 liegen die Bilder dieser drei Punkte unter jeder affinen Abbildung auf einer Geraden. Allerdings liegen die Punkte $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ nicht auf einer Geraden.

Aufgabe H 27. *Determinanten und lineare Abbildungen*

Gegeben sei die Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_4 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Begründen Sie, dass s eine lineare Abbildung ist. Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_E s_E$ an. Bestimmen Sie Kern und Bild von s. Ist s injektiv? Ist s surjektiv?

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 .$$

Die Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4$$

ist linear, denn

- $$s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = -(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)-2(x_4+y_4) = s\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

- $$s\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = -\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - 2\alpha x_4 = \alpha s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung ${}_E s_E$ liefert Satz 3.6.8:

$$\begin{aligned} {}_E s_E &= \left(s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Rang dieser Matrix ist 1. Das Bild der linearen Abbildung ist also ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}$. Damit gilt $\mathrm{Bild}(s) = \mathbb{R}$. Der Kern von s besteht aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, die die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ erfüllen. Das ist die Menge

$$\left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $\mathrm{Bild}(s) = \mathbb{R}$ gilt, ist die Abbildung surjektiv. Da der Kern von s nicht nur aus dem Nullvektor besteht, ist s nicht injektiv.

Aufgabe H 28. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1, 0, -1)^\intercal$, $v_2 = (1, 1, -1)^\intercal$ und $v_3 = (-1, 3, -2)^\intercal$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal? Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ eigentlich orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\mathrm{id}_F$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Orthonormalbasis besteht aus paarweise orthogonalen normierten Vektoren. Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ zu erfüllen muss v_1 normiert werden. Es gilt

$$|v_1| = \sqrt{\langle v_1 \,|\, v_1 \rangle} = \sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad f_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ zu erfüllen wird der Vektor v_2 mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren so zu f_2 abgewandelt:

$$\begin{aligned} f_2^* &= v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ - \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $|f_2^*| = 1$ ist $f_2 = f_2^*$. Es gilt $f_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ und damit auch

$$f_2 = f_2^* = v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2 \,|\, f_1 \rangle}{|v_1|}}_{\in \mathbb{R}} v_1.$$

Also ist $f_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Außerdem gilt $f_1 \in \mathrm{L}(v_1) \subseteqq \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Da f_1 und f_2 linear unabhängig sind (nach Konstruktion bilden sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}(v_1, v_2)$), ist die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(f_1, f_2)$ also erfüllt.

Da $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ ist bedeutet die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$ gerade, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis bilden sollen, dies wird durch das Schmidtverfahren gewährleistet. Man erhält

$$\begin{aligned}
f_3^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, f_1 \rangle \, f_1 - \langle v_3 \,|\, f_2 \rangle \, f_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_3| = \sqrt{\langle f_3^* \,|\, f_3^* \rangle} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad f_3 = \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man also

$$F: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie in Aufgabenteil **(a)** gesehen, bedeuten die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerade, dass das Schmidtverfahren angewendet werden muss auf die Basis v_1, v_2, v_3. Entsprechend bedeuten die Bedingungen $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerade, dass das Schmidtverfahren auf die Basis v_1, v_3, v_2 angewendet werden muss, das heißt die Rollen von v_2 und v_3 sind gerade vertauscht. Überall wo in Aufgabenteil **(a)** v_2 verwendet wurde muss nun v_3 verwendet werden und umgekehrt. Nun ist

$$g_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schritt unterscheidet sich nun vom zweiten Schritt Aufgabenteil **(a)**:

$$\begin{aligned}
g_2^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, g_1 \rangle \, g_1 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Und daraus erhält man

$$|g_2^*| = \sqrt{\langle g_2^* \,|\, g_2^* \rangle} = \frac{3}{2}\sqrt{6} \quad \text{und damit} \quad g_2 = \frac{g_2^*}{|g_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt g_3 zu bestimmen:

$$\begin{aligned} g_3^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, g_1 \rangle\, g_1 - \langle v_3 \,|\, g_2 \rangle\, g_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|g_3^*| = \sqrt{\langle g_2^* \,|\, g_2^* \rangle} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{und damit} \quad g_3 = \frac{g_3^*}{|g_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man also

$$G: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zuerst muss ${}_F\mathrm{id}_G$ bestimmt werden. Gut bestimmen lassen sich ${}_E\mathrm{id}_F$ und ${}_E\mathrm{id}_G$, da hier einfach die Basisvektoren in die Spalten einzutragen sind. Man erhält

$${}_E\mathrm{id}_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$${}_E\mathrm{id}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.10.11 gilt

$${}_F\mathrm{id}_G = {}_F\mathrm{id}_E \cdot {}_E\mathrm{id}_G = ({}_E\mathrm{id}_F)^{-1} \cdot {}_E\mathrm{id}_G$$

Eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden, ist nach Satz 4.5.4 orthogonal, also ist ${}_E\mathrm{id}_F$ orthogonal und es gilt $({}_E\mathrm{id}_F)^{-1} = ({}_E\mathrm{id}_F)^\intercal$. Also gilt

$$\begin{aligned}
{}_F\mathrm{id}_G &= ({}_E\mathrm{id}_F)^\intercal \cdot {}_E\mathrm{id}_G \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Spalten der Matrix ${}_F\mathrm{id}_G$ bilden eine Orthonormalbasis (wie man durch nachrechnen sieht), also ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal. Man könnte auch argumentieren das ${}_F\mathrm{id}_G$ ein Produkt orthogonaler Matrizen ist und daher auch orthogonal ist.

Um zu bestimmen ob ${}_F\mathrm{id}_G$ eigentlich orthogonal ist muss die Determinante berechnet werden. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det({}_F\mathrm{id}_G) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1.$$

Es handelt sich bei ${}_F\mathrm{id}_G$ also um eine uneigentlich orthogonale Matrix.

Nun ist nur noch ${}_G\mathrm{id}_F$ zu bestimmen. Nach Satz 3.10.11 gilt

$${}_G\mathrm{id}_F = ({}_F\mathrm{id}_G)^{-1} \overset{{}_F\mathrm{id}_G \text{ ist orthogonal}}{=} ({}_F\mathrm{id}_G)^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 29. *Determinanten*

Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\det(A)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A)$. Bestimmen Sie $\det(A + A^\intercal)$. Bestimmen Sie $\det(A - A^\intercal)$. Wie kann man im letzten Fall eine Rechnung vermeiden?

Lösungshinweise hierzu: Die Determinante ändert sich nicht wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer Anderen addiert. Addiert man also -3 mal die erste Zeile zur zweiten so erhält man

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 1 & 15 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhält man

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} -6 & 1 & 15 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der dritten Spalte erhält man

$$\begin{aligned}\det(A) &= -\left(15\det\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}\right) \\ &= -15\det\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -15(6+15+18+9+6-30) + 4(36+3+12+6+36-6) \\ &= -15 \cdot 24 + 4 \cdot 87 = -360 + 348 = -12\end{aligned}$$

Da die Determinante von A von 0 verschieden ist, ergibt sich der Rang als die Anzahl der spalten der Matrix A, also $\mathrm{Rg}(A) = 5$.
Als nächstes ist $\det(A + A^\mathsf{T})$ zu bestimmen. Dabei ist

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 10 & 3 & 9 \\ -4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $\det(A + A^\mathsf{T}) = -850$.

Nun bleibt noch $\det(A - A^\mathsf{T})$ ohne Rechnung zu bestimmen. Dabei erfüllt $B := A - A^\mathsf{T}$ die Identität $B^\mathsf{T} = -B$, denn es gilt

$$B^\mathsf{T} = (A - A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} - A = -(A - A^\mathsf{T}) = -B.$$

Daher gilt

$$\det(B) = \det(B^\mathsf{T}) = \det(-B) = (-1)^5 \det(B) = -\det(B)$$

und wir erhalten $\det(B) = 0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 30. *Koordinatentransformation*

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P\,; \overrightarrow{PQ_1}\,, \overrightarrow{PQ_2}\,, \overrightarrow{PQ_3})$ und das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.

(a) Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

(b) Bestimmen Sie die $\mathbb{F}$-Koordinaten der Punkte

$$R_1 = (0, 5, 2)^\intercal, \quad R_2 = (-3, 4, -3)^\intercal, \quad R_3 = (-1, 1, -2)^\intercal.$$

(c) Mit den Bezeichnungen aus (b) gelte für die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\alpha(P) = P\,, \quad \alpha(Q_1) = R_1\,, \quad \alpha(Q_2) = R_2\,, \quad \alpha(Q_3) = R_3\,.$$

Bestimmen Sie sowohl die Darstellung von α bezüglich $\mathbb{F}$ als auch die bezüglich $\mathbb{E}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bezeichne die Basisvektoren von $\mathbb{F}$ mit f_1, f_2, f_3, d.h.

$$f_1 = \overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ ergibt sich nach 4.7.6. durch ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$, wobei die Spalten der Matrix F durch die Vektoren f_1, f_2, f_3 gegeben sind. Also

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ ist die Umkehrabbildung von ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$. Zunächst ist

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}\,(v - P) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Die $\mathbb{F}$-Koordinaten der Punkte R_1, R_2, R_3 erhält man z.B. mit Hilfe von ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}R_1 &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}R_1\right) = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{F}}R_2 &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{F}}R_3 &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) Gesucht sind Matrizen A und B sowie Vektoren t und s mit

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}X) &= {}_{\mathbb{F}}(\alpha(X)) = A\,{}_{\mathbb{F}}X + t, \\
{}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}X) &= {}_{\mathbb{E}}(\alpha(X)) = B\,{}_{\mathbb{E}}X + s.
\end{aligned}
$$

Es sind also jeweils 12 Unbekannte zu bestimmen. Die Bedingungen dazu sind in der Aufgabenstellung gegeben, nämlich

$$\alpha(P) = P\,, \quad \text{also in } \mathbb{F}\text{-Koordinaten:} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t = {}_{\mathbb{F}}\alpha(P) = {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(Q_1) = R_1\,, \quad \text{also in } \mathbb{F}\text{-Koordinaten:} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t = {}_{\mathbb{F}}\alpha(Q_1) = {}_{\mathbb{F}}R_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(Q_2) = R_2\,, \quad \text{also in } \mathbb{F}\text{-Koordinaten:} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t = {}_{\mathbb{F}}\alpha(Q_2) = {}_{\mathbb{F}}R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(Q_3) = R_3\,, \quad \text{also in } \mathbb{F}\text{-Koordinaten:} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t = {}_{\mathbb{F}}\alpha(Q_3) = {}_{\mathbb{F}}R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$
{}_{\mathbb{F}}(\alpha(X)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

Die $\mathbb{E}$-Darstellung von α kann man aus der $\mathbb{F}$-Darstellung mit Hilfe von

$$
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P
$$

und

$$ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v-P) $$

berechnen:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}X) &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}X) \\ &= F\left(A\left(F^{-1}{}_{\mathbb{E}}X - F^{-1}P\right) + t\right) + P \\ &= FAF^{-1}{}_{\mathbb{E}}X - FAF^{-1}P + Ft + P, \end{aligned} $$

also

$$ \begin{aligned} B = FAF^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 4 & -8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 22 & 7 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

und (beachte $t = 0$)

$$ s = -FAF^{-1}P + Ft + P = -\begin{pmatrix} 15 & 4 & -8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 22 & 7 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}. $$

Zusammengefasst ist die Darstellung von α bzgl. $\mathbb{E}$:

$$ {}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}X) = {}_{\mathbb{E}}\big(\alpha({}_{\mathbb{E}}X)\big) = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -8 \\ -4 & 1 & 2 \\ 22 & 7 & -12 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}X + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}. $$

Aufgabe H 31. *Drehungen und Spiegelungen*
Die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$ A_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \alpha & \alpha \\ \sqrt{2} & \alpha & \alpha \end{pmatrix} $$

definiert eine lineare Abbildung durch $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto A_\alpha\, x$.

(a) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, für das A_α eigentlich orthogonal ist. In diesem Fall beschreibt φ_α eine Drehung. Berechnen Sie die Drehachse und den Drehwinkel.

(b) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, für das A_α uneigentlich orthogonal ist. In diesem Fall beschreibt φ_α eine Drehspiegelung. Finden Sie eine Spiegelung σ und eine Drehung δ so, dass $\varphi_\alpha = \delta \circ \sigma$ ist.

Lösungshinweise hierzu: Nach Lemma 4.6.8. ist die Determinante einer orthogonalen Matrix gleich 1 oder gleich -1 (Achtung: es gibt auch nicht-orthogonale Matrizen mit Determinante 1 oder -1). Für A_α gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\det(A_\alpha) = \frac{1}{2^3}\,(0 + 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha - 0) = \alpha.$$

(a) Um $\det(A_\alpha) = 1$ zu erfüllen, ist $\alpha = 1$ die einzige Möglichkeit. Berechne

$$A_1^\intercal A_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist A_1 eigentlich orthogonal und φ_1 beschreibt eine Drehung. Bezeichne den Drehwinkel mit γ. Dann gilt nach 4.6.20. $\mathrm{Sp}(A_1) = 2\cos(\gamma) + 1$, und somit

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\mathrm{Sp}(A_1) - 1}{2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \text{(je nach Drehrichtung).}$$

Die Drehachse ist die Lösungsmenge der Fixpunktgleichung

$$A_1 x = x \quad \Leftrightarrow \quad (A_1 - E)\,x = 0.$$

Dies ist ein homogenes LGS mit Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

der gesuchten Drehachse.

(b) Um $\det(A_\alpha) = -1$ zu erfüllen, ist $\alpha = -1$ die einzige Möglichkeit. Berechne

$$A_{-1}^\intercal A_{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist A_{-1} uneigentlich orthogonal und φ_{-1} beschreibt eine Drehspiegelung. Nach 4.6.16. lässt diese sich aus einer Drehung δ und einer Spiegelung σ zusammensetzen, wobei die Spiegelebene von σ sich nach 4.6.17. frei wählen lässt (durch den Ursprung). Wähle also z.B.

$$\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

die Spiegelung an der x_1-x_2–Ebene. Gesucht wird nun eine Drehung

$$\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto Bx,$$

dargestellt durch die Matrix B, mit $\varphi_{-1} = \delta \circ \sigma$. Letztere Gleichung impliziert nach 3.8.12. für die beschreibenden Matrizen

$$A_{-1} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat gilt $B^\intercal B = E$ und $\det(B) = 1$, δ beschreibt also eine Drehung.

Aufgabe H 32. *Drehungen und Spiegelungen*

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_1-Achse, die $(0,1,0)^\intercal$ auf $(0,0,1)^\intercal$ abbildet.
Sei $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_2-Achse, die $(1,0,0)^\intercal$ auf $(0,0,1)^\intercal$ abbildet.
Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\beta \circ \alpha$. Liegt eine Drehung vor? Falls ja, bestimmen Sie Drehachse und -winkel.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\alpha \circ \beta$. Liegt eine Drehung vor? Falls ja, bestimmen Sie Drehachse und -winkel.

(c) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\alpha \circ \gamma$. Liegt eine uneigentliche Isometrie vor? Liegt eine Spiegelung vor? Falls ja, bestimmen Sie die Spiegelebene.

(d) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von $\beta \circ \alpha \circ \gamma$. Liegt eine uneigentliche Isometrie vor? Liegt eine Spiegelung vor? Falls ja, bestimmen Sie die Spiegelebene.

Lösungshinweise hierzu: Die Abbildungen lassen sich wie folgt durch Matrizen darstellen:

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

(a) Die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen α und β kann nun mit Hilfe der Matrizen geschrieben werden

$$\beta \circ \alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Um die Fixpunktmenge von $\beta\circ\alpha$ zu bestimmen, muss die Gleichung $\beta\circ\alpha(x) = x$ gelöst werden. Dies entspricht aber genau der Suche nach dem Eigenraum zum Eigenwert 1 von oben genannter Matrix. Durch Rechnung erhalten wir

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

als Fixpunktmenge. Als Komposition von orthogonalen Abbildungen ist $\beta \circ \alpha$ selbst wieder eine orthogonale Abbildung. Die Determinante der Abbildungsmatrix ist 1, also liegt eine eigentliche Isometrie und damit eine Drehung vor. Drehachse ist die oben berechnete Fixpunktmenge. Da die Spur der darstellenden Matrix 0 ist, gilt für den Drehwinkel φ, dass $\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$ ist. Diese Gleichung ist nicht eindeutig lösbar, aber gemäß der in der Vorlesung getroffenen Vereinbarung, bezeichnen wir die Lösung $\varphi = \frac{\pi}{3}$ als den Drehwinkel.

(b) Die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen β und α kann ebenfalls mit Hilfe der Matrizen geschrieben werden

$$\alpha \circ \beta \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Ansonsten gehen wir vor wie im ersten Aufgabenteil und erhalten

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

als die Fixpunktmenge bzw. Drehachse, sowie den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ als den Drehwinkel.

(c) Die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen γ und α kann ebenfalls mit Hilfe der Matrizen geschrieben werden

$$\alpha \circ \gamma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Um die Fixpunktmenge zu bestimmen von gehen wir vor wie oben und erhalten

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

als Fixpunktmenge. Als Komposition von orthogonalen Abbildungen ist $\alpha \circ \beta$ selbst wieder eine orthogonale Abbildung. Die Determinante der Abbildungsmatrix ist -1, also liegt eine uneigentliche Isometrie und damit eine Drehspiegelung vor. Die Fixpunktmenge ist eine Ebene, deren Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf sein negatives abgebildet wird. Also liegt eine Ebenenspiegelung an der Fixpunktmenge vor.

(d) Die Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen γ, α und β kann ebenfalls mit Hilfe der Matrizen geschrieben werden

$$\beta \circ \alpha \circ \gamma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Als Fixpunktmenge erhalten wir hier

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da bei einer Spiegelung die Spiegelebene gerade die Fixpunktmenge ist, kann also keine Spiegelung vorliegen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Diagonalisieren*

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^{-1}AT = D$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^\intercal A\,T = D$.

Gibt es ein $x \in \mathbb{R}^4$ mit $x^\intercal A\,x < 0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda^2+1)\,.$$

Die Eigenwerte sind also 0, i und $-\mathrm{i}$. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0\,.$$

Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Lösungsraums. Der Eigenraum zum Eigenwert i besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1-\mathrm{i} & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} v = 0\,.$$

Der Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildet eine Basis des Lösungsraums. Da die Matrix nur relle Einträge besitzt, erhalten wir eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert $-\mathrm{i}$ durch komplexes konjugieren:

$$v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Durch Raten erhalten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 5$. Der Eigenraum besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 .$$

Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilden eine Basis des Eigenraums. Da wir eine orthogonale Transformationsmatrix suchen, wenden wir das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren an und erhalten die orthonormierten Eigenvektoren

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Da die Matrix die Spur 16 hat und die Summme der Eigenwerte die Spur ergeben muss, muss die Matrix den Eigenwert 1 besitzen. Der Eigenraum zum Eigenwert 1

besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} v = 0\,.$$

Der Vektor $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis des Eigenraums. Normieren ergibt den Vektor $w_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ mit $x^\intercal A\,x < 0$ existiert nicht, da alle Eigenwerte positiv sind und die quadratische Form daher nach Lemma 6.1.8 positiv definit ist.

Aufgabe H 34. *Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A_4 .

(b) Berechnen Sie für jedes α die Eigenwerte von A_α , sowie deren jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Für welche α ist A_α diagonalisierbar? Bestimmen Sie ein α, für welches A_α orthogonal diagonalisierbar ist.

(d) Bestimmen Sie die Menge aller α, für die $\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_α ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 6\lambda - 7$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -1$. Die Eigenräume sind die Lösungsmengen der Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} v = 0 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} v = 0\,.$$

Die Eigenräume sind somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Die Eigenwerte von A_α sind $\lambda_1 = 3 + \sqrt{4+3\alpha}$ und $\lambda_2 = 3 - \sqrt{4+3\alpha}$.

- Fall 1: $\alpha \neq -\frac{4}{3}$. Für $\alpha \neq -\frac{4}{3}$ gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und daher $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = 1$. Damit gilt auch $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = 1$.
- Fall 2: $\alpha = -\frac{4}{3}$. In diesem Fall ist 3 der einzige Eigenwert und es gilt $e_3 = 2$. Der Eigenraum ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{4}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Dieser Lösungsraum ist eindimensional, da der Rang der beschreibenden Matrix 1 ist. Also ist $d_3 = 1$.

(c) Falls $\alpha \neq -\frac{4}{3}$ gilt, ist die Matrix nach Lemma 5.3.2 diagonalisierbar. Falls $\alpha = -\frac{4}{3}$ gilt, ist die Matrix nicht diagonalisierbar, da die geometrische und algebraische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts nicht übereinstimmen. Also ist A_α für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ diagonalisierbar. Für $\alpha = 3$ ist die Matrix symmetrisch und nach Satz $5.4.2$ orthogonal diagonalisierbar.

(d) Damit der Vektor $\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, muss es eine Zahl λ geben, so dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i}+2\alpha \\ 7+9\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten $\lambda = \frac{7}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -1+3\mathrm{i}+2\alpha &= \left(\frac{7}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i}\right)(-1+3\mathrm{i}) \\ 2\alpha &= -16+3\mathrm{i} \\ \alpha &= -8 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha = -8 + \frac{3}{2}\mathrm{i}$ die einzige komplexe Zahl für die $\begin{pmatrix} -1+3\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_α ist. Insbesondere gibt es also keine reelle Zahl α, für die dies der Fall ist.

Aufgabe H 35. *Eigenräume*

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A, die

- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((1,1,1)^\intercal\right)$ zum Eigenwert 1,
- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((1,0,1)^\intercal\right)$ zum Eigenwert 2 und
- den Eigenraum $\mathrm{L}\left((-1,1,0)^\intercal\right)$ zum Eigenwert -1

besitzt.

(b) Gibt es eine reelle symmetrische Matrix mit den in (a) genannten Eigenschaften?

(c) Geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $A = TDT^{-1}$ an. Bestimmen Sie D^k und A^k für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Gibt es eine Matrix mit einem Eigenwert λ, für welchen $d_\lambda = 2$ und $e_\lambda = 3$ ist?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis B des $\mathbb{R}^3$. Also gilt

$$_Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad _Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad _Bv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis B, die $\mathrm{L}\left(_Bv_1\right)$ als Eigenraum zum Eigenwert 1, $\mathrm{L}\left(_Bv_2\right)$ als Eigenraum zum Eigenwert 2 und $\mathrm{L}\left(_Bv_3\right)$ als Eigenraum zum Eigenwert -1 hat.

Also ist $_E\varphi_E$ die gesuchte Matrix. Diese erhält man durch

$$_E\varphi_E = {_E\mathrm{id}_B} \cdot {_B\varphi_B} \cdot {_B\mathrm{id}_E}.$$

Direkt ablesen kann man

$$_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch bestimmung der Inversen von $_E\mathrm{id}_B$ erhält man

$$_B\mathrm{id}_E = \left(_E\mathrm{id}_B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt berechnet man also

$$A := {}_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\varphi_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Nach Lemma 5.4.5 gilt für symmetrische Matrizen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. Gäbe es also eine Symmetrische Matrix mit den gesuchten eigenschaften, dann müsste insbesondere auch v_1 orthogonal zu v_2 sein. Dies trifft jedoch nicht zu. Also kann es *keine* symmetrische Matrix mit den geforderten Eigenschaften geben.

(c) Mit den Bezeichnungen von Aufgabenteil (a) ergibt sich

$$T = {}_B\mathrm{id}_E \qquad \text{und} \qquad D := {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

denn es gilt ja

$$TAT^{-1} = {}_B\mathrm{id}_E \cdot {}_E\varphi_E \cdot ({}_B\mathrm{id}_E)^{-1} = {}_B\mathrm{id}_E \cdot {}_E\varphi_E \cdot {}_E\mathrm{id}_B = {}_B\varphi_B = D.$$

Für die Matrix A lässt sich nur extrem mühsam A^k ausrechnen, selbst wenn k nur kleine Werte hat. Für die Matrix D lässt sich dagegen D^k sehr schnell für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ bestimmen:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist

$$(*) \qquad A^k = TD^kT^{-1}.$$

Dies lässt sich durch Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$ begründen:

IA $TD^0T^{-1} = TE_3T^{-1} = E_3 = A^0$✓

IV $A^n = TD^nT^{-1}$

IS z.Z.: $A^{n+1} = TD^{n+1}T^{-1}$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{IH}}{=} TD^nT^{-1}A = TD^nT^{-1}TDT^{-1} = TD^{n+1}T^{-1}.✓$$

Für negative Exponenten $k = -n$ ergibt sich Formel $(*)$ aus dem eben berechneten durch

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (TD^nT^{-1})^{-1} = TD^{-n}T^{-1},$$

womit Formel $(*)$ überprüft ist. Insgesamt erhält man also unter Ausnutzung der Formel $(*)$ die Matrix

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 - 2^k + (-1)^k & 1 - 2^k & -1 + 2^{k+1} + (-1)^{k+1} \\ 1 + (-1)^{k+1} & 1 & -1 + (-1)^k \\ 1 - 2^k & 1 - 2^k & -1 + 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

(d) Es gibt eine solche Matrix. Zum Beispiel

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist eine solche. Da es sich bei B um eine obere Dreiecksmatrix handelt stehen die Eigenwerte von B auf der Diagonalen. Also hat B einen dreifachen Eigenwert λ, also $e_\lambda = 3$. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist der Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese hat nach dem Gauss-Algorithmus 2-dimensionalen Kern, also ist $d_\lambda = 2$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{18}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{18}x_3^2 + \frac{1}{9}x_1x_3 + \frac{\sqrt{2}}{3}x_1 + 4x_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Skizzieren Sie $\mathcal{Q}$ und $\mathbb{F}$ in das Ausgangskoordinatensystem $\mathbb{E}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus der Matrixbeschreibung $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}, \qquad c = 4$$

ergibt sich

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{\sqrt{2}}{6} & 2 & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Da $\mathrm{Rg}(A) = 2$ und $\mathrm{Rg}(A_{\text{erw}}) = 3$ ist, liegt eine Mittelpunkstquadrik vor.

(b) Die Eigenwerte von A sind

$$\lambda_1 = \frac{1}{9}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als Transformationsmatrix erhält man

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Neuer Linearteil: $\tilde{a} = T^\intercal a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$. Die Ausgangsgleichung $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ wird nach der Transformation zu

$$\frac{1}{9}y_1^2 + y_2^2 + \frac{2}{3}y_1 + 4y_2 + 4 = \frac{1}{9}(y_1+3)^2 + (y_2+2) - 1 = 0.$$

Mit $z_1 = y_1 + 3$, $z_2 = y_2 + 2$ und $z_3 = y_3$ erhalten wir die Gleichung

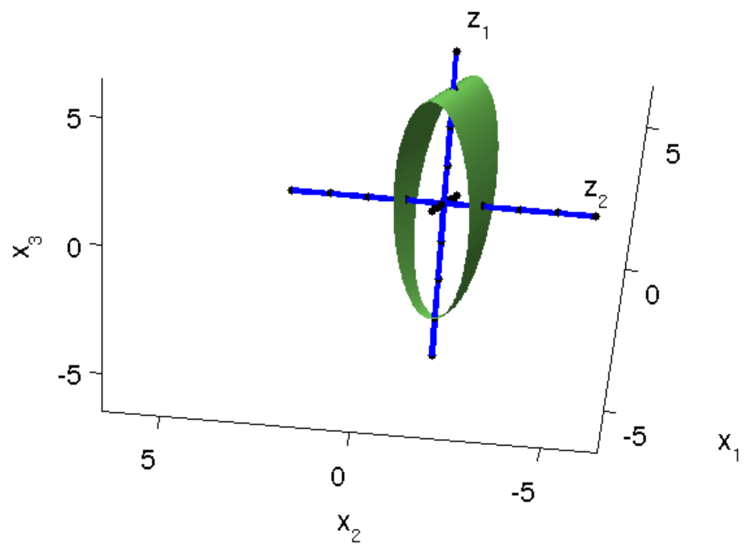
$$\frac{1}{9}z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0.$$

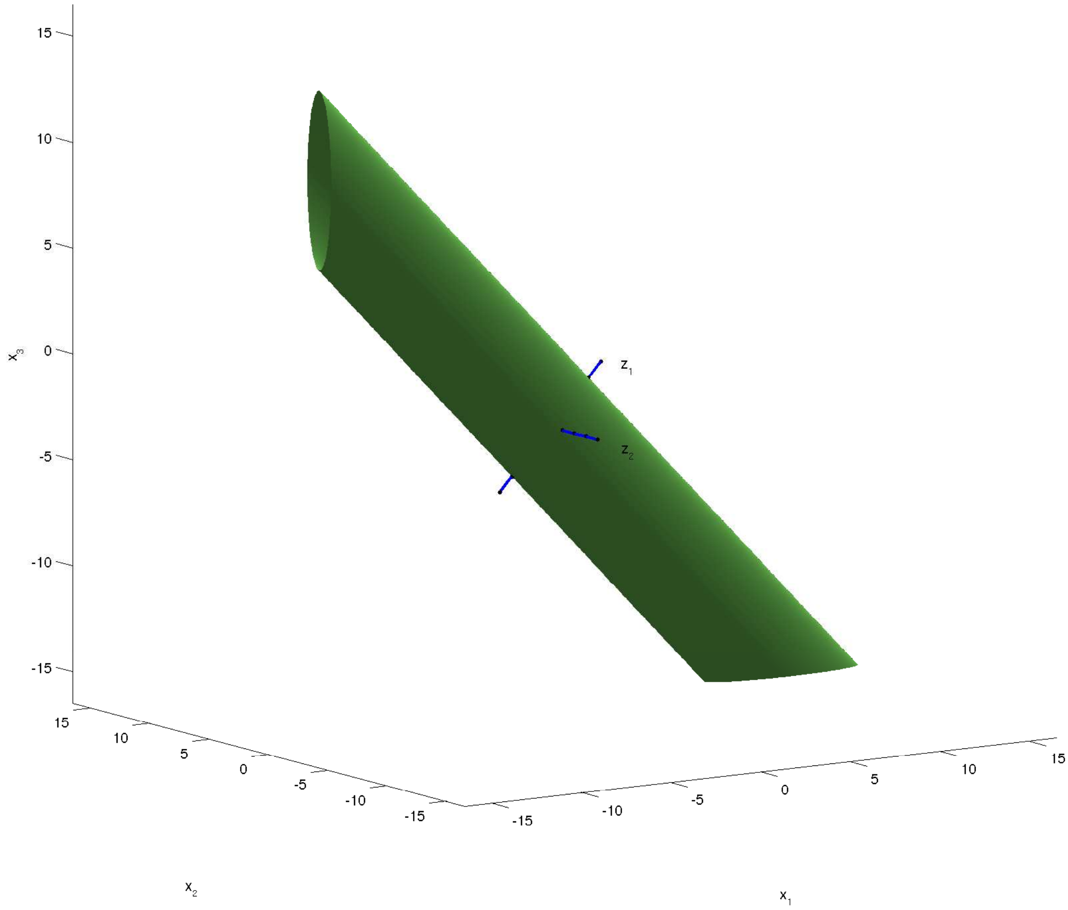
Diese Gleichung beschreibt (entgegen einer weit verbreiteten Fehlinterpretation) *keine Ellipse*, weil die Variable z_3 völlig frei gewählt werden kann. Es liegt ein elliptischer *Zylinder* vor. (Dass es die Variable z_3 überhaupt gibt, muss man aus dem Kontext erschließen, die Gleichung allein reicht dafür nicht.)

(c) Damit ist ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ euklidische Normalform hat, gegeben als

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ -2 \\ \frac{-3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Die folgenden Graphiken wurden mit Matlab erstellt:





Aufgabe H 37. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1\,, x_2\,, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus der Matrixbeschreibung $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad c = 1$$

ergibt sich

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{Rg}(A) = 2$ und $\operatorname{Rg}(A_{\text{erw}}) = 4$ liegt eine parabolische Quadrik vor.

(b) Da das A in der Ausgangsgleichung bereits Diagonalgestalt hat, können wir den ersten Schritt der Hauptachsentransformation überspringen. Die Ausgangsgleichung wird durch quadratisches Ergänzen zu

$$x_1^2 + 2(x_2+1)^2 + 3x_3 - 1 = 0.$$

Mit $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 1$ und $y_3 = x_3$ erhalten wir die Gleichung

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3 - 1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 3(y_3 - \frac{1}{3}) = 0.$$

Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$ und $z_3 = y_3 - \frac{1}{3}$ erhalten wir die Gleichung

$$z_1^2 + 2z_2^2 + 3z_3 = 0,$$

welche nach Normierung die Gleichung

$$\frac{2}{3}z_1^2 + \frac{4}{3}z_2^2 + 2z_3 = 0$$

eines elliptischen Paraboloids ergibt.

(c) Damit ist ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ euklidische Normalform hat, gegeben als

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Damit erhalten wir

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon x \mapsto x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon x \mapsto x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \mid -4x_3^2 + 2x_1x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

(a) Betrachten Sie die ebenen Schnitte der Quadrik mit den Koordinatenebenen $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, sowie mit den Ebenen $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = 1$. Geben Sie jeweils eine euklidische Normalform der Schnittquadrik an und bestimmen Sie deren Gestalt. Skizzieren Sie die Schnitte.

(b) Sei $b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^\intercal$ und $b_2 := (0,0,1)^\intercal$. Sei $E := \mathrm{L}(b_1\,,\,b_2)$.
Beschreiben Sie die Quadrik $\mathcal{Q} \cap E$ bezüglich des Koordinatensystems $(0\,;\,b_1\,,\,b_2)$ in E. Skizzieren Sie $\mathcal{Q} \cap E$.
Hinweis: Einsetzen von $x = s_1 b_1 + s_2 b_2$ in die Gleichung von $\mathcal{Q}$, wobei $(s_1\,,\,s_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $\mathcal{Q}$ und geben Sie an, welche Gestalt sie hat. Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese euklidische Normalform hat.

(d) Skizzieren Sie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem (per Hand oder mit Hilfe geeigneter Software). Heben Sie in Ihrer Skizze außerdem
- die Schnitte aus (a) und (b),
- das Koordinatensystem $\mathbb{F}$

hervor.

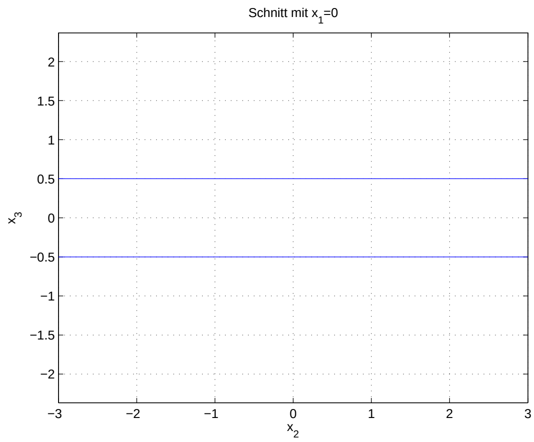
Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Quadrik $\mathcal{Q}$ wird der Reihe nach mit den gegebenen Ebenen geschnitten:

$\underline{x_1 = 0:}$
Setze $x_1 = 0$ in die Quadrikgleichung ein:

$$-4x_3^2 + 1 = 0.$$

Dies ist bereits eine euklidische Normalform, es handelt sich um ein paralleles Geradenpaar.
Skizze in der x_2-x_3–Ebene:



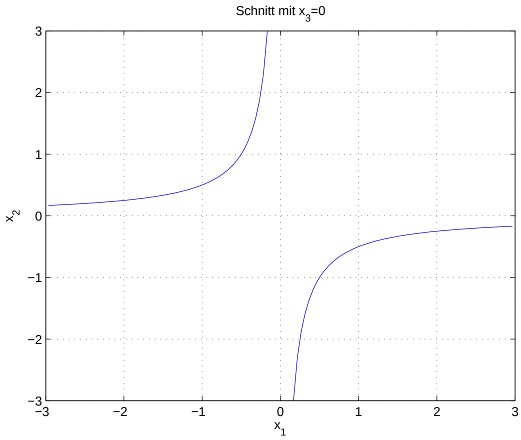
$\underline{x_3 = 0:}$
Setze $x_3 = 0$ in die Quadrikgleichung ein:

$$2x_1x_2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Durch Umstellen der Gleichung

$$x_2 = \frac{-1}{2x_1}$$

erkennt man, dass es sich um folgende Hyperbel handelt:



Allerdings ist Gleichung (1) nicht in euklidischer Normalform. Betrachte dazu die zugehörige Matrixbeschreibung

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind 1 und -1. Eine quadratische Ergänzung ist nicht nötig, da der lineare Teil verschwindet. Eine euklidische Normalform ist also:

$$z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0.$$

Bemerkung: Aus dieser euklidischen Normalform kann man die Asymptoten der Hyperbel bestimmen. Diese sind durch die Gleichung

$$z_1^2 - z_2^2 = 0$$

gegeben. Dabei handelt es sich in der Tat um die x-Koordinatenachsen, wie es das obige Bild andeutet.

$\underline{x_2 = \frac{1}{2}:}$

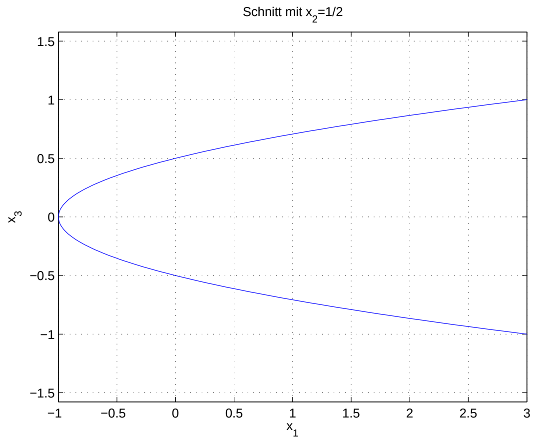
Setze $x_2 = \frac{1}{2}$ in die Quadrikgleichung ein:

$$-4x_3^2 + x_1 + 1 = 0. \tag{2}$$

Dies ist die Parabel

$$x_1 = 4x_3^2 - 1,$$

mit der Skizze



Eine euklidische Normalform erhält man wie folgt: Setze $z_2 = x_1 + 1$ und $z_1 = x_3$ in Gleichung (2):

$$-4z_1^2 + z_2 = 0.$$

Multipliziere diese Gleichung mit 2, so ergibt sich eine euklidische Normalform:

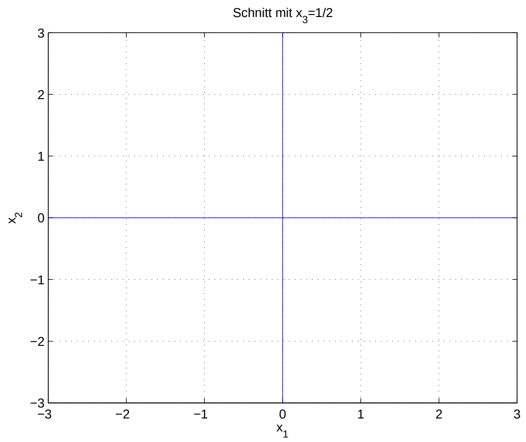
$$-8z_1^2 + 2z_2 = 0.$$

$\underline{x_3 = \frac{1}{2}:}$

Setze $x_3 = \frac{1}{2}$ in die Quadrikgleichung ein:

$$2x_1x_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, falls $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ ist. Als Skizze erhält man die x_1- und die x_2-Achse:



Zur euklidischen Normalform: Die zugehörige Matrixbeschreibung ist

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Es ergibt sich

$$z_1^2 - z_2^2 = 0.$$

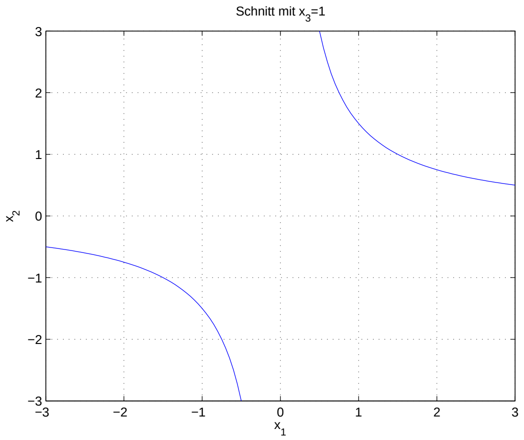
(Vergleiche den Fall $x_3 = 0$.) Es handelt sich um ein schneidendes Geradenpaar.
$\underline{x_3 = 1:}$
Setze $x_3 = 1$ in die Quadrikgleichung ein:

$$2x_1x_2 - 3 = 0.$$

Umstellen der Gleichung ergibt die Hyperbel

$$x_2 = \frac{3}{2x_1}$$

mit der Skizze



Eine euklidische Normalform ergibt sich analog zum Fall $x_3 = 0$:

$$-\frac{1}{3}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 1 = 0.$$

Der Faktor $\frac{1}{3}$ kommt durch die Normierung der Konstante.

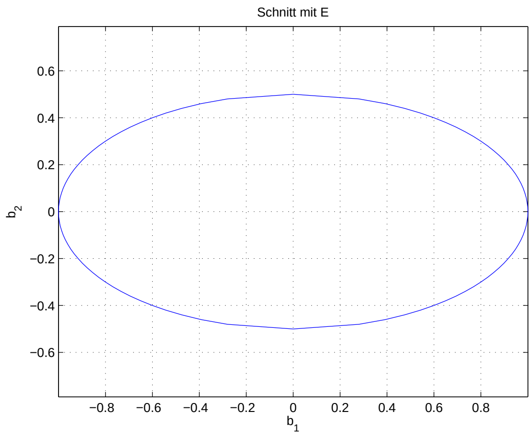
(b) Setze, dem Hinweis folgend,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Gleichung der Quadrik $\mathcal{Q}$ ein:

$$-4s_2^2 + 2\frac{(-s_1)}{\sqrt{2}}\frac{s_1}{\sqrt{2}} + 1 = -4s_2^2 - s_1^2 + 1 = 0.$$

Dies ist eine euklidische Normalform einer Ellipse mit Halbachsen 1 und $\frac{1}{2}$. Es ergibt sich folgende Skizze:



Bemerkung: Die Ebene E liegt nicht parallel zu einer der Koordinatenebenen (im Gegensatz zu allen Ebenen in Aufgabenteil (a)). Folglich gilt dies auch für den Schnitt $\mathcal{Q} \cap E$. Ein analoges Vorgehen zu (a) (d.h. schreibe $E : x_1 = -x_2$, setze dies in die Quadrikgleichung ein, usw.) liefert ein verzerrtes Bild der Schnittquadrik (genauer gesagt eine Projektion in eine Koordinatenebene).

(c) Die Matrixbeschreibung von $\mathcal{Q}$ lautet

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Die Eigenwerte der Matrix sind 1, -1 und -4, der lineare Teil verschwindet. Eine euklidische Normalform ist

$$z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^3 + 1 = 0.$$

Es handelt sich um ein einschaliges Hyperboloid. Berechne, zur Bestimmung des Koordinatensystems $\mathbb{F}$, zunächst Eigenvektoren:

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} x = 0, \qquad \Rightarrow x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\underline{\lambda = -1:}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x = 0, \qquad \Rightarrow x = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\underline{\lambda = -4:}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0, \qquad \Rightarrow x = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

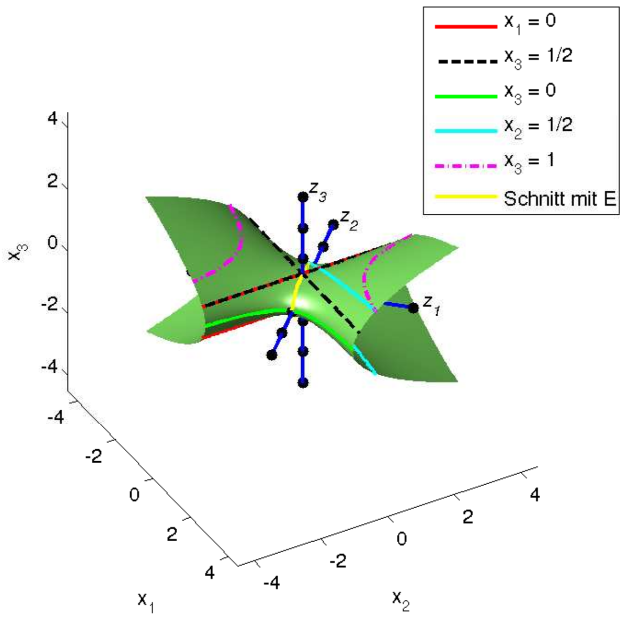
Nach Normierung der Eigenvektoren ergibt sich

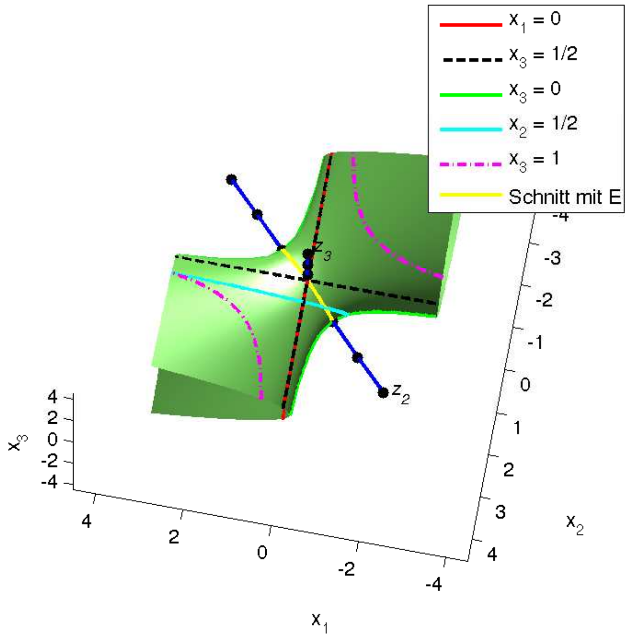
$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Die folgenden Graphiken wurden mit `Matlab` erzeugt. Sie zeigen die Quadrik $\mathcal{Q}$ aus verschiedenen Perspektiven. Die Schnitte aus (a) und (b) sind farblich hervorgehoben. Beachten Sie, dass die Gerade

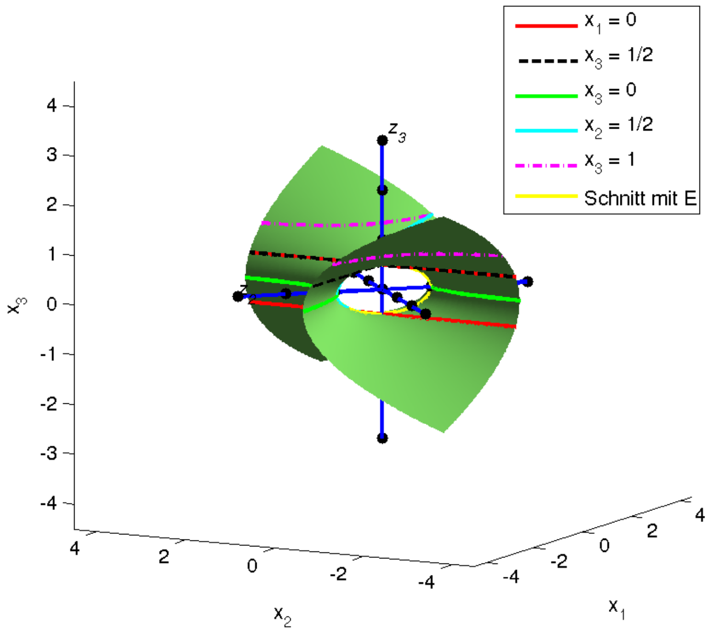
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad \text{(in den Bildern rot-schwarz-gestrichelt)}$$

sowohl im Schnitt von $\mathcal{Q}$ mit der Ebene $x_3 = \frac{1}{2}$ (schneidendes Geradenpaar), als auch im Schnitt mit $x_1 = 0$ (paralleles Geradenpaar) enthalten ist.

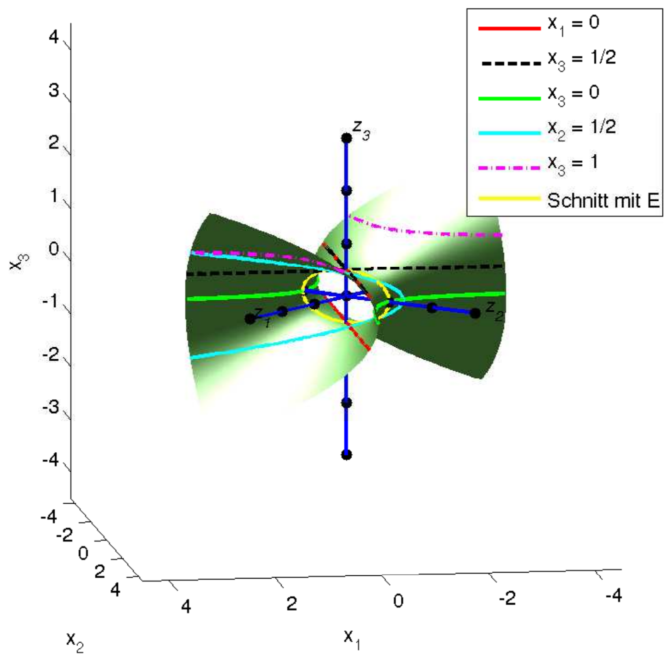




x1 = 0
x3 = 1/2
x3 = 0
x2 = 1/2
x3 = 1
Schnitt mit E
z3
z2
x1
x2
x3



x1 = 0
x3 = 1/2
x3 = 0
x2 = 1/2
x3 = 1
Schnitt mit E
z3
x1
x2
x3



x1 = 0
x3 = 1/2
x3 = 0
x2 = 1/2
x3 = 1
Schnitt mit E
z1
z2
z3
x1
x2
x3

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 39. *Quadriken*

(a) Gegeben seien die beiden Ellipsen

$$E = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 = 8 \right\},$$

$$E' = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 2)^2 = 4 \right\}.$$

Skizzieren Sie die beiden Ellipsen in das Ausgangskoordinatensystem.
Geben Sie eine eigentliche Isometrie an, die E auf E' abbildet. Geben Sie eine uneigentliche Isometrie an, die E' auf E abbildet. Geben Sie eine affine Abbildung an, die E auf den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung abbildet.

(b) Sei $\mathcal{Q} : x_1^2 + 4x_2 + 2x_3 = 0$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$. Sei

$$\mathbb{H} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Geben Sie die Gleichung von $\mathcal{Q}$ in Koordinaten bezüglich $\mathbb{H}$ an.
Welche Gestalt hat $\mathcal{Q}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir transformieren zunächst beide Quadriken auf euklidische Normalform:

- E: Die Quadrik hat die Gleichung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -8\,.$$

Die Matrix A hat Eigenwerte 2 und 8 und Eigenräume

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad V(8) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Im Koordinatensystem

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

hat E die Gleichung $2y_1^2 + 8y_2^2 = 8$ beziehungsweise $-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$. Das ist eine euklidische Normalform.

- E': Die Quadrik hat die Gleichung

$$(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 2)^2 = 4$$

Im Koordinatensystem

$$\mathbb{G} := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

hat E' die Gleichung $z_1^2 + 4z_2^2 = 4$ beziehungsweise $-\frac{1}{4}z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$. Das ist eine euklidische Normalform.

- Die Ellipse E im Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Ellipse E' im Koordinatensystem $\mathbb{G}$ haben beide die Gleichung

$$-\frac{1}{4}z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0.$$

Eine Abbildung φ, die Ellipse E (gegeben in $\mathbb{F}$-Koordinaten) auf die Ellipse E' (gegeben in $\mathbb{G}$-Koordinaten) abbildet wird also gegeben durch

$$_{\mathbb{G}}\varphi_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Um φ in Standardkoordinaten zu bringen müssen Koordinatentransformationen verwendet werden. Es gilt

$$\varphi(v) = {}_{\mathbb{E}}\varphi_{\mathbb{E}}(v) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \circ {}_{\mathbb{G}}\varphi_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v).$$

Nach Methode 4.7.6 werden die Koordinatentransformationen

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \qquad \text{und} \qquad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = v + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Daraus errechnet man

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \qquad \text{und} \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = v - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \circ {}_{\mathbb{G}}\varphi_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\big({}_{\mathbb{G}}\varphi_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v)\big) = {}_{\mathbb{G}}\varphi_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nach 4.6.4 ist φ eine Bewegung (= Isometrie). Um zu bestimmen, ob φ eigentlich oder uneigentlich ist, wird die Determinante des linearen Teils bestimmt:

$$\det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(-2) = -1.$$

Also ist φ eine *uneigentliche* Isometrie, die Ellipse E in Ellipse E' abbildet. Um eine *eigentliche* Isometrie η zu erhalten, setzen wir $\eta := \varphi \circ \delta$, wobei δ eine Spiegelung ist (die weiter unten explizit angegeben wird), die die Ellipse E fest lässt. Es gilt dann, dass η – als die Verknüpfung zweier uneigentlicher Isometrien δ und φ – eine eigentliche Isometrie ist. Dabei bildet $\eta = \varphi \circ \delta$ die Ellipse E zuerst unter δ wieder auf die Ellipse E ab und dann unter φ auf die Ellipse E'. Die Spiegelung δ ist nun gegeben als die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden, also durch

$$\delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dass δ die Ellipse E auf die Ellipse E selbst abbildet sieht man entweder am Bild oder daran, dass die Gleichung der Ellipse E in Standardkoordinaten symmetrisch in x_1 und x_2 ist.

- Weiterhin ist eine *uneigentliche* Isometrie gesucht, die Ellipse E' auf Ellipse E abbildet. Die Abbildung φ^{-1} ist genau solch eine Abbildung und kann nach Lemma 4.6.6 berechnet werden. Wir erhalten

$$\varphi^{-1}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot v - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot v + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Nun soll die Quadrik E mit einer affinen Abbildung α auf den Einheitskreis abgebildet werden. Da die affine Normalform von E eine Ellipse ist, ist dies möglich. Die Betrachtung ist nun in $\mathbb{F}$-Koordinaten, wo E die Lösungsmenge der Gleichung $-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$ ist. Der Einheitskreis hat in $\mathbb{F}$-Koordinaten die definierende Gleichung $y_1^2 + y_2^2 = 1$, da das $\mathbb{F}$-Koordinatensystem den selben Ursprung wie das Standardkoordinatensystem hat und orthonormale Koordinatenachsen. Die Ellipse lässt sich auf den Einheitskreis abbilden, indem entlang der Halbachsen gestreckt wird. Also ist ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(y) = Cy + t$, wobei

$$C = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = 0.$$

Die Punkte $P_1 := {}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_2 := {}_{\mathbb{F}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen auf E. Es muss $\alpha(P_1) = \begin{pmatrix} r2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha(P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ s2 \end{pmatrix}$ auf dem Einheitskreis liegen. Man erhält

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

und damit

$${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}(x) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\ {}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dies ist die gesuchte affine Abbildung in Standardkoordinaten.

(b) Die Quadrik hat im Koordinatensystem $\mathbb{E}$ die Gleichung $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 0\,.$$

Es gilt

$$T = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = {}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{E}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Koordinatentupel y im Koordinatensystem $\mathbb{H}$ eines Vektors, der im Koordinatensystem $\mathbb{E}$ die Koordinaten x hat lässt sich also durch $y = T^{-1}x$ bestimmen. Daraus ergibt sich

$$0 = x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = y^\mathsf{T} T^{-1} ATy + 2a^\mathsf{T} Ty + c = y_1^2 + 2\sqrt{5}y_2 + 0.$$

Also ist $y_1^2 + 2\sqrt{5}y_2 = 0$ die gesuchte Gleichung.
Die Gestalt der Quadrik $\mathcal{Q}$ ist der parabolische Zylinder.

Aufgabe H 40. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$f_1 := 0\,, \quad f_2 := 1\,, \quad f_{n+1} := f_n + 6f_{n-1} \text{ für } n \geqq 2\ .$$

Außerdem sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geqq 1$ die Gleichungen

$$A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

gelten.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt. Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Verwenden Sie **(a)** und **(b)**, um eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n anzugeben.

(d) Untersuchen Sie die Folge $(1/f_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösungshinweise hierzu: Die ersten Folgenglieder lauten

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = f_2 + 6f_1 = 1, \quad f_4 = f_3 + 6f_2 = 7\,.$$

(a) IA $n = 1$:

$$A^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2+1} \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Die Behauptung ist somit für $n = 1$ gezeigt.

IS $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= A\,A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{IH}}{=} A\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} + 6f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+3} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$.

Dazugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und } v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A lässt sich somit diagonalisieren: Es gilt $D = T^{-1}AT$ wobei

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Mit $A^n = (TDT^{-1})^n = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=E}D\underbrace{T^{-1}T}_{=E}\ldots TDT^{-1} = TD^nT^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &\overset{\text{(a)}}{=} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} TD^nT^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-2)^n 2 + 3^{n+1} \\ (-1)(-2)^n + 3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit

$$f_{n+1} = \frac{1}{5}\big(3^n - (-2)^n\big) \qquad \text{bzw.} \qquad f_n = \frac{1}{5}\big(3^{n-1} - (-2)^{n-1}\big).$$

Eine Probe ergibt

$$f_3 = \frac{1}{5}\big(3^2 - (-2)^2\big) = 1, \quad f_4 = \frac{1}{5}\big(3^3 - \frac{1}{5}(-2)^3\big) = 7\,.$$

(d) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend. Dazu überlegt man sich zuerst, dass $f_n > 0$ ist, was an der expliziten Form zu erkennen ist

$$f_n = \frac{1}{5}\big(3^{n-1} - (-2)^{n-1}\big) \geqq \frac{1}{5}\big(3^{n-1} - 2^{n-1}\big) > 0.$$

Mittels der rekursiven Form zeigt man nun

$$f_{n+1} = f_n + 6f_{n-1} \overset{f_{n-1}>0}{>} f_n$$

und somit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend. Also ist die Folge $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge positiver Zahlen. Insbseondere ist also $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch 0 und nach oben durch $\frac{1}{f_{1+1}} = 1$ beschränkt.

Aufgabe H 41. *Eigenschaften von Folgen*

Entscheiden Sie jeweils, ob eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den angegebenen Eigenschaften existiert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und nicht beschränkt.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und nicht streng monoton steigend.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und nicht nach unten beschränkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierend und nicht beschränkt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man kann die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch die Folgenglieder $a_n = -n$ gegeben ist, als Beispiel verwenden.

(b) Etwa die Folge, bei der alle Folgeglieder konstant 0 sind erfüllt dies, da zwar $0 \geqq 0$ aber nicht $0 > 0$ gilt.

(c) Bei einer streng monotonen steigenden Folge gilt stets $a_n \geqq a_1$ für alle möglichen $n \in \mathbb{N}$. Also ist a_1 eine untere Schranke für eine solche Folge. Somit kann es keine Folge geben, die sowohl nach unten unbeschränkt als auch streng monoton steigend ist.

(d) Dazu wählt man zum Beispiel die Folgenglieder als $a_n = (-1)^n n$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 42. *Konvergenz von Folgen*

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Folge. Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ oder in $\{-\infty, +\infty\}$ existiert.

(a) $a_n = \dfrac{3n^4-1}{1-3n^3}$ **(b)** $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3\sqrt{n}}$ **(c)** $a_n = \sqrt{n^2+\dfrac{n}{3}} - n$

(d) $a_n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[n]{2}\right)$ **(e)** $a_n = \left(\dfrac{2+2(-1)^n}{5}\right)^n$

Hinweis: Es darf $\lim_{n\to\infty}\sqrt{b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} b_n}$ verwendet werden, sofern $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$a_n = \frac{3n^4-1}{1-3n^3} = \frac{n^3(3n-\frac{1}{n^3})}{n^3(\frac{1}{n^3}-3)} = \frac{3n-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-3}.$$

Weiter gilt

$$-3 \leqq \frac{1}{n^3} - 3 \leqq -2,$$

d.h. die Folge $(\frac{1}{n^3}-3)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben durch -2 und nach unten durch -3 beschränkt. Es folgt die Abschätzung

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{\frac{1}{n^3}-3} \leqq -\frac{1}{3}$$

und damit

$$a_n = \frac{3n-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-3} \leqq -\frac{1}{3}\left(3n-\frac{1}{n^3}\right) = -n + \frac{1}{3n^3}.$$

Die Folge $(-n+\frac{1}{3n^3})_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n+\frac{1}{3n^3}\right) = -\infty.$$

Da für alle $n\in\mathbb{N}$

$$a_n \leqq -n + \frac{1}{3n^3},$$

ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

(b) Es gilt mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n + 3\sqrt{n}} &= \frac{n - (n + 3\sqrt{n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n + 3\sqrt{n}}} \\ &= \frac{-3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n + 3\sqrt{n}}} = \frac{-3}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}}. \end{aligned}$$

Nach dem Hinweis gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}} = \sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)} = 1.$$

Es folgt mit Grenzwertsatz 1.5.3

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-3}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) Es gilt mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n^2 + \frac{n}{3}} - n &= \frac{n^2 + \frac{n}{3} - n^2}{\sqrt{n^2 + \frac{n}{3}} + n} \\ &= \frac{n}{3\left(\sqrt{n^2 + \frac{n}{3}} + n\right)} = \frac{1}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{3n}} + 1\right)}. \end{aligned}$$

Analog zu Teil **(b)** folgt mit dem Hinweis und Grenzwertsatz 1.5.3

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{3n}} + 1\right)} = \frac{1}{6}.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(d) Nach 1.5.7 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

und nach 1.5.3 und 1.5.10

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2})(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) = 1.$$

Also ist $(\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[n]{2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[n]{2}) = -1.$$

Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, sie besitzt die Häufungspunkte -1 und 1. Es folgt aus 1.5.3, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist, denn: Wäre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann müsste dies nach 1.5.3 auch für den Quotienten

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt[n]{2n}-2\sqrt[n]{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

gelten.

(e) Schreibe

$$a_n = \left(\frac{2+2(-1)^n}{5}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^n, & \text{für gerade } n, \\ 0, & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht demnach aus einer Teilfolge, deren Folgenglieder alle konstant gleich Null sind, und einer Teilfolge, die sich schreiben lässt als

$$\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Beide Teilfolgen sind jeweils konvergent mit Grenzwert 0. Also ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(2) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ gegeben. Bestimmen Sie den Grenzwert a dieser Folge. Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε derart, dass für alle $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt mit 1.5.3

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1} = 1.$$

Betrachte nun ein beliebiges, aber festes $\varepsilon > 0$. Es soll gelten

$$|a_n - a| = |1 - \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{1}{n^2} \overset{!}{<} \varepsilon.$$

Dies ist für alle $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ erüllt. Es folgt also: Wähle zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε so, dass

$$n_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Dann gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_\varepsilon$.

Aufgabe H 43. *Geometrische Reihen*

Berechnen Sie jeweils den Wert der Reihe, falls sie konvergiert.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{5^k}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty}2^k$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty}2^{3-k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt nach 1.8.4

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Betrachte die n-ten Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2+(-1)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{5^k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{5^k} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^k.$$

Im Grenzfall $n \to \infty$ handelt es sich dabei auf der rechten Seite um geometrische Reihen und es folgt nach 1.8.4

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Nach Grenzwertsatz 1.5.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{5^k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2+(-1)^k}{5^k} \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^k \\
&= 2\cdot\frac{5}{4} + \frac{5}{6} \\
&= \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Die Folge $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge, daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k$$

nach 1.9.1 nicht.

(d) Ziel bei dieser Aufgabe ist es, die Reihe geschickt so umzuformen, dass eine geometrische Reihe entsteht, deren Grenzwert mit 1.8.4 bestimmt werden kann. Dies geschieht wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3-k} = 2^2 + 2^1 + \underbrace{2^0 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots}_{=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k}.$$

Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3-k} = 4 + 2 + 2 = 8.$$

Aufgabe H 44. *Häufungspunkte*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Folge. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent? Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, so bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{n}}{n!}$ **(b)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ **(c)** $a_n = n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ **(d)** $a_n = -n^{((-1)^n)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n\in\mathbb{N}$ nimmt $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ die Werte $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und 0 unendlich oft an. Desweiteren ist $\frac{\sqrt{n}}{n!}$ eine Nullfolge. Daher hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und 0 und ist nicht konvergent. Da sie beschränkt ist, ist sie nicht bestimmt divergent. Außerdem gilt:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{n}}{n!} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Das Supremum der Folge ist $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, da $\dfrac{\sqrt{n}}{n!}$ immer positive Werte annimmt.

(b) Die Folge lässt sich in die beiden Teilfolgen $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n-1} = \dfrac{(-1)}{n^3}$ und $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n} = \dfrac{1}{n^3}$ zerlegen. Beide Folgen sind Nullfolgen. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{(-1)^n}{n^3} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{(-1)^n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3} = 0$.

Da die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist das Supremum der Folge $\dfrac{1}{8}$ und wird für $n=2$ angenommen.

(c) Betrachte zunächst $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Diese Folge nimmt der Reihe nach die Werte $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1 an. Anschließend wiederholen sich diese Werte.

Bei der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden nun diese Werte noch mit dem Faktor n multipliziert. Daher divergiert die Folge und hat 0, $+\infty$ und $-\infty$ als Häufungspunkte. Da die Folge die konstante Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 0$ als Teilfolge enthält, ist sie nicht bestimmt divergent. Damit erhalten wir $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$.

(d) Die Folge lässt sich in die beiden Teilfolgen $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n-1} = \dfrac{(-1)}{n}$ und $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n} = -n$ zerlegen. Die erste Folge ist eine Nullfolge, die zweite bestimmt divergent mit Grenzwert $-\infty$. Daher ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$ und die Folge selbst ist nicht konvergent.
Da beide Teilfolgen ausschließlich negative Folgenglieder haben, ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$. Da die Folge den Häufungspunkt 0 hat, ist sie nicht bestimmt divergent. Ihr Supremum ist 0, da alle Folgenglieder negativ sind.

Aufgabe H 45. *Rekursive Definition von Folgen, Heron-Verfahren (ca. 1750 v. Chr.)*

Zu $c \in \mathbb{R}^+$ soll eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$ konstruiert werden. Wir wählen einen beliebigen Startwert $a_1 \in \mathbb{R}^+$. Wir setzen rekursiv $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeichnen Sie für $c = 2$ und $a_1 = 1$ die Werte $\sqrt{c}$, a_1, $\frac{c}{a_1}$, a_2, $\frac{c}{a_2}$ und a_3 auf dem Zahlenstrahl ein.

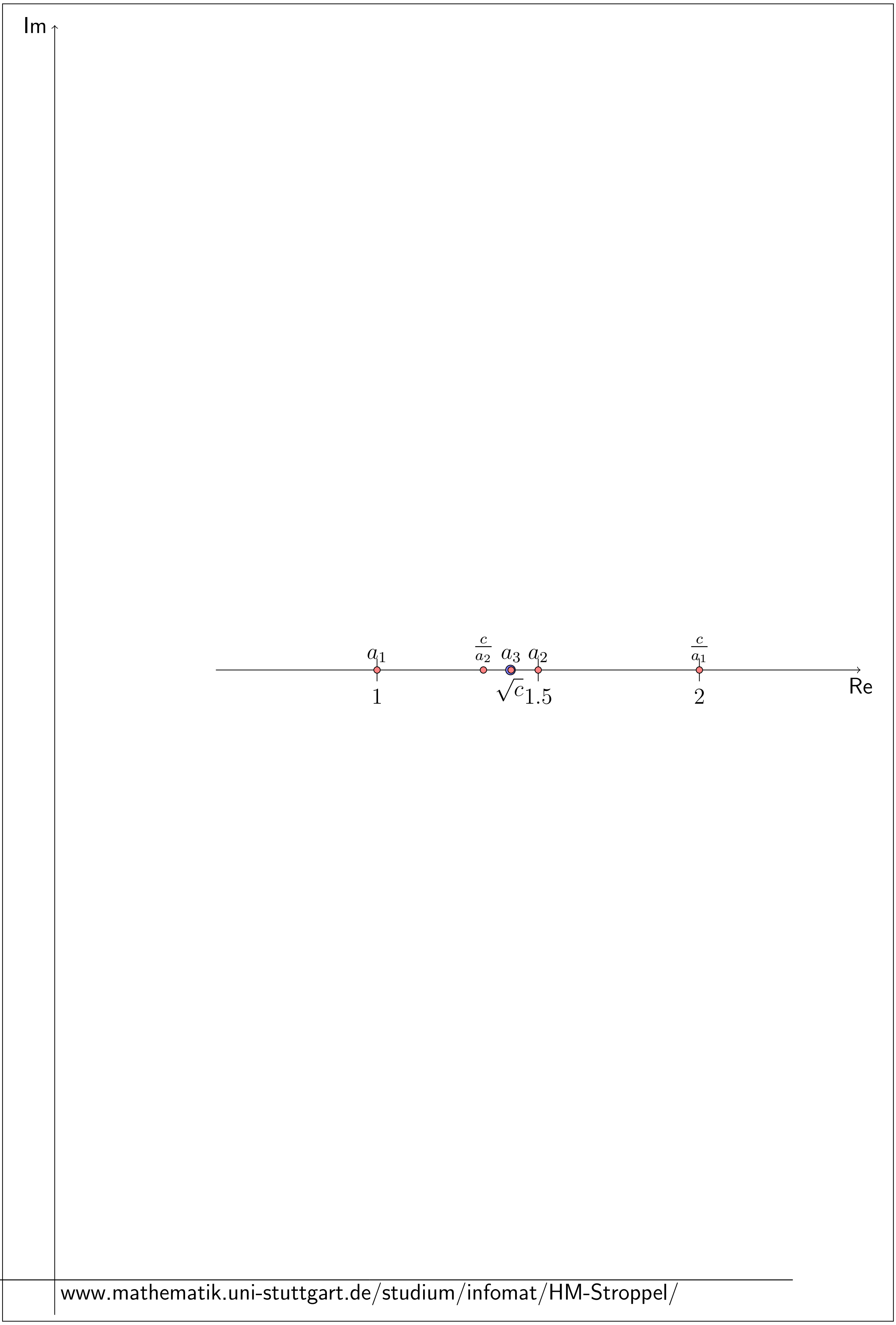
(b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegen a_{n+1}, $\frac{c}{a_{n+1}}$ und $\sqrt{c}$ zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$.

(c) Zeigen Sie die Ungleichung $|a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2}|a_n - \frac{c}{a_n}|$ und leiten Sie daraus und aus (b) die Ungleichungen $|a_{n+1} - \sqrt{c}| \leqq |a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2^n}|a_1 - \frac{c}{a_1}|$ ab. Folgern Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

(d) Wenden Sie (c) an, um für $c = 2$ und $a_1 = 1$ ein n so zu bestimmen, dass a_n und $\sqrt{2}$ in den ersten 6 Nachkommastellen übereinstimmen.

Lösungshinweise hierzu:

(a)


Im
Re
a_1
$\frac{c}{a_2}$
a_3
a_2
$\frac{c}{a_1}$
1
$\sqrt{c}$
1.5
2

(b) Laut den Voraussetzungen aus der Aufgabenstellung sind c und a_1 positiv. Aus der Rekursionsvorschrift lässt sich ablesen, dass alle Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv sind. Wir unterscheiden im folgenden zwei Fälle:

Fall 1: $a_n < \frac{c}{a_n}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad &< \quad \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n} + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{c}{a_n} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad &> \quad \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \end{aligned}$$

Also liegt a_{n+1} zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$. Da $a_{n+1} > a_n$ gilt, ist $\frac{c}{a_{n+1}} < \frac{c}{a_n}$. Weiter gilt $a_n < \frac{c}{a_{n+1}} < \frac{c}{a_n}$. Damit liegt auch $\frac{c}{a_{n+1}}$ zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$. Aus der Bedingung $a_n < \frac{c}{a_n}$ ergibt sich $a_n^2 < c$ und daraus $a_n < \sqrt{c}$. Ebenfalls erhalten wir aus $a_n < \frac{c}{a_n}$ die Ungleichung $a_n^2 < c$ und daraus $c < \frac{c^2}{a_n}$. Daraus folgt $\sqrt{c} < \frac{c}{a_n}$. Also liegt auch $\sqrt{c}$ zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$.

Fall 2: $a_n \geqq \frac{c}{a_n}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad &\geqq \quad \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n} + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{c}{a_n} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad &\leqq \quad \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \end{aligned}$$

Also liegt a_{n+1} zwischen $\frac{c}{a_n}$ und a_n. Da $a_{n+1} \leqq a_n$ gilt, ist $\frac{c}{a_{n+1}} \geqq \frac{c}{a_n}$. Weiter gilt $a_n \geqq \frac{c}{a_{n+1}} \geqq \frac{c}{a_n}$. Damit liegt auch $\frac{c}{a_{n+1}}$ zwischen $\frac{c}{a_n}$ und a_n. Aus der Bedingung $a_n \geqq \frac{c}{a_n}$ ergibt sich $a_n^2 \geqq c$ und daraus $a_n \geqq \sqrt{c}$. Ebenfalls erhalten wir aus $a_n \geqq \frac{c}{a_n}$ die Ungleichung $a_n^2 \geqq c$ und daraus $c \geqq \frac{c^2}{a_n}$. Daraus folgt $\sqrt{c} \geqq \frac{c}{a_n}$. Also liegt auch $\sqrt{c}$ zwischen $\frac{c}{a_n}$ und a_n.

(c) Da $\frac{c}{a_{n+1}}$ zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$ liegt und a_{n+1} der Mittelpunkt dieses Intervalls ist, ist der Abstand von $\frac{c}{a_{n+1}}$ zur Intervallmitte a_{n+1} höchstens die halbe Intervallbreite und es gilt $|a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2}|a_n - \frac{c}{a_n}|$. Damit erhalten wir dann

$$|a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}| \leqq \frac{1}{2}|a_n - \frac{c}{a_n}| \leqq \frac{1}{4}|a_{n-1} - \frac{c}{a_{n-1}}| \ldots \leqq \frac{1}{2^n}|a_1 - \frac{c}{a_1}|$$

Da für jeden Wert von n das Intervall zwischen a_n und $\frac{c}{a_n}$ die Zahl $\sqrt{c}$ enthält, ist $\sqrt{c}$ im Intervall zwischen a_{n+1} und $\frac{c}{a_{n+1}}$ enthalten. Daher ist der Abstand von $\sqrt{c}$ zur Intervallgrenze a_{n+1} höchstens so groß wie die Länge des Intervalls und es gilt $|a_{n+1} - \sqrt{c}| \leqq |a_{n+1} - \frac{c}{a_{n+1}}|$.

Wir möchten noch sehen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert. Wir stellen fest, dass falls $a_n = \sqrt{c}$ gilt, auch $a_{n+1} = \sqrt{c}$ gilt. Die Folge wird in diesem Fall also konstant und hat den Grenzwert $\sqrt{c}$. Im Weiteren betrachten wir deshalb nur noch den Fall $a_n \neq \sqrt{c}$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es eine natürliche Zahl n_ε mit $n_\varepsilon > \frac{\left|a_1 - \frac{c}{a_1}\right|}{\varepsilon}$. Für alle natürlichen Zahlen $k > n_\varepsilon$ gilt

$$2^k > k > n_\varepsilon > \frac{\left|a_1 - \frac{c}{a_1}\right|}{\varepsilon}$$

und daher

$$\frac{\left|a_1 - \frac{c}{a_1}\right|}{2^k} < \varepsilon\,.$$

Daher gilt

$$\left|a_n - \sqrt{c}\right| \leqq \frac{1}{2^n}\left|a_1 - \frac{c}{a_1}\right| < \varepsilon$$

und die Folge konvergiert gegen $\sqrt{c}$.

(d) Wir überlegen zunächst, wie viele Schritte wir durchführen müssen. Damit die Wert von a_n und $\sqrt{c}$ sich höchstens in der siebten Nachkommastelle unterscheiden, sollte der Wert von $|a_n - \sqrt{c}|$ kleiner als 0.00000004 sein. Wir berechnen

$$\left|a_n - \sqrt{c}\right| \leqq \frac{1}{2^n}\left|a_n - \frac{c}{a_n}\right| = \frac{1}{2^n}\,.$$

Wir suchen also nach einer Zahl n mit $\frac{1}{2^n} < 0.00000004$. Die Zahl 25 erfüllt diese Bedingung.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{1}{2}(1+2) = 1.5 \\
a_3 &\approx 1.416666667 \\
a_4 &\approx 1.414215686 \\
a_5 &\approx 1.414213562 \\
a_6 &\approx 1.414213562 \\
a_7 &\approx 1.414213562
\end{aligned}$$

Die restlichen Werte bis a_{25} ändern sich in den ersten sechs Dezimalstellen nicht mehr.